МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Сплайны в вычислительной математике

Автореферат бакалаврской работы

студентки 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Кустовой Виктории Андреевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.м.н., доцент ________________ В. Г. Тимофеев
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.м.н., профессор ________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. В математике и её приложениях постоянно приходится иметь дело с приближенными представлениями функций. Классическими аппаратами таких представлений являются многочлены и рациональные дроби. Но они обладают рядом недостатков. Один из которых состоит в том, что их поведение в окрестности какой-либо точки определяет их поведение в целом. В связи с этим в последнее время успешно разрабатываются другие аппараты приближения, свободные от этого недостатка. Одним из таких аппаратов, зарекомендовавших себя как в теоретических исследованиях, так и в приложениях, являются так называемые *сплайны*. Они были рассмотрены в работах таких математиков, как Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.[1], Зматраков Н.Л.[2] и другие.

В данной бакалаврской работе рассматривается один из видов сплайнов - параболические сплайны, а так же их применение.

Целью работы является изучение параболических сплайнов для дальнейшего использования в численном дифференцирование.

В первой главе даются основные определения и свойства относительно параболических сплайнов.

Во второй части рассматриваются задачи численного дифференцирования функций, основанные на приведенных в предыдущей главе фактах.

В третьей главе показываются неравенства между верхними гранями производных, используя параболические сплайны.

Завершают работу описание еще некоторых свойств дифференцирования функций, а так же примеры различных построений параболических сплайнов.

Основное содержание работы. Изучим параболические сплайны. Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, и заданы два множества узлов:

$$\Delta_n^{'} : \bar{x}_0 = a < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_n < b = \bar{x}_{n+1}, \tag{1.1}$$

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b \qquad (n \geqslant 2). \tag{1.2}$$

[1]Стечкин, С.Б., Субботин, Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике.-М.,1976.-33-45 с.

[2]Зматраков, Н.Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов.-М.,1975.-71-93 с.

Будем предполагать, что

$$x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i \qquad (i = 1, \dots n). \tag{1.3}$$

Определение 1.1 Функция $S_2(x; f)$ *называется интерполяционным параболическим сплайном* для функции $f(x)$, если

1)$S_2 \in \mathbf{P}_2, \quad x \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, \dots n);$

2)$S_2 \in C^{(1)}[a, b];$

3)$S_2(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \dots n).$

Числа $\bar{x}_i$ называются *узлами сплайна*, а числа x_i - *узлами интерполяции.*

Узлы сплайна (дефекта 1) - это точки возможного разрыва его старшей производной. Для сплайнов из определения 1 будем использовать обозначения $S_2(x)$ и $S(x)$. Сплайн $S_2(x)$ зависит от $n+3$ параметров и имеет два свободных параметра. Поэтому на интерполяционный параболический сплайн налагают еще два дополнительных условия.

Если функция $f(x)$ является $(b-a)$-периодической, то обычно требуют, чтобы сплайн $S(x)$ также был $(b-a)$-периодическим и имел непрерывную первую производную на $(-\infty, \infty)$ и чтобы точка $x_0 = a$ не являлась узлом сплайна. Таким образом, периодический сплайн $S(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\alpha) \qquad S_2^{(i)}(a) = S_2^{(i)}(b) \quad (i = 1, 2). \tag{1.4}$$

В общем случае наиболее употребительны следующие краевые условия:

$$\beta) \qquad S_2'(a) = a_n, \quad S_2'(b) = b_n; \tag{1.5}$$

$$\gamma) \qquad S_2''(a) = A_n, \quad S_2''(b) = B_n, \tag{1.6}$$

где a_n, b_n, A_n, B_n - заданные действительные числа. Конкретный выбор этих чисел зависит от рассматриваемой задачи.

Теорема 1.1 *Если*

$$0 < \bar{h}_i < h_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1; n \geqslant 2),$$

то интерполяционный параболический сплайн,удовлетворяющий одному из краевых условий, существует и определяется единственным образом.

Полученный результат в данной теореме [3], обеспечивает большую свободу в расположении узлов сплайна и узлов интерполяции, при этом сохраняется свойство доминантности главной диагонали у матрицы системы, определяющей параметры сплайна. Указанный произвол в расположении узлов сплайна позволяет лучше учитывать индивидуальные свойства приближаемой функции (выпуклость, точки перегиба).

Если возникает задача численного дифференцирования функции, то, как правило, заранее известна некоторая предварительная информация о дифференцируемой функции, связанная с её гладкостью. В рассматриваемых ниже примерах мы будем полагать, что функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$ и её $(m-1)$-я производная удовлетворяет условию Липшица с константой K, этот класс функций будем обозначать KW^m. Мы выбрали бесконечный промежуток, чтобы не вдаваться в подробности, вызванные особенностью численного дифференцирования вблизи концов конечного отрезка.

Пусть в произвольной точке x функция $f(x)$ может быть вычислена с произвольной точностью, тогда оператор

$$S_h f = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \qquad h \to 0 \tag{2.1}$$

позволяет вычислить производную $f'(x)$ с произвольной точностью. В действительности в практических расчетах возможно вычислить значение функции приближенно. Пусть погрешность вычисления не превосходит ε $(\varepsilon > 0)$. Тогда известна в каждой точке не функция $f(x)$, а функция $\widetilde{f}(x)$, которая отличается от $f(x)$ не более чем на ε, $|f(x) - \widetilde{f}(x)| \leqslant \varepsilon$. Пусть $f(x) \in KW^2$ и в каждой точке известно её приближенное значение $\widetilde{f}(x)$, $|f(x) - \widetilde{f}(x)| \leqslant \varepsilon$;

[3] С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин- Сплайны в вычислительной математике//Москва:Изд. Наука, 1976. 33 с

тогда, вычисляя производную с помощью оператора (2.1), имеем

$$|f'(x) - S_h\widetilde{f}| \leqslant |f'(x) - S_h f| + |S_h(f - \widetilde{f})| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |f'(x+t) - f'(x)| dt + \varepsilon h^{-1} \leqslant \frac{Kh}{2} + \varepsilon h^{-1}. \quad (2.2)$$

Правая часть неравенства (2.2) при $h \to 0$ стремится к бесконечности и принимает наименьшее значение при $h_0 = \sqrt{2\varepsilon K^{-1}}$. Покажем это. Продифференцировав правую часть неравенства (2.2) по h, получим $\frac{K}{2} = \frac{\varepsilon}{h^2}$. Выражая из этого равенства h, получаем искомое значение. Таким образом, если вместо функции $f(x)$ мы знаем её приближенное значение $\widetilde{f}(x)$, то с помощью оператора (2.1) можно вычислить производную $f'(x)$ в лучшем случае с погрешностью $\sqrt{2K\varepsilon}$:

$$|f'(x) - S_{h_0}\widetilde{f}| \leqslant \sqrt{2K\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Тогда возникает вопрос: возможно ли с помощью другого оператора по $\widetilde{f}(x)$ найти более хорошее приближение для $f'(x)$? Разумно рассматривать произвольные операторы S, отображающие пространство непрерывных функций $C(\mathbf{R})$ в себя. Уже при таком общем предположении для всего класса KW^2 оценка (2.3) неулучшаема. Действительно, функции

$$f_{\pm}(x) = \pm(-1)^i \frac{K}{2}(x - 2i\sqrt{2\varepsilon K^{-1}}) \cdot [x - (2i+2)\sqrt{2\varepsilon K^{-1}}],$$

$$2i\sqrt{2\varepsilon K^{-1}} \leqslant x \leqslant (2i+2)\sqrt{2\varepsilon K^{-1}} \quad (i = 0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

принадлежат KW^2, а функцию $\widetilde{f}(x) \equiv 0$ можно рассматривать в качестве приближения к каждой из них, так как $||f_{\pm}(x) - \widetilde{f}(x)||_{C(\mathbf{R})} = \varepsilon$. Поэтому для любого оператора S

$$\max\{||f'_+ - S\widetilde{f}||_{C(\mathbf{R})}, \quad ||f'_- - S\widetilde{f}||_{C(\mathbf{R})}\} \geqslant$$
$$\geqslant \max\{|f'_+(0) - S\widetilde{f}(0)|, \quad |f'_-(0) - S\widetilde{f}(0)|\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\,|f'_+(0) - f'_-(0)| = \sqrt{2K\varepsilon},$$

и неулучшаемость оценки (2.3) доказана. Можно рассматривать две задачи:

$$E_3(K,\varepsilon) = \inf_{S\in A} \sup_{f\in KW^3, ||f-\widetilde{f}||\leqslant\varepsilon} ||f' - S\widetilde{f}|| \tag{2.4}$$

и

$$e_3(K,\varepsilon) = \sup_{f\in KW^3, ||f-\widetilde{f}||\leqslant\varepsilon} \inf_{S\in A} ||f' - S\widetilde{f}||, \tag{2.5}$$

где $||f|| = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f(x)|$ и A - совокупность операторов, действующих из $C(-\infty,\infty)$ в $C(-\infty,\infty)$. Видно, что

$$e_3(K,\varepsilon) \leqslant E_3(K,\varepsilon).$$

Теорема 2.1 *Справедливы равенства*

$$E_3(K,\varepsilon) = e_3(K,\varepsilon) = \frac{1}{2}(3\varepsilon)^{2/3}K^{1/3}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.2 *Пусть величина E_N определена равенством*

$$\inf_{S\in S_N} \sup_{f\in KW^2} ||f' - Sf_h||_M = E_N.$$

Тогда

$$E_{N_{\lambda,n}} = J_{\lambda,n} \quad (n = 1,2,\ldots;0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{2.22}$$

где

$$N_{\lambda,2k-1} = \frac{1}{(2k-1)^h}\left(2 - \frac{\lambda}{k}\right) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{2.23}$$

$$N_{\lambda,2k} = \frac{1}{kh}\left(1 - \frac{\lambda}{2k+1}\right) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{2.24}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Данные примеры показывают, что приближенное восстановление производной по функции, заданной с погрешностью, сильно зависит от приближающего оператора. Так, если приближающий оператор является линейным и его норма растет, то погрешность не уменьшается, а растет. Для функции из класса KW^2 мы наилучшим образом восстановили производную по значениям функции, известным с погрешностью. При этом наилучший восстанавливающий оператор как в случае сеточной функции, так и в случае функции, определенной на всем рассматриваемом множестве, оказался линейным. Этот наилучший оператор в случае сеточной функции зависит как от ε, так и от шага h, а в случае функции, определенной на всем множестве, он зависит только от ε.

Обозначим за I конечных отрезок $0 \leqslant x \leqslant \delta$, полупрямую $0 \leqslant x < \infty$ или всю бесконечную прямую $-\infty < x < \infty$. Пусть функция $f(x)$ определена на I и имеет первую производную, удовлетворяющую условию Липшица:

$$|f'(x+h) - f'(x)| \leqslant K|h|.$$

Положим

$$\mu_0 = \mu_0(f, I) = \sup_{x \in I} |f(x)|$$
$$\mu_1 = \mu_1(f, I) = \sup_{x \in I} |f'(x)|$$
$$\mu_2 = \mu_2(f, I) = \sup_{x \in I} |f''(x)|$$

Последнее выражение понимается как верхняя грань производных чисел функции $f(x)$. При этих обозначениях имеет место следующая теорема[4].

Теорема 3.1 *Если* $I = [0, \delta]$ *и* $\delta < 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}}$, *то*

$$\mu_1 \leqslant \frac{2}{\delta}\mu_0 + \frac{\delta}{2}\mu_2. \tag{3.1}$$

Если $I = [0, \delta]$ *и* $\delta \geqslant 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_2}}$, *то*

$$\mu_1 \leqslant 2\sqrt{\mu_0\mu_2}. \tag{3.2}$$

Если $I = (-\infty, \infty)$, *то*

$$\mu_1 \leqslant \sqrt{2\mu_0\mu_2}. \tag{3.3}$$

Неравенства точные.

Пусть $I = (-\infty, \infty)$; M - пространство функций $C = C[I]$ или $L = L_1[I]$; $Q_n(M)$ - класс функций $f(x)$, имеющих $n-1$ непрерывную производную и таких, что $||f^{(n)}||_M \leqslant 1$, где $||f^{(n)}||_C$ понимается как верхняя грань абсолютных величин производных чисел функции $f^{(n-1)}(x)$. Рассмотрим задачу: найти величину

$$E_{n,k}(N) = \inf_{||S||_M^M \leqslant N} \sup_{f \in Q_n(M)} ||f^{(k)}(x) - S(x; f)||_M \quad (0 < k < n), \tag{4.1}$$

где $S(x; f)$ - однородный аддитивный оператор, заданный на объединении пространств M с классом $Q_n(M)$ и ограниченный как оператор из M в M, а также найти экстремальный оператор $S_{n,k}(x; f; N)$, на котором достигается нижняя грань. Справедливы соотношения $(0 < h < \infty)$:

$$E_{n,k}(h^{-k}N) = h^{n-k}E_{n,k}(N), \tag{4.2}$$

$$S_{n,k}(x; f(t); h^{-k}N) = h^{-k}S_{n,k}(h^{-1}x; f(ht); N), \tag{4.3}$$

[4] Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Functionen.-Proc. London. Math. Soc., 1913, v. 2, №13, p. 43-49

$$C_{n,k} \leqslant n(E_{n,k}(N)/k)^{k/n}(N/(n-k))^{(n-k)/n}, \tag{4.4}$$

где

$$C_{n,k} = K_{n-k}K_n^{(k-n)/n}, \quad K_m = \frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i(m+1)}}{(2i+1)^{m+1}}.$$

Равенства (4.2), (4.3) показывают, что задачу (4.1) достаточно решить для некоторого значения N, неравенство (4.4) дает оценку снизу для величины $E_{n,k}(N)$. Для $M = C$, $n = 2, 3$ задача была решена. При $k = 1$:

$$S_{2,1}(x; f; h^{-1}) = S_{3,1}(x; f; h^{-1}) = \frac{1}{2h}\{f(x+h) - f(x-h)\},$$

$$E_{2,1}(h^{-1}) = h/2, \quad E_{3,1}(h^{-1}) = h^2/6, \quad 0 < h < \infty.$$

В данной главе даётся решение задачи (4.1) для $M = C$, $n = 4, 5$ и $M = L$, $n = 2, 3, 4, 5$.

Теорема 4.1 *Положим* $N_{m,k} = \frac{m-k}{m}K_{m-k}K_m^{-1}$; *тогда, если для* $n \leqslant m-1$, $1 \leqslant k \leqslant n$ *и* $n = m$, $k = 1$ *известно решение задачи* (2.1), *причем имеет место равенство*

$$E_{n,k}(N_{n,k}) = \frac{k}{n}K_{n-k}, \tag{4.5}$$

то это равенство справедливо для $n = m$, $k > 1$ *и*

$$\begin{aligned} &S_{m,k}(x; f(t); N_{m,k}) = \\ &\qquad = S_{m-k+l,l}(x; S_{m,k-l}(t; f; N_{m,k-l}); N_{m-k+l,l}) \qquad (0 < l < k < m). \end{aligned}$$

Теорема 4.2 *Для* $M = C$, $n = 4, 5$ *равенство* (4.5) *справедливо и*

$$\begin{aligned} &S_{4,1}(x; f; N_{4,1}) = \\ &\qquad = -\frac{24\alpha}{\pi(1+\alpha)}\sum_{i=-0}^{\infty}\alpha^i\{f[x+(2i+1)\pi/2] - f[x-(2i+1)\pi/2]\}, \end{aligned}$$

$$S_{5,1}(x;f;N_{5,1}) = \{f(x+\pi/2) - f(x-\pi/2)\}/2\pi -$$
$$- \frac{6\beta}{\pi(1+\beta)} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \{f[x+(2i+1)\pi/2] - f[x-(2i+1)\pi/2]\},$$

где $|\alpha| < 1$, $\alpha^2 + 22\alpha + 1 = 0$; $|\beta| < 1$, $\beta^2 + 10\beta + 1 = 0$.

Теорема 4.3 *Операторы* $S_{n,1}(x;f;N_{n,1})$ $(n = 2,3,4,5)$ *являются экстремальными в задаче* (4.1) *для* $M = L$, *и равенство* (4.5) *справедливо.* Для $n = 4$, $k = 1,2,3$ приведем операторы $S_k(f)$, близкие к экстремальным $(0 < h < \infty)$:

$$S_1(f) = \frac{1}{1056h}\{f(x+5h) - 27f(x+3h) +$$
$$+ 604f(x+h) - 604f(x-h) + 27f(x-3h) - f(x-5h)\},$$

$$S_2(f) = -\frac{1}{23h^2}\{f(x+2h) - 27f(x+h) + 52f(x) -$$
$$- 27f(x-h) + f(x-2h)\},$$

$$S_3(f) = \frac{1}{176h^3}\{f(x-5h) - 27f(x-3h) + 76f(x-h) -$$
$$- 76f(x+h) + 27f(x+3h) - f(x-5h)\}.$$

Заключение. В данной работе изучены параболические сплайны, их применение в численном дифференцирование, представленное во второй главе, а так же в неравенствах между верхними гранями производных, рассмотренное в третьей части работы.

В приложении А приведены примеры программ для построения различных параболических сплайнов. Все они были реализованы с использованием пакета Wolfram Mathematica 10.0.