МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Экстремальные задачи в классе функций Базилевича

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Родионовой Наталии Викторовны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.,доцент ______________________ Е.В. Разумовская
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Бакалаврская работа посвящена решению экстремальных задач в известном подклассе однолистных функций — функций класса Базилевича.

В геометрической теории функций, одним из главных направлений исследований является постановка и решение различных экстремальных задач. При этом значительное место отводится изучению однолистных аналитических функций. В частности, большую роль играют задачи, в которых, исходя из условия однолистности аналитической функции, требуется получить количественные оценки некоторых величин, связанных с этой функцией: оценки модуля функции, модуля и аргумента ее производной, модулей коэффициентов и т.п.

Цель работы: применение метода мажорантной области к описанию систем функционалов на подкласс однолистных функций.

Задачи, поставленные в работе:

а) рассмотреть интегральное представление функций класса Базилевича;

б) описать решение первой задачи Гронуолла на классе функций Базилевича;

в) провести численный эксперимент по описанию области действия функционала.

Бакалаврская работа состоит из двух разделов. Первый раздел разбит на 2 части: в первой части рассматривается случай интегрируемости в квадратурах уравнения Лёвнера-Куфарева;а во второй- обобщение одной интегральной формулы подкласса однолистных функций. Во втором разделе рассмотрена оценка модуля функции в зависимости от второго Тейлоровского коэффициента. Приведенные исследования, опираются на метод мажорантной области, предложенных в работах М.Финкельштейна, Д.В. Прохорова, Я. Шиналя.Находится связь между коэффицинтами функций класса Базилевича и функциями класса Каратеодори. Этот раздел опирается на статью Разумовской Е.В.

Основное содержание работы. Ознакомимся с первым разделом. Обозначим через S — класс всех регулярных и однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. Класс S — главный объект исследований в геометрической теории функций комплексного переменного. Пусть $C_{[a;b]}$ множество, состоящее из однопараметрических семейств

$p(z;t), a \leq t \leq b$, функций класса C, где C — класс Каратеодори функций $p(z)$, регулярных в E с разложением

$$p(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2p_k z^k$$

с условием $Rep(z) > 0$. Для каждой функции $f(z) \in S$ существует однопараметрическое семейство $p(z,t)$ из множества $C_{[0;\infty]}$ такое, что решение $w = f(z,t)$ задачи Коши для дифференциального уравнения Левнера-Куфарева

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w,t),$$

$$w|_{t=0} = z,$$

представляет $f(z)$ по формуле

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t f(z,t).$$

Куфаревым был проведен ряд исследований свойств интегралов этого уравнения, доказана их однолистность. А Гутлянский В.Я. доказал, что уравнение Левнера-Куфарева пораждает множество всех однолистных функций, тем самым получив исчерпывающий результат в данном направлении исследования.

И.Е. Базилевич, проинтегрировав частный вид уравнения Левнера-Куфарева, получив интегральное представление подкласса однолистных функций B_α, где $\alpha \geq 0$. Если $f \in B_\alpha$,то

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t w(z,t),$$

где $w(z,t)$ — решение дифференциального уравнения Левнера-Куфарева:

$$\frac{dw(z,t)}{dt} = -\frac{w(z,t)}{e^{-\alpha t}p_1(w) + (1 - e^{-\alpha t}p_0(w),}$$

$$w(z,0) = z,$$

где $p_0(w), p_1(w)$ являются функциями класса Каратеодори (C) с разложением в единичном круге E

$$p_0(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k w^k,$$

$$p_1(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\beta_k w^k,$$

удовлетворяющие в E условию $Rep_0(w) > 0, p_1(w) > 0$.

Справедлива следующая теорема, которая принадлежит Базилевичу И.Е:

Теорема 1. *Если функция p_0, p_1 регулярны в круге $|z| < 1$ и имеют в нем положительные действительные части, то функция*

$$f(z) = \Big[\alpha \int_0^z p_1(s) s^{\alpha-1} exp\Big(\alpha \int_0^s \frac{p_0(t)-1}{t} dt\Big) ds\Big]^{\frac{1}{\alpha}}$$

однолистна в круге, если под $f(z)$ понимать ту ветвь многозначной функции, которая имеет разложение

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, |z| < 1.$$

Класс B_α содержит ряд полклассов, который представляют самостоятельный интерес. В частности, при $p_1(z) = 1, p_0(z) \in C$ имеем

$$\frac{dw(z,t)}{dt} = -\frac{w(z,t)}{e^{-\alpha t} + (1 - e^{-\alpha t} p_0(w),}$$

$$w(z,0) = z.$$

Следующая формула дает нам интегральное представление подкласса S^0 всех выпуклых функций класса S:

$$f(z) = \Big[\alpha \int_0^z s^{\alpha-1} exp\Big(\alpha \int_0^s \frac{p_0(t)-1}{t} dt\Big) ds\Big]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Во втором разделе Рассмотрим решение задачи об оценке $|f(z)|$ в зависимости от $|a_2|$ на классе функций Базилевича B_α. Эта задача носит название первой задачи Гроноулла.

Как было рассмотрено в разделе 1, если $f \in B_\alpha$, то

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t w(z,t)$$

$$\frac{dw(z,t)}{dt} = -\frac{w(z,t)}{e^{-\alpha t}p_1(w) + (1-e^{-\alpha t})p_0(w)}, \tag{26}$$
$$w(z,0) = z,$$

где $p_0(w), p_1(w)$-функция класса Каратеодори (C) с разложением в единичном круге

$$p_0(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k w^k,$$

$$p_1(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\beta_k w^k,$$

удовлетворяющие в нем условию $Rp_0(w) > 0, Rp_1(w) > 0.$

Оператор

$$P_{d_1}[q](w) = \frac{1+\bar{d}_1 + w(1+d_1)q(w) + 1 - \bar{d}_1 + w(d_1-1)}{1+\bar{d}_1 - w(1+d_1)q(w) + 1 - \bar{d}_1 + w(d_1-1)} =$$
$$= \frac{\frac{\bar{d}_1\frac{q-1}{q+1}+1}{d_1\frac{q-1}{q+1}} + w}{\frac{\bar{d}_1\frac{q-1}{q+1}+1}{d_1\frac{q-1}{q+1}} - w} = \frac{k+w}{k-w}, \tag{27}$$

где $q(w) \in C$, однозначно отображает класс C на классе $C(d_1)$ функцией $f \in C$ с фиксированным коэффициентом d_1. Функция $\xi = \frac{k+w}{k-w}, (|k| > r)$ отображает круг $E_r = \{w : |w| \leq r\}$ на круг

$$\left|\xi - \frac{|k|^2+r^2}{|k|^2-r^2}\right| \leq \frac{2|k|r}{|k|^2-r^2}, \tag{28}$$

который расширяется с уменьшением $|k|$. Образ круга E_r при отображении функциями класса C содержится в круге

$$D_r = \Big\{ I : \Big| I - \frac{1+r^2}{1-r^2} \Big| \leq \frac{2r}{1-r^2} \Big\}, \tag{29}$$

Функция $k = \frac{\bar{d}_1 \frac{q-1}{q+1} + 1}{d_1 \frac{q-1}{q+1}}$ отображает круг D_r на круг

$$\Big| k - \frac{|d_1|^2(1-r^2)}{|d_1|^2 - r^2} \Big| \leq \frac{1 - |d_1|^2 r}{|d_1|^- r^2} \tag{30}$$

И поэтому в круге D_r

$$|k|_{\min} = \frac{r|d_1| + 1}{|d_1| + r} \tag{31}$$

Применим оператор P_d функциям $p_0(w), p_1(w)$, зафиксировав коэффициенты γ_1 и β_1 на классе функций C

$$|k_1| = |k| \min_{d_1 = \beta_1} = \frac{r|\beta_1| + 1}{|\beta_1| + r,} \tag{32}$$

$$|k_2| = |k| \min_{d_1 = \gamma_1} = \frac{r|\gamma_1| + 1}{|\gamma_1| + r.} \tag{33}$$

Функция

$$g(w) = e^{-\alpha t} P_{\beta_1}[p](w) + (1 - e^{-\alpha t}) P_{\gamma_1}[p](w)$$

отображает круг $E_r = \{w : |w| \leq r\}$ на круг

$$\Big| g - (e^{-\alpha t}) \frac{|k_1|^2 + r^2}{|k_1|^2 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{|k_2|^2 + r^2}{|k_2|^2 - r^2} \Big| \leq \Big(e^{-\alpha t} \frac{2|k_1| r}{|k_1|^2 - r^2} + (1 - e^{-\alpha t}) \frac{2|k_2| r}{|k_2|^2 - r^2} \Big)$$

И, значит, с учетом (31)

$$T_1 \leq Reg(w) \leq T_2. \tag{34}$$

Используя равенства (32),(33) получим выражения для T_1 и T_2:

$$T_2 = e^{-\alpha t}\frac{1+2r|\beta_1|+r^2}{1-r^2} + (1-e^{-\alpha t})\frac{1+2r|\gamma_1|+r^2}{1-r^2} \tag{35}$$

$$T_1 = e^{-\alpha t}\frac{1-r^2}{1+2r|\beta_1|+r^2} + (1-e^{-\alpha t})\frac{1-r^2}{1+2r|\gamma_1|+r^2}. \tag{36}$$

Из (26),(34) получаем неравенство

$$-\frac{1}{T_1} \le \frac{d\log|w|}{dt} \le \frac{1}{T_2}, \tag{37}$$

интегрирование которого дает

$$J_1 \le |f(z)| \le J_2, \tag{38}$$

где

$$J_1 = \Big[\alpha\int_0^{|z|}\frac{1-s^2}{1+s^2+2s|\beta_1|}s^{\alpha-1}\exp\Big(\alpha\int_0^s\frac{\frac{1-t^2}{1-t^2+2t|\gamma_1|}-1}{t}dt\Big)ds\Big]^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$J_2 = \Big[\alpha\int_0^{|z|}\frac{1+s^2+2s|\beta_1|}{1-s^2}s^{\alpha-1}\exp\Big(\alpha\int_0^s\frac{\frac{1-t^2+2t|\gamma_1|}{1-t^2}-1}{t}dt\Big)ds\Big]^{\frac{1}{\alpha}},$$

Преобразуем правые части выражений, вычисляя внутренние интегралы:

$$J_1 = \Big[\alpha\int_0^{|z|}\frac{(1-s^2)s^{\alpha-1}}{((1+s^2+2s|\beta_1|)(1+s^2+2s|\gamma_1|))^{\alpha}}\Big]^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{39}$$

$$J_2 = \Big[\alpha\int_0^{s}\frac{(1+s^2+2s|\beta_1|)s^{\alpha-1}}{(1-s^2)^{\alpha+1}}\Big(\frac{1+s}{1-s}\Big)^{\alpha|\gamma_1|}ds\Big]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{40}$$

Используя, что коэффициенты a_2, β_1 и γ_1 связаны следующей формулой

$$a_2 = 2\frac{\beta_1+\gamma_1\alpha}{\alpha+1} \tag{41}$$

зафиксируем

$$\frac{a_2(\alpha+1)}{2} = c. \tag{42}$$

Тогда

$$c = \beta_1 + \gamma_1 \alpha. \tag{43}$$

Введем вектор $\overline{x}(x_1, x_2, x_3)$, положив $x_1 = |\gamma_1|, x_2 = \arg\gamma_1, x_3 = \arg\beta_1$. Так как раннее мы считали, без ограничения общности, что $a_2 \geq 0$, ввели параметры x_1, x_2, x_3, теперь выразим через них $|\beta_1|$:

$$|\beta_1| = -x_1\alpha\cos(x_3 - x_2) + \sqrt{c^2 - \alpha^2 x_1^2 \sin^2(x_2 - x_3)}. \tag{44}$$

Подставив (44),(39) получим выражение для J_1:

$$J_1 = \Big[\alpha\int_0^{|z|} \frac{(1-s^2)s^{\alpha-1}}{(1+s^2+2s(x_1\alpha\cos(x_3-x_2)+\sqrt{c^2-\alpha^2x_1^2\sin^2(x_2-x_3)}))}\times$$
$$\times\frac{1}{(1+s^2+2sx_1)^{\alpha})}\Big]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Найдем минимум J_1, для этого вычислим частные производные по x_1, x_2, x_3. Приравняем частные производные к 0, получим критическую точку. Проверим, что в ней выполняется достаточное условие экстремума и подставим ее в исходное выражение, откуда получаем, что

$$J_1 = \frac{|z|}{1+|z|^2+|z||a|}$$

Теперь подставим (44) в (40) и получим выражение для J_2 :

$$J_2 = \Big[\alpha\int_0^{s} \frac{\Big(1+s^2+2s(x_1\alpha\cos(x_3-x_2)+\sqrt{c^2-\alpha^2x_1^2\sin^2(x_2-x_3)}\Big)s^{\alpha-1}}{(1-s^2)^{\alpha+1}}\times$$

$$\times \qquad \Big(\frac{1+s}{1-s}\Big)^{\alpha x_1} ds\Big]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Для нахождения максимума J_2 вычислим частную производную по x_1, x_2, x_3. Приравняем частные производные к 0, тогда решение сводится к системе вида:

$$
\begin{cases}
-\sin(x_3-x_2)\Big(2s+\dfrac{\alpha x_1^2\cos(x_3-x_2)}{\sqrt{c^2-\alpha^2x_1^2\sin^2(x_3-x_2)}}\Big)=0 \\
\ln\Big(\dfrac{1+s}{1-s}\Big)\Big(1+s^2+2s(x_1\alpha\cos(x_3-x_2))+\sqrt{c^2-\alpha^2x_1^2\sin^2(x_3-x_2)}\Big)=0 \quad (45)\\
\cos(x_3-x_2)-\dfrac{\alpha x_1^2\sin^2(x_3-x_2)}{\sqrt{c^2-\alpha^2x_1^2\sin^2(x_3-x_2)}}=0
\end{cases}
$$

Так как $x_3=x_2$, то решение системы (45) сводится к решению уравнения:

$$\ln\Big(\frac{1+s}{1-s}\Big)\Big(1+s^2+2s(x_1\alpha\cos 0)+\sqrt{c^2-\alpha^2x_1^2\sin^2 0}\Big)=0$$

$$\ln\Big(\frac{1+s}{1-s}\Big)(1+s^2+2sx_1\alpha+2cs)=0$$

$$|\beta_1|=\alpha x_1+c \tag{46}$$

Выразим x_1 :

$$x_1=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\frac{1}{\ln\frac{1+s}{1-s}}-(1+s^2)}{2s}-c\right) \tag{47}$$

Теперь подставим (46), (47) в J_2 :

$$J_2=\Big[\alpha\int_0^s\frac{1+s^2+2s(x_1\alpha\cos(x_3-x_2))}{(1-s^2)^{\alpha+1}}+\frac{\sqrt{c^2-\alpha^2x_1^2\sin^2(x_3-x_2)}}{(1-s^2)^{\alpha+1}}\times$$

$$\times\, s^{\alpha-1}\Big(\frac{1+s}{1-s}\Big)^{\alpha x_1}ds\Big]^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$=\left[\alpha\int_0^{|z|}\frac{\left(1+s^2+2s\frac{1}{\alpha}\alpha\left(\frac{\frac{1}{\ln\frac{1+s}{1-s}}-(1+s^2)}{2s}-c\right)+c\right)s^{\alpha-1}}{(1-s^2)^{\alpha+1}}\times\right.$$

$$\left.\times\Big(\frac{1+s}{1-s}\Big)^{\frac{1}{\alpha}\alpha\left(\frac{\frac{1}{\ln\frac{1+s}{1-s}}-(1+s^2)}{2s}-c\right)}ds\right]^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$=\left[\alpha\int_0^{|z|}\frac{(1+2s+s^2-(1+s^2))s^{\alpha-1}}{e(1+s^2)^{\alpha+1}\log\left(\frac{1+s}{1-s}\right)}\times\Big(\frac{1+s}{1-s}\Big)^{1+2a_2+s^2}\right]^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$= \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{2s^\alpha}{e(1-s^2)^{\alpha+1}\log\left(\frac{1+s}{1-s}\right)} \times \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{1+s^2+s|a_2|(\alpha+1)}{2s}} ds\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

Таким образом, полученные результаты можно сформулировать в виде утверждения.

Теорема 7. *Пусть* $f(z) = z + a_2 z^2 + ... \in \beta_\alpha, \alpha \in R, z \in E = \{z : |z| < 1\}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$J_1^* \leq |f(z)| \leq J_2^*,$$

где

$$J_1^* = \frac{|z|}{1+|z|^2+|z||a_2|},$$

$$J_2^* = \left[\alpha \int_0^{|z|} \frac{2s^\alpha}{e(1-s^2)^{\alpha+1}\log\left(\frac{1+s}{1-s}\right)} \times \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{1+s^2+s|a_2|(\alpha+1)}{2s}} ds\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Заключение. В бакалаврской работе была рассмотрена задача Гронуолла для функций класса Базилевича.

Цель работы достигнута и задачи, поставленные в работе решены.

Бакалаврская работа состоит из двух разделов. Первый раздел разбит на 2 части: в первой части рассматривается случай интегрируемости в квадратурах уравнения Лёвнера-Куфарева;а во второй- обобщение одной интегральной формулы подкласса однолистных функций. Во втором разделе рассмотрена оценка модуля функции в зависимости от второго Тейлоровского коэффициента. Приведенные исследования, опираются на метод мажорантной области, предложенных в работах М.Финкельштейна, Д.В. Прохорова, Я. Шиналя.Находится связь между коэффицинтами функций класса Базилевича и функциями класса Каратеодори. Этот раздел опирается на статью Разумовской Е.В.