МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

О некоторых приложениях преобразования Фурье

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Скворцова Артема Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н., доцент ________________ В.Г.Тимофеев
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф-м.наук, профессор ________________ Д.В.Прохоров
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Сигнал может быть определен как функция, переносящая информацию о состоянии или поведении физической системы. Математические сигналы представляются в виде функций одной или более независимых переменных. Независимая переменная в математическом представлении может быть как непрерывной, так и дискретной. Сигналы в непрерывном континууме моментов времени и , следовательно, представляются как функции от непрерывной переменной. Дискретные сигналы определяются в дискретный момент времени и представляются последовательностями чисел.

Дискретные сигналы могут появляться при получении выборок из аналоговых сигналов или же могут порождаться непосредственно некоторым дискретным во времени процессом. Вне зависимости от происхождения дискретных сигналов цифровые системы обработки таких сигналов обладают рядом полезных качеств. Они могут быть реализованы с большой гибкостью на универсальных цифровых вычислительных машинах или с помощью цифровой аппаратуры.

Важным разделом для изучения сигналов является цифровая обработка. Под ней подразумеваются способы обработки сигналов на основе численных методов с использованием цифровой вычислительной техники. Сущность цифровой обработки сигналов состоит в том, что физический сигнал преобразуется в последовательность чисел, которая затем подвергается математическим преобразованиям в вычислительном устройстве.

В первой главе рассмотрим основные понятия, связанные с различными видами сигналов и более подробно рассмотрим дискретные сигналы. Вторую главу посвятим Дискретному преобразованию Фурье(ДПФ) - разновидность преобразования Фурье, специально предназначенную для работы с дискретными сигналами. В третьей главе поговорим о дискретизации сигналов. Рассмотри различные свойства и методы. В четвертой главе обсудим теорему Котельникова, которая даст ответ на вопрос, какой частоты дискретизации достаточно для того, чтобы не произошло потери информации, т.е. чтобы по дискретизованному сигналу можно было восстановить исходный.

Основное содержание работы.Изучим основные виды сигналов и их область применения.

Определение 1.1.1 Сигнал – это функция. В зависимости от того известен нам сигнал точно или нет, различают два вида: детерминированные и случайные сигналы.

Определение 1.1.2 Детерминированный сигнал полностью известен – его значение в любой момент времени можно определить точно.

Определение 1.1.3 Случайный сигнал в любой момент времени представляет собой случайную величину, которая принимает конкретные значения с некоторой вероятностью.

Определение 1.1.4 Сигналы с интегрируемым квадратом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,dt < \infty,$$

Определение 1.1.5 Периодичные сигналы с периодом T:

$$s(t) = s(t + nT),$$

где n – произвольное целое число

Величина, обратная периоду, называется частотой повторения сигнала: $f = \dfrac{1}{T}$. Также часто используется понятие круговой частоты $\omega = 2\pi f$ измеряемая в радианах в секунду.

Определение 1.1.6 Существует класс сигналов конечной длительности, которые являются аналогом финитной функции, т.е. они отличны от нуля только на ограниченном промежутке времени.

Определение 1.2.1 В технике обработки сигналов играют важную роль гармонические колебания, которые выглядят следующим образом:

$s(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Гармонический сигнал полностью определяется тремя числовыми параметрами: амплитудой A, частотой ω и начальной фазой ϕ. Он является одним из тестовых сигналов, применяющихся для анализа характеристических цепей.

Кроме него к тестовым сигналам относятся еще две очень важные функции: дельта-функция и функция единичного скачка.

Дельта-функция $\delta(t)$, или функция Дирака, представляет собой бесконечно узкий импульс с бесконечной амплитудой, расположенный при нулевом значении аргумента функции. "Площадь"импульса тем не менее равна единице:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Разумеется, сигнал в виде дельта-функции невозможно реализовать физически, однако эта функция очень важна теоретического анализа сигналов и систем.

На графиках дельта-функция обычно изображается жирной стрелкой, высота которой пропорциональна множителю, стоящему перед дельта-функцией.

Одно из важнейших свойств дельта-функции – фильтрующее свойство. Оно состоит в том, что если дельта-функция присутствует под интегралом в качестве множителя, то результат интегрирования будет равен значению остального подынтегрального выражения в той точке, где сосредоточен дельта импульс: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$

Функция единичного скачка $\sigma(t)$, она же функция Хевисайда, она же функция включения, равна нулю для отрицательных значений аргумента и единице – для положительных. При нулевом значении аргумента функцию считают либо неопределенной, либо равной $\frac{1}{2}$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Функцию единичного скачка удобно использовать при создании математических выражений для сигналов конечной длительности. Простейшим примером является формирование прямоугольного импульса с амплитудой A и длительностью T:

$s(t) = A(\sigma(t) - \sigma(t - T))$

Вообще, любую кусочно-заданную зависимость можно записать в виде единого математического выражения с помощью функции единичного скачка.

Определение 1.3.1 Аналоговый сигнал описывается непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией $x(t)$, причем и аргумент, и сама функция могут принимать любые значения из некоторого интервала: $a \leq t \leq b$, $x_1(t) \leq x(t) \leq x_2(t)$

К аналоговым сигналам относятся, например, речевые сигналы в телефонии и радиовещании и телевизионные сигналы.

Определение 1.3.2 Дискретные сигналы описывается решетчатой функцией (последовательностью, временным рядом) $x(nT)$, которая может принимать любые значения в некотором интервале $x_1 \leq x \leq x_2$, в то время как независимая переменная n принимает лишь дискретные значения, причем $n = 0, 1 \ldots$; T – интервал дискретизации;

Определение 1.3.3 Цифровой сигнал описывается квантовой решетчатой функцией (квантовой последовательностью, квантовым временным рядом) $x_d(nT)$, т.е. решетчатой функцией, принимающей лишь ряд дискретных значений – уровней квантования $h_1, h_2 \ldots, h_k$, в то время как независимая переменная n принимает значения $n = 0, 1 \ldots$;

Каждый из уровней квантования кодируется кодом, состоящий из двоичных цифр, так что передача или обработка отсчета цифрового кодированного сигнала сводится к операциям над безмерным двоичным кодом.

К цифровым сигналам относятся сигналы, используемые в системах связи с импульсио-кодовой модуляцией.

Определение 1.3.4 Операция дискретизации состоит в том , что по заданному аналоговому сигналу $x_a(t)$ строится дискретный сигнал $x(nT)$, причем $x(nT) = x_a(nT)$

Определение 1.3.5 Операция восстановления состоит в том , что по заданному дискретному сигналу $x(nT)$ строиться аналоговый сигнал $x_a(t)$, $x(nT) \to x_a(t)$

Определение 1.3.6 Операция квантования и кодирования (аналого-цифрового преобразования) состоит в том, что по заданному дискретному сигналу $x(nT)$ строится цифровой кодированный сигнал $x_d(nT)$, $x(nT) \rightarrow x_d(nT)$ так, что $x_d(nT) \approx x(nT)$, $n = 0, 1 \ldots;$

Определение 1.3.7 Операция цифро-аналогового преобразования состоит в том, что по заданному цифровому кодированному сигналу $x_d(nT)$ строят дискретный сигнал $x_d(nT)$, $x(nT) \rightarrow x(nT)$ так, что $x(nT) = x_d(nT)$

Когда последовательность имеет конечную длительность, т.е. имеет только конечное число ненулевых значений, можно разработать другой вид преобразования Фурье, называемое дискретным преобразованием Фурье (ДПФ). ДПФ есть преобразование Фурье последовательности конечной длины, являющейся само по себе также последовательностью, а не непрерывной функцией, и соответствует равноудаленным по частоте выборкам преобразования Фурье сигнала. Кроме своей теоретической важности, ДПФ играет центральную роль при разработке ряда алгоритмов обработки сигналов вследствие существования эффективного алгоритма вычисления ДПФ.

Рассмотрим периодическую последовательность $x(n)$ с периодом N, т.е. $x(n) = x(n + kN)$ для любого целого значения k. Такие последовательности не могут быть представлены в виде $z-$преобразованием, так как не существует ни одного значения z, для которой сходилось бы $z-$преобразование такой последовательности. Однако можно представить $x(n)$ рядом Фурье, т.е. суммой синусоидальных и косинусоидальных последовательностей или , что то же, суммой комплексных экспоненциальных последовательностей с частотами, кратными основной частоте $2\pi/N$ периодической последовательности. В противоположности рядам Фурье непрерывных периодических функций имеется только N различных комплексных экспонент с периодом, равной целой части основного периода N. Это является следствием того, что комплексная экспонента:

$$e_k(n) = e^{i(2\pi/n)nk} \tag{2.1.1}$$

периодична по k с периодом N. Так, $e_0(n) = e_N(n), e_1 = e_{N+1}(n)$ и т.д., и, следовательно, множество N комплексных экспонент (2.1.1) с $k =$

$0, 1, 2, \ldots, N-1$ определяет все различные комплексные экспоненты с частотами, кратными $2\pi/N$. Поэтому представление периодической последовательности $x(n)$ в виде ряда Фурье содержит только N этих комплексных экспонент и, следовательно, имеет вид

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{i(2\pi/N)nk} \tag{2.1.2}$$

Множитель $1/N$ введен для удобства и, конечно, не влияет на характер представления. Чтобы получить коэффициенты $X(k)$, воспользуемся тем, что

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(2\pi/N)nr} = \begin{cases} 1, & r = mN \\ 0, & r \neq mN \end{cases} \tag{2.1.3}$$

где m - целое число.

Поэтому, умножая обе части (2.1.2) на $e^{-i(2\pi/N)nr}$ и суммируя от $n=0$ до $n = N-1$, получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i(2\pi/N)nr} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{i(2\pi/N)(k-r)n})$$

или, меняя порядок суммирования в правой части этого выражения, получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i(2\pi/N)nr} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i(2\pi/N)(k-r)n})$$

Учитывая (2.1.3),

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(2\pi/N)nr} = X(r)$$

Таким образом, коэффициенты $X(k)$ в (2.1.2) получаются из соотношения:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i(2\pi/N)nr} \tag{2.1.4}$$

Отмечу, что последовательность $X(k)$, даваемая выражением (2.1.4), периодична с периодом N, т.е. $X(0) = X(N), X(1) = X(N+1)$ и т.д. Это соответствует тому , что комплексные экспоненты (2.1.1) различны только при $k = 0, 1, \ldots, N-1$ и поэтому может быть только N различных коэффициентов в ряде Фурье периодической последовательности.

Коэффициенты ряда Фурье можно рассматривать как последовательность конечной длины, определяемую (2.1.4) для $k = 0, \ldots, N-1$ и равную нулю при других k, или как периодическую последовательность, определяемую для всех k выражением (2.1.4). Ясно, что оба определения эквивалентны. Обычно более удобно рассматривать коэффициенты ряда Фурье $X(k)$ как периодическую последовательность. В этом отношении существует дуальность между временной и частотной областями представления периодических последовательностей рядами Фурье. Выражения (2.1.2) и (2.1.4) могут рассматриваться как пара преобразований и будут называться в дальнейшем представлением периодической последовательности дискретным рядом Фурье(ДРФ).

Для удобства записи введем обозначение $W_N = e^{-i(2\pi/N)}$. Тогда ДРФ пары представляются в виде:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \tag{2.1.5}$$

$$x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \tag{2.1.6}$$

где как $X(k)$, так и $x(n)$ - периодические последовательности.

Удобно интерпретировать $X(k)$ как равноудаленные по углу выборки z-преобразования одного периода $x(n)$, взятые на единичной окружности. Чтобы получить это соотношение, положим, что $x^*(n)$ представляет собой один период $x(n)$, т.е. $x^*(n) = x(n)$ при $0 \le n \le N-1$ и $x(n) = 0$ при других n. Тогда $X(z)$, являющееся z-преобразованием $x(n)$, выражается формулой

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$, или так как $x(n) = 0$ вне промежутка $0 \leq n \leq N-1$, то

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \tag{2.1.7}$$

Сравнивая (2.1.5) и (2.1.7), мы видим, что $X(z)$ и $X(k)$ связаны соотношением:

$$X(k) = X(z) \tag{2.1.8}$$

где $z = e^{i(2\pi/N)k} = W_N^{-k}$

Это соответствует взятию выборки z - преобразования $X(z)$ в N равноудаленных по углу точках на единичной окружности, причем первая выборка берется при $z = 1$.

Теперь рассмотрим основные свойства преобразования Фурье.

Линейность: Если две периодические последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ с периодом, равным N, объединяются так, что $x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, то коэффициенты ДРФ представления $x_3(n)$ определяются как

$$X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k) \tag{2.2.1}$$

где все последовательности периодичны с периодом N

Сдвиг последовательности: Если периодическая последовательность $x(n)$ имеет коэффициенты Фурье $X(k)$, то легко показать, что сдвинутая последовательность $x(n+m)$ имеет коэффициенты $W_N^{-km}X(k)$. Любой сдвиг, превышающий период(т.е. $m \geq N$), нельзя отличить во временной области от меньшего сдвига $m' = m$ по модулю N.

Вследствие того, что коэффициенты Фурье периодической последовательности представляют периодическую последовательность, аналогичные результаты справедливы для сдвига коэффициентов Фурье. А именно, значения периодической последовательности $X(k+1)$ являются коэффициентами Фурье последовательности $W_N^{nl}x(n)$, где l - целое число.

Симметрия: Если у комплексной последовательности $x(n)$ коэффициенты Фурье равны $X(k)$, то у последовательности $x*(n)$ эту коэффициенты будут равны $X*(-k)$, а у $x*(-n)$ равны $X*(k)$. Из этого следует то, что ДРФ для $Re(x(n))$ является $X_{even}(k)$ – сопряженно-симметричная часть $X(k)$, а ДРФ для $Im(x(n))$ является $X_{uneven}(k)$ – сопряженно-антисимметричная часть $X(k)$. Кроме того, ДРФ для $x_{even}(n)$ есть $Re(X(k))$, а ДРФ для $x_{uneven}(n)$ есть $Im(X(k))$. Из этого следует, что для действительной последовательности $x(n)$, $Re(X(k))$ – четная последовательность , а $Im(X(k))$ – нечетная последовательность, а также амплитуда $X(k)$ – четная последовательность , а фаза –нечетная. К тому же для действительной последовательности $Re(X(k))$ является представлением для $x_{even}(n)$, а $Im(X(k))$ является ДРФ представлением для $x_{uneven}(n)$.

Периодическая свертка: Пусть $x_1(n)$ и $x_2(n)$ – две периодические последовательности периода N с дискретными рядами Фурье $X_1(k)$ и $X_2(k)$. Определим последовательность $x_3(n)$, для которой ДРФ равен $X_1(k)X_2(k)$. Чтобы найти это соотношение, нужно отметить, что

$$X_1(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{mk}, \quad X_2(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r) W_N^{rk},$$

Теперь можем получить $X_1(k)X_2(k)$:

$$X_1(k)X_2(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} x_1(m) x_2(r) W_N^{(r+m)k}$$

Тогда

$$x_3(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-nk} X_1(k) X_2(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{r=0}^{N-1} x_2(r) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m-r)} \right)$$

Теперь рассмотрим $x_3(n)$ на промежутке $0 \le n \le N-1$. Заметим, что

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m-r)} = \begin{cases} 1, & r = (n-m) + lN \\ 0, & r \ne (n-m) + lN \end{cases}$$

где l - любое целое число. В результате получаем

$$x_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m) \tag{2.2.2}$$

Выражение (2.2.2) показывает, что $x_3(n)$ получается путем объединения $x_1(n)$ и $x_2(n)$ способом похожем на свертку. Важно отметить , что в противоположность свертке апериодических последовательностей последовательности $x_1(m)$ и $x_2(n-m)$ из (2.2.2), периодичны по m с периодом N и, следовательно, периодичны их произведения.

Суммирование производиться только по одному периоду. Этот тип свертки называется периодической сверткой. Изменением индекса суммирования в (2.2.2) можно показать, что

$$x_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1(n-m) \tag{2.2.3}$$

При этом тип свертки, когда один период выходит из интервала, на котором вычисляется свертка, следующий период входит в него.

Если поменять ролями время и частоту, получим почти идентичный результат, т.е. периодическая последовательность $x_3(n) = x_1(n)x_2(n)$, где $x_1(n)$ и $x_2(n)$ – периодические последовательности периода N, имеет коэффициенты Фурье, определяемые формулой

$$X_3(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2(k-l) \tag{2.2.4}$$

Справедлива следующая теорема: [1]

Теорема 4.0.1 Непрерывный сигнал $s(t)$, ограниченный по спектру частотой ω_B, полностью определяется совокупностью мгновенных значений $s(t_k)$ в моменты времени $t_k = k\Delta t$, отстоящие друг от друга на интервал времени

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_B} \tag{4.0.1}$$

[1]Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. — 3-е изд. — СПб.:БХВ-Петербург, 2011. — 768 с.

Заключение. В представленной работе был рассмотрен ряд основных определений, относящихся к дискретным сигналам и рассмотрена представления по Фурье последовательностей конечной длины, названные дискретным преобразованием Фурье. Это представление было основано на связи между последовательностями конечной длины и периодическими последовательностями.

Данная тема является достаточно актуальной, так как дискретное преобразование Фурье широко применяется в алгоритмах цифровой обработки сигналов (его модификации применяются в сжатии звука в MP3, сжатии изображений в JPEG и др.), а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале.