МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Коэффициентная оценка гармонических отображений круга

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета
Шаровой Ольги Сергеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н., М.А.Осипцев
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф-м.наук, профессор Д.В.Прохоров
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Объектом исследования в данной работе являются гармонические отображения на плоскости являющиеся однолистными комплексными гармоническими функциями, чьи действительная и мнимая части не обязательно сопряжены, экстремальные свойства гармонических и локально-квазиконформных отображений в плоскости комплексного переменного. Основы теории гармонических отображений были заложены в начале XX века в работах Т. Радо, Х. Кнезера и Г. Шоке . Повышение интереса к классам однолистных гармонических функций произошло после известной работы Дж. Клуни и Т. Шейл-Смолла, и обусловлено, во-первых, родством задач теории гармонических отображений с классической проблематикой конформных отображений, а, во-вторых, существенными отличиями и своеобразием свойств гармонических функций и используемых для их анализа методов. Отдельным фактором, стимулирующим развитие теории гармонических отображений, следует считать успешное доказательство Л. де Бранжемв 1984 г. известной гипотезы Л. Бибербаха об оценке коэффициентов нормированных однолистных конформных отображений. В дальнейшем проблематике однолистных гармонических отображений был посвящен ряд работ Т. Шейл-Смолла, Дж. Бшути, У. Хенгартнера, П. Дюрена, Ю. Йоста, Э. Шауброк, М. Дорфа, а также российских математиков, таких как В.В. Старков, В.Г. Шеретов, Д.В. Прохоров, С.Ю. Граф. Следует отметить, что ряд классических проблем теории гармонических отображений (таких как оценка коэффициентов, теорема существования и единственности гармонического отображения с заданной дилатацией) на сегодняшний день остаются нерешенными. В настоящее время гармонические отображения превратились в важный инструмент для решения широкого спектра задач как комплексного, так и действительного анализа, геометрии, комплексно-аналитической и теоретической физики. Теория гармонических отображений также применяется в задачах динамики жидких кристаллов и теории минимальных поверхностей. По сей день развитие теории гармонических отображений активно продолжается, о чем свидетельствуют новые интересные результаты и задачи, возникающие в этой области . Изучение комплексных гармонических однолистных функции, чьи действительная и мнимая части не обязательно сопряжены. Разработать вариационный метод решения экстремальных задач проблемы над семейством гармонических отображений D на Δ. Эти отображения представлены как интегралы Пуассона монотонной границы функции. Таким образом, экстремальные задачи для такого семейства можно рассматривать, построив подходящее изменение граничной функции. Мы будем использовать вариационный метод Г.М.Голузина, разработанный Дж. А. Пфальцграфом и Б.Пинчуком.

Работа состоит из двух разделов. В первом разделе вводятся гармонические отображения выпуклых областей, рассматриваются основные свойства гармонических отображений, доказывается, что гармонические отображения удовлетворяют уравнению Бельтрами второго типа, приводится каноническое представление гармонических отображений как сумма аналитической и сопряжённой к аналитической функций.

Во втором разделе строятся граничные вариации интеграла Пуассона. На основе построенных вариаций получены необходимые условия экстремума линейного функционала на замыкании семейства гармонических однолистных отображений выпуклых областей. Получена оценка разности соседних коэффициентов для гармонических отображений однолистных гармонических отображений единичного круга на себя.

В приложении представлен код программы которая строит образ единичной окружности для экстремального отображения теоремы. Программа выполнена с системе Wolfram Mathematica.

Основное содержание работы. Вещественнозначная функция $u(x, y)$ является гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Определение 1.1. *Взаимно-однозначные отображения $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ из области D плоскости xy в область S uv-плоскости называется гармоническим отображением, если две координаты функции являются гармоническими.*

Удобно использовать комплексную обозначение $z = x + iy, w = u + iv$ и писать $w = f(z) = u(z) + iv(z)$. Таким образом, комплекснозначная функция $f(z) = u + iv$ называется гармонической в области $D \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда её действительная и мнимая части являются гармоническими в D и однолистными, то есть $f(z_1) \neq f(z_2)$ для всех точек z_1 и z_2 в D при чём $z_1 \neq z_2$. Здесь $\mathbb{C}$ обозначает комплексную плоскость. Комплекснозначная функция $f = u + iv$ является аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$, если есть производная $f'(z)$ в каждой точке $z \in D$.

Теорема 1.1. *Для того, что бы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, что бы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнялись равенства*

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \tag{1}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Равенства (1) *называются условиями Коши-Римана.*

Теорема 1.2. *Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в области D, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ гармоничны в области D.*

Определение 1.2 *Пара функций $(u(x, y), v(x, y))$, которые удовлетворяют уравнениям Коши – Римана (1) называются сопряженной парой, а $v(x, y)$ называется гармонически сопряженным к $u(x, y)$, $u(x, y)$ является гармонически сопряженным к $v(x, y)$.*

Определение 1.3 *Отображение называется конформным в точке z_0, если:*

1) при этом отображении сохраняются углы между любыми двумя кривыми, проходящими через точку z_0;

2) растяжение в точке z_0 не зависит от направления.

Рассмотрим два дифференциальных оператора

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right); \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{3}$$

где $z = x + iy$.

Несложно увидеть, что для комплекснозначной функции $f(z)$ уравнение $\partial f/\partial\bar{z} = 0$- это еще один способ записи уравнений Коши – Римана. Рассмотрим некоторые свойства этих операторов, для этого сформулируем лемму:

Лемма 2.1. *1. Лапласиан $f(z)$ вычисляется по формуле:*

$$4\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) = \Delta f$$

Таким образом, для функций $f(z)$ с непрерывными вторыми частными производными ясно, что $f(z)$ гармонична тогда и только тогда, когда $\partial f/\partial z$ аналитична. Если $f(z)$ аналитична, то $\partial f/\partial z = f'(z)$ (обычная производная).

2.Операторы дифференцирования обладают обычными свойствами дифференцирования, а именно, если $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют всем необходимым требованиям, то

$$\frac{\partial}{\partial z}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right) = g^{-2}\left(g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(f+g) = f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(f-g) = f\frac{\partial g}{\partial z} - g\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Аналогичные свойства выполняются и для $\partial/\partial\bar{z}$.

3.Связь между дифференциальными операторами:

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

4.Запись дифференциала функции через дифференциальные операторы:

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

5.Дифференцирование сложной функции. Если $h(\zeta) = f(g(\zeta))$, то

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\overline{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}},$$

и

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\overline{\frac{\partial g}{\partial \zeta}}.$$

6. Якобиан функции $f = u + iv$ можно выразить как

$$J_f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2.$$

Теорема 2.1. *Пусть $f(z)$ имеет в области D частные производные до второго порядка включительно. Тогда $f(z)$ является гармоническим* *отображением D тогда и только тогда, когда существует аналитическая в D функция $\omega(z)$ такая, что*

$$\overline{f_{\bar{z}}} = \omega(z) f_z. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется уравнением Бельтрами второго типа. А функция $\omega(z)$ – аналитической дилатацией.

Теорема 2.2. *Пусть $f(z)$ - гармоническое отображение односвязной области D. Тогда существуют аналитические в D функции $h(z)$ и $g(z)$ такие, что*

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \tag{5}$$

Напомним классический принцип аргумента для аналитических функций.

Теорема 3.1. *Разность между количеством нулей и полюсов аналитической функции $f(z)$ внутри контура Γ (оба количества подсчитываются с учетом кратностей нулей и полюсов) равна логарифмическому вычету функции относительно этого контура.*

Принцип аргумента для гармонических функций теперь можно сформулировать как обобщение классического результата для аналитических функций.

Теорема 4.1. *Пусть Δ - выпуклая область, ограниченная жордановой кривой . Предположим, что ϕ - гомеоморфизм T на Γ. Тогда гармоническое продолжение*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-(|z|)^2}{|e^{it}-z|^2} \phi(e^{it}) dt, z \in D \tag{6}$$

определяет взаимно однозначное отображение D на Δ .

Теорема 4.2. *Пусть Δ - область, ограниченная жордановой кривой . Предположим, что f - однолистное гармоническое отображение из D*

в Δ, для которого радиальные пределы $\lim_{r\to 1} f(re^{(i\theta)})$ принадлежат для почти всех θ. Тогда существует счетное множество $E \subset T$ такое, что (2) предел $\hat{f}(e^{(i\theta)}) \equiv \lim_{z\to e^{(i\theta)}} f(z)$ существует, является непрерывным и принадлежит Γ для $e^{(i\theta)} \in T \setminus E$,
(3) $\lim_{t\to\theta} \hat{f}(e^{(it)})$ и $\lim_{t\to\theta} \hat{f}(e^{(it)})$ различны и принадлежат Γ для $e^{(i\theta)} \in E$,
(4) множество сгущения f в $e^{(it)} \in E$ является отрезком, с концами в точках $\lim_{t\to\theta-0} \hat{f}(e^{(it)})$ с $\lim_{t\to\theta+0} \hat{f}(e^{(it)})$.

Теорема 4.3. *Пусть f - однолистная гармоническая функция, которая отображает D на строго выпуклую область Δ, ограниченную жордановой кривой Γ. Тогда f имеет непрерывное продолжение к $\bar{D}$, которое определяет слабый гомеоморфизм T на Γ.*

Теорема 4.4. *Пусть Δ - область, ограниченная жордановой кривой Γ. Предположим, что $\phi : T \to \Gamma$ является монотонной граничной функцией, которая принимает по крайней мере три неколлинеарных значения. Тогда гармоническое продолжение* (6) *определяет взаимно однозначное отображение D в Δ со следующим свойством. Существует счетное множество $E \subset T$ такое, что свойства (2), (3) и (4) теоремы 4.2. верны* . Предположим, что Δ - выпуклая область, ограниченная жордановой кривой Γ в конечной комплексной плоскости. Без ограничения общности, для удобства можем предположить, что $0 \in \Delta$. Тогда Γ может быть представлена в следующем виде: $w = R(\theta)e^{(i\theta)}$, $\alpha \leq \theta \leq \alpha + 2\pi$. Таким образом, каждый гомеоморфизм ϕ из T на Γ порождается непрерывной строго монотонной функцией θ из отрезка $[0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ такой, что $\mid \theta(0) - \theta(2\pi - 0) \mid= 2\pi$ и

$$\phi(e^{it}) = R(\theta(t))e^{i\theta(t)} \tag{7}$$

Обозначим через класс $\mathfrak{F}$ класс всех гармонических отображений f, представленных интегралами Пуассона для функций ϕ, построенных с помощью (7), для некоторой непрерывной слева неубывающей функции θ на

$[0, 2\pi)$ такой, что $\theta(2\pi - 0) - \theta(0) \leq 2\pi$. Из теоремы Хелли следует, что $\mathfrak{F}$ является замыканием семейства сохраняющих ориентацию гармонических отображений D на Δ. Мы хотим изучить линейные экстремальные задачи над семейством всех однолистных гармонических отображений D на выпуклую область Δ, ограниченную жордановой кривой Γ. Соответственно, сформулируем экстремальную задачу

$$Re\{L(f)\} \to \max_{f \in \mathfrak{F}}, \tag{8}$$

где L - данный линейный функционал. В терминах представления кривой Γ, запишем структурные формулы

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (|z|)^2}{|e^{it} - z|^2} R(\theta(t)) e^{i\theta(t)} dt \tag{9}$$

и

$$L(f) = \int_0^{2\pi} l(t) R(\theta(t)) e^{i\theta(t)} dt \tag{10}$$

где θ - непрерывная слева функция на $[0, 2\pi)$ с $\theta(2\pi - 0) - \theta(0) \leq 2\pi$. Класс всех таких функций θ обозначаться через K. Функции θ называются круговыми отображениями.

Теорема 6.1. *Пусть Δ - выпуклая область, ограниченная жордановой кривой Γ. Предположим, что $0 \in \Delta$ и что Γ имеет представление $w = R(\theta)e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, где $R(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция. Далее, пусть L – некоторый линейный функционал и функция f максимизирует $Re\{L\}$ над семейством сохраняющих ориентацию гармонических отображений единичного круга на Δ. Пусть θ - круговое отображение, которое порождает f с интегралом Пуассона*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - (|z|)^2}{|e^{it} - z|^2} R(\theta(t)) e^{i\theta(t)} dt,$$

и пусть

$$G(t) = l(t) e^{i\theta(t)} [R'(\theta(t)) + iR(\theta(t))],$$

Тогда

(a) θ является постоянной на любом интервале, где $Re\{G\}$ имеет постоянный знак,

(b) $Re\{G\} = 0$ на любом интервале с конечными точками в точках разрывов функции θ.

Теорема 7.1. *Пусть L - непрерывный линейный функционал, и пусть f - функция максимизирующая $Re\{L\}$ на замыкании семейства всех однолистных сохраняющих ориентацию гармонических отображений единичного круга на себя. Тогда круговое отображение θ , порождающее f, обладает следующими свойствами:*

(a) θ постоянна на любом интервале, где $Im\{le^{i\theta}\}$ имеет постоянный знак.

(б) $Im\{le^{i\theta}\}$ имеет значение ноль на любом интервале, чьи конечные точки точки разрыва θ

Теорема 7.2. *Пусть $f(z)$ однолистное сохраняющее ориентацию гармоническое отображение единичного круга на себя. Тогда коэффициенты с отрицательными индексами удовлетворяют точному неравентсву*

$$\Re e(c_{-n}) \leq \frac{n+1}{\pi n} \sin \frac{\pi}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Неравенство выполняется только для функций, отображающих единичный круг на внутренность правильного $n+1$-угольника вписанного в единичную окружность при ≥ 2. При $n = 1$ экстремальная функция отображает единичный круг на диаметр единичной окружности и не является однолистной. При всех n экстремальная функция порождается круговыми отображениями определёнными следующим образом

$$\theta(t) = t_1 + \frac{2\pi(j-1)}{n+1}$$

при

$$a_1 + \frac{2\pi(j-1)}{n+1} \le t \le a_1 + \frac{2\pi j}{n+1}, \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Где t_1 *и* a_1 *произвольные константы выбранные так, что* $t_1 + na_1 - \frac{\pi}{n+1} = (2p+1)\pi$*, для некоторого целого* p*.*

Теорема 7.3. *Пусть* $f(z)$ *однолистное сохраняющее ориентацию гармоническое отображение единичного круга на себя.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{-\infty}^{-1} c_n \bar{z}^{-n} \tag{11}$$

Тогда имеют место оценки

$$Re(c_{n+1} - c_n) \le \frac{2}{\pi} sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right), \quad n = 2k+1,\ k = 1, 2, 3, ...$$

$$Re(c_{n+1} - c_n) \le \frac{4}{\pi} sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right), \quad n = 2k,\ k = 1, 2, 3, ...$$

В обоих случаях экстремальная функция отображает единичный круг на себя и порождается следующими круговыми отображениями

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi); \\ \frac{2n+1}{2}(t - \pi), & t \in [\pi, \pi + \frac{4\pi}{2n+1}), n = 2k+1, \\ 2\pi, & t \in [\pi + \frac{4\pi}{2n+1}, 2\pi), \end{cases}$$

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi - \frac{2\pi}{2n+1}); \\ \frac{2n+1}{2}t - \frac{2n-1}{2}\pi, & t \in [\pi - \frac{2\pi}{2n+1}, \pi + \frac{2\pi}{2n+1}), n = 2k, \\ 2\pi, & t \in [\pi + \frac{2\pi}{2n+1}, 2\pi), \end{cases}$$

Заключение В результате работы над предложенной темой были рассмотрены следующие задачи:

1. Определены гармонические отображения выпуклых областей.

2. Рассмотрены основные свойства однолистных гармонических отображений, указаны отличия от конформных отображений и на примере принципа аргумента указано наследование ряда свойств конформных отображений.
3. Рассмотрен вариационный метод оценки линейных функционалов на замыкании семейства однолистных гармонических отображений единичного круга, представленных интегралом Пуассона.
4. Получена оценка разности соседних коэффициентов аналитической части гармонического отображения единичного круга на себя.

Исследования проводились, главным образом, методами комплексного анализа и геометрической теории функций.