

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

**Построение обобщенного критерия для многокритериальной
задачи принятия решения**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

АКИМОВА МИХАИЛА ОЛЕГОВИЧА
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор
должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.В. РОЗЕН
инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ.-мат.н., профессор
должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.В. РОЗЕН
инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. Данная работа относится к задачам принятия решений по многим критериям. Исследование задач принятия решений по нескольким критериям появилось в математике сравнительно недавно. Эти задачи имеют важное значение не только в рамках математики, но и для приложений, т.к. задачи принятия решений в предметных областях, как правило, являются многокритериальными.

Целью работы является изучение основных методов анализа многокритериальных задач принятия решения. Эти методы основаны на отношении доминирования по Парето и на построении обобщенного критерия для многокритериальной задачи принятия решений. Работа основана на источниках, указанных в списке литературы.

Основные задачи: изучить понятие Паретовского оптимума, привести примеры его построения, рассмотреть основные способы сокращения Паретовского оптимума, определить понятие обобщенного критерия и дать описание способов построения обобщенного критерия. Составить программу для нахождения оптимальной альтернативы в задаче принятия решения по нескольким критериям.

Основное содержание работы. Математическая модель задачи принятия решения при многих критериях может быть представлена в $\square$ виде $\langle D : f_1, \dots, f_m \rangle$, где D - некоторое множество (множество допустимых альтернатив), f_j - числовая функция, заданная на множестве D при этом $f_j(a)$ есть оценка альтернатив $a \in D$ по j -му критерию ($j = 1, \dots, m$). Такая модель соответствует задаче принятия решения в условиях определенности, в которой множество альтернатив отождествляется с множеством допустимых исходов, а оценочная структура задается вектором $(f_1, \dots, f_m)$. То есть каждой альтернативе $a \in D$ соответствует упорядоченный набор $(f_1(a), \dots, f_m(a))$, называется *векторной оценкой альтернатив a* .

Критерий f_j называется *позитивным*, если принимающий решение стремится к его увеличению, и *негативным* — если к его уменьшению. В многокритериальной ЗПР с позитивными критериями целью принимающего явля-

¹Розен, В.В. Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие./ В.В Розен, Л.В. Бессонов – М.: Университет, 2008 – 401с.

ется получение исхода, имеющего как можно более высокие оценки по каждому критерию.

Пусть ² Y_j - множество значений функции f_j , то есть множество всех оценок по j -му критерию ($j = 1, \dots, m$). Тогда множество $Y = \prod_{j=1}^m Y_j$, состоящее из всевозможных упорядоченных наборов оценок по критериям $1, \dots, m$, называется *множеством векторных оценок*. Любой элемент $y \in Y$ представляет собой вектор: $y = (y_1, \dots, y_m)$, где $y_j \in Y_j$. Для всякого исхода $a \in D$ набор его оценок по всем критериям, то есть набор $(f_1(a), \dots, f_m(a))$ есть векторная оценка исхода a . Векторная оценка исхода содержит в себе полную информацию о ценности (полезности) этого исхода для принимающего решение и сравнение любых двух исходов заменяется сравнением их векторных оценок.

Основное отношение, по которому производится сравнение векторных оценок — это *отношение доминирования по Парето*, которое определяется следующим образом.

Определение 4. Исход $a^* \in D$ называется *Парето-оптимальным* исходом в множестве D , если он не доминируется по Парето никаким другим исходом из множества D (то есть если векторная оценка исхода a^* является *Парето-оптимальной* в множестве векторных оценок $Q = (f_1(a), \dots, f_m(a)) : a \in D$).

Парето-оптимальность исхода a^ означает, что он не может быть улучшен ни по одному из критериев без ухудшения по какому-нибудь другому критерию.*

Для наглядного представления доминирования по Парето и Парето-оптимальности³ рассмотрим случай двух позитивных критериев f_1 и f_2 . Векторные оценки альтернатив представим точками на координатной плоскости (по оси абсцисс откладываем значения критерия f_1 , а по оси ординат — значения критерия f_2). Чтобы проверить что альтернатива является оптимальным можно применить следующий геометрический способ. Строим прямой угол, стороны которого параллельны осям системы координат, а вершины нахо-

²Браверман, Э.М. Математические модели планирования и управления в экономических системах./ Э.М. Браверман — М.: Наука, 1976 - 416с.

³Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория./ М. Интрилигатор — М.: Прогресс, 1975 - 607с.

дятся в данной точке. Любой альтернативы, находящийся внутри данного угла, доминируется по Парето альтернатива, помещенный в вершину угла. Таким образом, некоторая альтернатива является оптимальным по Парето тогда и только тогда, когда в построенный угол не содержит никаких других альтернатив кроме вершин. Случай, когда множество допустимых альтернатив является дискретным (конечным) представлен на рис. 1.1. Здесь Парето-оптимальными являются альтернативы $\{4, 5, 7, 8\}$. Например альтернатива $\{4\}$ на рисунке 1.1, если внутри данного угла нет альтернативного элемента, то точка данная точка является Парето-оптимальной. Общая методика

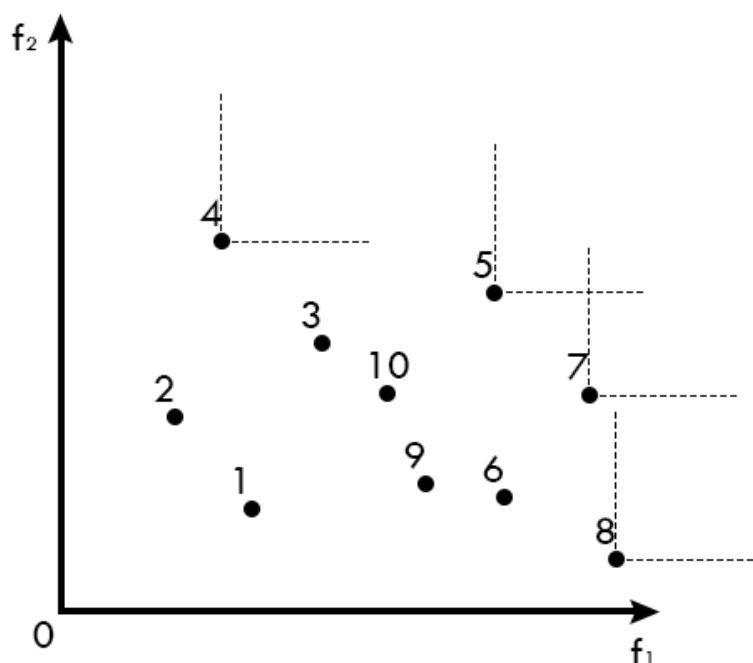


Рисунок 1.1

исследования задач принятия решений на основе математического моделирования, для многокритериальных ЗПР может быть реализована в рамках одного из следующих подходов.

1-й подход. Для заданной многокритериальной ЗПР находится множество ее Парето-оптимальных альтернатив, а выбор конкретной оптимальной альтернативы из множества Парето-оптимальных предоставляется принимающему решение.

2-й подход. Производится сужение множества Парето-оптимальных альтернатив с помощью некоторых формализованных процедур, что облегчает окончательный выбор альтернатив для принимающего решение. Отметим, что такое сужение может быть произведено только при наличии дополнительной информации о критериях или о свойствах оптимального решения.

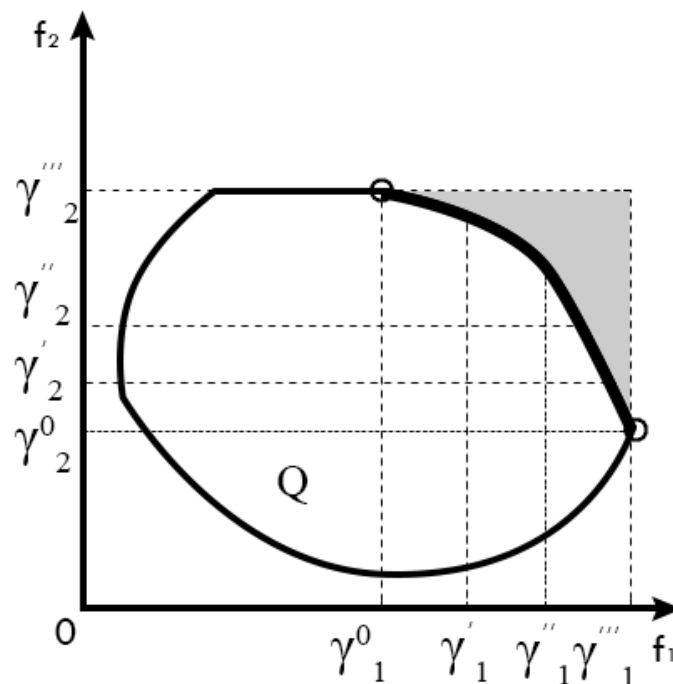


Рисунок 1.5

Рассмотрим указание нижних границ критериев. Число γ_j здесь как нижняя граница по j -му критерию. Отметим, что указание нижних границ по критериям $j = 1, \dots, m$ не может быть "извлечено" из математической модели ЗПР набор нижних границ критериев $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ представляет собой дополнительную информацию, полученную от принимающего решение. При указании нижних границ критериев множество допустимых альтернатив сужается, поэтому оптимальным может считаться только такой Парето-оптимальная альтернатива, для которого оценка по каждому критерию $j = 1, \dots, m$ не ниже назначенной оценки γ_j . Таким образом, происходит сужение Парето-оптимального множества. Ясно, что при увеличении значений

γ_j ($j = 1, \dots, m$)) Парето-оптимальное множество "сокращается". Пример, представленный на рис. 1.5, демонстрирует это обстоятельство для случая 2-критериальной задачи с критериями f_1 и f_2 . В самом деле когда по первому критерию нижняя граница движется вправо, а по второму - вверх, то сокращается область допустимых альтернатив и сокращается Паретовское множество. Если выйти за допустимую область то такая альтернатива не реализуемая.

Субоптимизация производится следующим образом: выделяется один из критериев(ведущий), а по всем остальным критериям назначаются нижние границы. Оптимальным при этом считается альтернативой, максимизирующий ведущий критерий на множестве тех альтернатив, оценки которых по остальным критериям не ниже назначенных. Пусть, например, f_1 — ведущий критерий и γ_j — нижняя граница для j критерия, где $j = 2, \dots, m$. Тогда оптимальным считается та альтернатива $a^* \in D$, на котором достигает максимума функция f_1 , рассматриваемая на множестве $D_1 = \{a \in D : f_j(a) \geq \gamma_j (j = 2, \dots, m)\}$.

Лексикографическая оптимизация основана на упорядочении критериев по их относительной важности. После этого процедура нахождения оптимального решения проводится следующим образом. На первом шаге отбираются те альтернативы, которые имеют максимальную оценку по важнейшему критерию. Если такая альтернатива единственная, то она и считается оптимальной. Если же таких альтернатив несколько, то среди них отбираются те, которые имеют максимальную оценку по следующему за важнейшим критерию и т.д. В результате такой процедуры всегда остается единственной альтернативой — она и будет оптимальной.

Под построением обобщенного критерия в многокритериальной ЗПР понимается такая процедура, которая "синтезирует" набор оценок по заданным критериям (называемым в этом случае частными или локальными критериями), в единую численную оценку, выражающую итоговую полезность этого набора оценок для принимающего решение. Формально обобщенный критерий для ЗПР вида $< D : f_1, \dots, f_m >$ представляет собой функцию $\varphi : Y_1 \times \dots \times Y_m \rightarrow \mathbb{R}$, где y_j — шкала оценок по j -му критерию. Если обобщенный критерий φ построен, то для каждой допустимой альтернати-

вы $a \in D$ может быть найдена численная оценка его полезности (ценности, эффективности): $f(a) = \varphi(f_1(a), \dots, f_m(a))$. Таким образом, задание обобщенного критерия сводит задачу многокритериальной оптимизации к задаче однокритериальной оптимизации с целевой функцией f .

Теорема 5. Пусть $Q \subseteq Y$ — произвольное множество векторных оценок. Если векторная оценка $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ доставляет максимум функции $\varphi(y) = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j$, где все $\alpha_j > 0$, то векторная оценка y^* является Парето-оптимальной в множестве Q .

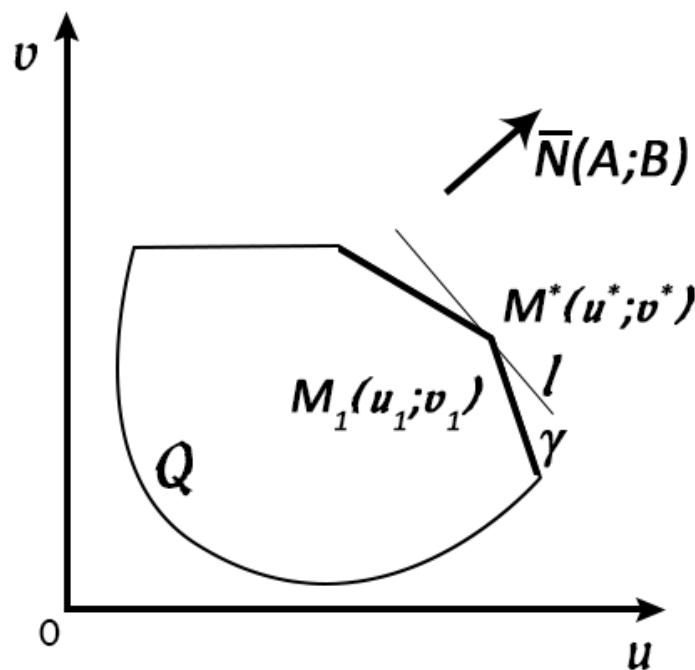


Рисунок 2.1

Рассмотрим теперь в общем виде проблему построения обобщенного критерия для многокритериальных ЗПР. Ограничимся здесь случаем двух критериев, оценки по которым будем обозначать через u и v , соответственно, тогда каждая векторная оценка может быть представлена точкой на координатной плоскости (u, v) . Считаем, что оба критерия являются позитивными, следовательно, целью принимающего решение будет увеличение обоих критериев.

Построение обобщенного критерия представляет собой процедуру, которая "синтезирует" пару оценок (u, v) в единую числовую оценку, формально обобщенный критерий может быть задан в виде отображения $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Какие требования должны быть наложены на это отображение? Основное требование состоит в том, что это отображение должно "сохранять" отношение доминирования по Парето.

Определение 5. Под обобщенным критерием будем понимать отображение $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию:

$$(u_1, v_1) \overset{par}{>} (u_2, v_2) \Rightarrow \varphi(u_1, v_1) > \varphi(u_2, v_2). \quad (2.6)$$

Замечание 8. Иногда рассматривают ослабленный вариант условия (2.6), состоящий в импликации

$$(u_1, v_1) \overset{par}{\geq} (u_2, v_2) \Rightarrow \varphi(u_1, v_1) \geq \varphi(u_2, v_2). \quad (2.7)$$

Например, взвешенная сумма с неотрицательными весовыми коэффициентами удовлетворяет условию (2.7), а с положительными — более сильному условию (2.6). Следующий шаг — введение понятия эквивалентности обобщенных критериев.

Проверка (2.7). Для обобщенного критерия: $\varphi(u, v) = \alpha_1 u + \alpha_2 v$, где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Пусть $(u_1, v_1) \overset{par}{\geq} (u_2, v_2)$, тогда выполняется система:

$$\begin{cases} u_1 \geq u_2 \\ v_1 \geq v_2 \end{cases} \quad (2.8)$$

Умножим первое неравенство на $\alpha_1 \geq 0$, второе на $\alpha_2 \geq 0$ и сложим. Получаем $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 v_1 \geq \alpha_1 u_2 + \alpha_2 v_2$, т.е. $\varphi(u_1, v_1) \geq \varphi(u_2, v_2)$ что и требовалось доказать.

Проверка (2.6). Для обобщенного критерия: $\varphi(u, v) = \alpha_1 u + \alpha_2 v$, где $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Предположим $(u_1, v_1) \overset{par}{>} (u_2, v_2)$. Тогда возьмем одно из нера-

венств например первое, строгое и $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

$$\begin{cases} u_1 > u_2 \\ v_1 \geq v_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

Умножим первое на $\alpha_1 > 0$, второе на $\alpha_2 > 0$.

Получаем $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 v_1 > \alpha_1 u_2 + \alpha_2 v_2$, т.е $\varphi(u_1, v_1) > \varphi(u_2, v_2)$.

Определение 6. *Обобщенные критерии φ_1 и φ_2 называются эквивалентными, если для любых векторных оценок (u_1, v_1) и (u_2, v_2) выполняется равносильность:*

$$\varphi(u_1, v_1) \stackrel{par}{\geq} \varphi(u_2, v_2) \iff \varphi(u_1, v_1) \stackrel{par}{\leq} \varphi(u_2, v_2). \quad (2.10)$$

Например, обобщенные критерии $\varphi_1(u, v) = 2u + 3v$, $\varphi_2(u, v) = 0.4u + 0.6v$, $\varphi_3(u, v) = e^{2u+3v}$ — эквивалентны между собой.

Определение 7. *Положительное число*

$$k = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta v}{\Delta u} \right) \quad (2.11)$$

называется локальным коэффициентом замещения (ЛКЗ) в точке $M(u, v)$.

Замечание 11. *Задание в области Q карты безразличия равносильно заданию ЛКЗ для каждой точки $M \in Q$.*

Сформулируем основную проблему построения обобщенного критерия. Она состоит в том, чтобы указать дополнительную информацию о критериях, которая определяет обобщенный критерий с точностью до эквивалентности.

Предположим, что для многокритериальной ЗПР с областью векторных оценок $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ обобщенный критерий $\varphi(u, v)$ построен, тогда в области Q задается соответствующая ему карта безразличий ее уравнение: $\varphi(u, v) = c$, где c — произвольная постоянная. Если перейти от обобщенного критерия α

к эквивалентному ему обобщенному критерию ψ , тогда в силу 2.10.

$$\varphi(u_1, v_1) = \varphi(u_2, v_2) \iff \psi(u_1, v_1) = \psi(u_2, v_2). \quad (2.12)$$

Откуда сразу следует, что для обобщенных критериев φ и ψ их карты безразличий совпадают.

Теорема 13. *Задание в области векторных оценок Q обобщенного критерия с точностью до эквивалентности - определяет единственным образом в области Q карту безразличий.*

Осталось выяснить, в какой мере карта безразличий определяет обобщенный критерий. Введем для этого необходимое понятие.

Пусть в области $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ задана некоторая карта K , то есть такое семейство кривых, что через каждую точку в области Q проходит точно одна кривая этого семейства. Пусть $\varphi(u, v)$ - обобщенный критерий, заданный в области Q . Отметим, что обобщенный критерий φ *совместим с картой K* , если его карта безразличий в пределах области Q совпадает с картой K . Сформулируем в начале условия, накладываемые на область Q и на карту K .

Будем предполагать, что:

- 1) Область Q является выпуклой;
- 2) Карта K представляет собой однопараметрическое семейство кривых, заданных с помощью уравнения вида $\phi(u, v, c) = 0$, где c - параметр;
- 3) Функция φ является непрерывно дифференцируемой в области Q ;
- 4) В области Q выполнены условия существования неявных функций $c = c(u, v)$ и $v = v(u, c)$;
- 5) Для функции $u(v, c)$ при любом фиксированном c выполнено условие $\frac{dv}{du} < 0$.

При сформулированных предположениях справедливо следующее.

Теорема 14. *Неявная функция $c = c(u, v)$, определяемая уравнением $\phi(u, v, c) = 0$, является обобщенным критерием, совместимым с картой K .*

Заключение. Принципиальная сложность задач выбора при многих критериях заключается в невозможности априорного определения того, что называть наилучшим решением. Каждое лицо, принимающее решение, может вкладывать свой смысл в это понятие.

В данной бакалаврской работе рассмотрены математические модели принятия решения по многим критериям. Их анализ основан на отношении доминирования по Парето или на построении обобщенного критерия. Если за основу анализа взять доминирование по Парето, то для нахождения единственной оптимальной альтернативы требуется дополнительная информация. В данной работе приведены примеры задач принятия решения по многим критериям и способы нахождения в них оптимальных альтернатив. В приложении А приведен пример программы нахождения Парето-оптимальных альтернатив и нахождения оптимального решения.