

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

**Линейные связности на симплектических многообразиях**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,

код и наименование направления

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

АЛЕКСЕЕВА ЯРОСЛАВА СЕРГЕЕВИЧА

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к. физ.-мат. н., доцент

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

С.В. ГАЛАЕВ

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

доктор физ.-мат.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.В. РОЗЕН

инициалы, фамилия

Саратов 2019

**Введение.** Теория линейных связностей занимает важное место в геометрии дифференцируемых многообразий. На римановом многообразии существует каноническая связность с нулевым кручением, называемая связностью Леви-Чивита. На симплектическом многообразии в общем случае вместо одной выделенной связности существует бесконечно много симметрических связностей, совместимых с симплектической структурой. В некоторых специальных случаях удается получить единственную симплектическую связность. К таким случаям, прежде всего, следует отнести случай кэлерова многообразия. Изучению симплектических связностей посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных математиков.<sup>[1]</sup> Почти контактные метрические многообразия имеют много общего с симплектическими многообразиями, однако основное различие весьма существенно: симплектические многообразия всегда имеют четную размерность, а почти контактные метрические многообразия (ПКММ) - нечетную.

Проблема существования специальных связностей на ПКММ в настоящее время является актуальной. Специальные связности почти контактных метрических пространств (в том числе и связности, совместимые с допустимой симплектической структурой) находят применения в теоретической физике, а также в геометрической теории интегрируемых гамильтоновых систем.<sup>[2]</sup>

Целью бакалаврской дипломной работы является определения аналога симплектической связности для многообразия с почти контактной метрической структуры и изучение свойств построенной связности.

Достижение поставленной цели потребовало решения следующих задач:

1. Познакомиться с работами, в которых излагаются основы симплектических многообразий и симплектических связностей;<sup>[3]</sup>

2. Используя работы, исследовать связности Танака-Вебстера и Схоутена-ван Кампена, определяемые на многообразии с почти контактной метриче-

---

<sup>1</sup>(4)Лемлейн В.Г. Тензор кривизны и некоторые типы пространств симметричной почти симплектической связности // ДАН СССР. 1957. Т. 115, №4. С.655-658.// (5)Галаев С.В., Гохман А.В. Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 28-31.// (15)Трофимов В. В. О связностях абсолютного параллелизма на симплектическом многообразии // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 1. С. 191-192.

<sup>2</sup>(2)Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1995.

<sup>3</sup>(7)Галаев С.В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 16-22.

ской структурой:<sup>4</sup>

3. Дать определение  $N$ -продолженной симплектической связности и доказать ее существование;

4. Найти условия, при которых связности Танака-Вебстера и Схоутена-ван Кампена являются  $N$ -продолженными симплектическими связностями.

Дипломная работа состоит из введения, двух разделов и списка литературы.

1)Связности на симплектических многообразиях.

2)Связности на многообразиях с допустимой симплектической структурой.

**Основное содержание работы.** Пусть  $M$  - многообразие класса  $C^\infty$ . Обозначим  $\Gamma TM$  - модуль векторных полей класса  $C^\infty$  на многообразии  $M$  над кольцом гладких функций.

**Определение 1.1.1.** Линейной связностью на многообразии  $M$  является отображение  $\nabla$ , сопоставляющая каждому векторному полю  $X$  некоторое линейное отображение  $\nabla_X : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ , обладающее тем свойством, что для любых функций  $f, g \in C^\infty(M)$ , и любых полей  $X, Y \in \chi(M)$ , имеют место соотношения:<sup>5</sup>

$$1) \nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$$

$$2) \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

Рассмотрим тензорное расслоение  $T_q^p(M) = \cup T_q^p(T_x)$  Имеется естественная проекция  $p : T_q^p(M) \rightarrow M$  такая что  $p(T_q^p(x)) = x, x \in M$ . Известно, что  $T_q^p(M)$  есть дифференциальное многообразие класса  $C^\infty$  и проекция  $p : T_q^p(M) \rightarrow M$  есть дифференциальное отображение.

**Определение 1.1.5.** Тензорным полем типа  $(p, q)$  класса  $C^\infty$  на многообразии  $M$  называется сечение класса  $C^\infty$  расслоения  $p : T_q^p(M) \rightarrow M$ , то есть отображение  $Q : M \rightarrow T_q^p(M)$  класса  $C^\infty$ , которое обладает свойством  $pQ = id_M$ .

**Определение 1.1.6.** Линейной дифференциальной формой на многообразии  $M$  мы будем называть произвольное  $C^\infty(M)$  - линейное отображение  $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  модуля  $\chi(M)$  в алгебру  $C^\infty(M)$  (рассматриваемую как  $C^\infty(M)$  -

<sup>4</sup>(8)Галаев С.В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. Вузов, Математика. - 2014. - к8.-С. 42 - 52.

<sup>5</sup>(19)Борисенко А. А., Ямпольский А. Л., Риманова геометрия расслоений, УМН, 1991, том 46, выпуск 6(282), С. 51-95

модуль). Таким образом, каждая форма  $\omega$  сопоставляет любому векторному полю  $X \in \chi(M)$  некоторую гладкую на функцию  $\omega(X)$ , причем для любой гладкой на функции  $f$  и любых полей  $X, X_1, X_2 \in \chi(M)$  имеют место равенства:

- 1)  $\omega(fX) = f\omega(X)$ ,
- 2)  $\omega(X_1 + X_2) = \omega(X_1) + \omega(X_2)$ .

**Определение 1.1.8.** Тензорным полем типа  $(p, q)$  на многообразии мы будем называть произвольную  $C^\infty(M)$  - линейную по каждому аргументу функцию  $T(\omega_1, \dots, \omega_p, X_1, \dots, X_q)$  от  $p + q$  аргументов, первые  $p$  из которых представляют собой линейные дифференциальные формы  $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Omega^1(M)$ , а последние  $q$  - векторные поля  $X_1, \dots, X_q \in \chi(M)$ .

Множество всех тензорных полей типа  $(p, q)$  на многообразии мы будем обозначать символом  $T_q^p(M)$ . Под определением связности будем понимать ковариантную производную векторного поля.

Симплектическим многообразием называется четномерное многообразие с невырожденной и замкнутой 2-форма.

Пусть  $\nabla$  ковариантная производная на . Будем говорить, что  $\nabla$  сохраняет  $\omega$  если  $\nabla_\omega = 0$  или

$$Z(\omega(X, Y)) = \omega(\nabla_Z X, Y) + \omega(X, \nabla_Z Y) \quad (2)$$

для всех векторных полей  $X, Y, Z$ .

Если  $\nabla$  симметрична и сохраняет данную симплектическую форму  $\omega$ , тогда мы можем говорить, что  $\nabla$  - симплектическая связность.<sup>6</sup>

**Определение 1.2.2.** Федосово многообразие - симплектическое многообразие с данной симплектической связностью.

Пусть - гладкое многообразие нечетной размерности  $n = 2m + 1$ ,  $\Gamma$  - модуль гладких векторных полей на  $M$ . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса  $C^\infty$ . Предположим, что на задана почти контактная метрическая структура  $(\varphi, \xi, \nu, g)$ , где  $\varphi$  - тензор типа  $(1, 1)$ , называемым структурным эндоморфизмом,  $\xi$  и  $\nu$  - вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и

---

<sup>6</sup>(16)Israel Gelfand, Vladimir Retakh, Mikhail Shubin, Fedosov manifolds.- URL:<https://arxiv.org/pdf/dg-ga/9707024v2>.

контактной формой,  $g$  - (псевдо)риманова метрика. Пусть  $D$  - гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\nu$ ,  $D^\perp = \text{Span}(\xi)$  - его оснащение:  $TM = D \oplus D^\perp$ . Если ограничение формы  $\omega = d\nu$  на распределении  $D$  дает невырожденную форму, то в этом случае вектор  $\xi$  однозначно определяется из условий  $\nu(\xi) = 1$ ,  $\ker \omega = \text{Span}(\xi)$  и называется вектором Роба. Будем называть  $D$  распределением почти контактной метрической структуры.

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием.

Тензорное поле  $t$  типа  $(p, q)$ , заданное на почти контактном многообразии, назовем допустимым (к распределению  $D$ ), если  $t$  обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются  $\xi$  или  $\nu$ .

Из определения почти контактной структуры следует, что эндоморфизм  $\varphi$  является допустимым тензорным полем типа  $(1,1)$ . Поле эндоморфизма  $\varphi$ , учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Допустимую замкнутую внешнюю дифференциальную 2-форму максимального ранга будем называть допустимой симплектической 2-формой. Таким образом, в контактном случае форма  $\omega = d\nu$  представляет собой естественный пример допустимой симплектической формы.

**Теорема 2.1.2.** Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:

$$\Gamma_{ab}^{\bar{c}} = \Gamma_{ab}^c, \Gamma_{ab}^{\bar{n}} = \omega_{ba} - C_{ab}, \Gamma_{an}^{\bar{b}} = \Gamma_{na}^{\bar{b}} = C_a^b - \psi_a^b, \Gamma_{na}^{\bar{n}} = \Gamma_{nn}^{\bar{n}} = 0$$

где  $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(e_b g_{cd} + e_c g_{bd} - e_{bc})$ .

Под внутренней линейной связностью на многообразии с почти контактной метрической структурой понимается отображение

$$\nabla : \Gamma D \otimes \Gamma D \rightarrow \Gamma D$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) \nabla_{f_1 X + f_2 Y} &= f_1 \nabla_X + f_2 \nabla_Y \\ 2) \nabla_X f Y &= (X f) Y + f \nabla_X Y \end{aligned}$$

где  $\Gamma D$  - модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения  $\nabla_{e_a} e_b = \Gamma_{ab}^c e_c$ .

Кручение внутренней связности  $S$  по определению полагается равным

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - P[X, Y].$$

Если кручение внутренней связности равно нулю и  $\nabla_g = 0$ , то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Пусть  $\nabla$  - внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением  $HD$ , и  $N : D \rightarrow D$  - поле допустимого тензора типа  $(1, 1)$ .  $N$ -продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении  $(D, \pi, M)$ , определяемую разложением  $TD = \bar{H}D \oplus VD$ , такую, что  $\bar{H}D = HD \oplus \text{Span}(u)$ , где  $u_X = \epsilon - (NX)^v$ ,  $\epsilon = \partial_n$ ,  $X \in D$ ,  $(NX)^v$  - вертикальный лифт. Относительно базиса  $(\epsilon_a, \partial_n, \partial_{n+a})$  поле  $u$  получает следующее координатное представление:  $u = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$ .

Назовем кручение  $N$ -продолженной связности кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для  $N$ -продолженной связности:  $\nabla^N = (\nabla, N)$ , где  $\nabla$  - внутренняя связность.  $N$ -продолженную связность назовем метрической, если  $\nabla$  - внутренняя симметрическая метрическая связность и выполняется равенство  $\nabla_\xi^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N_a^c g_{cb} - N_b^c g_{ac} = 0$ .

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{P[X, Y]} Z - P[Q[X, Y], Z]$$

где  $Q = 1 - P$ , названо Вагнером тензором кривизны Схоутена.

Выражение для тензора кривизны  $N$ -продолженной связности:

$$K(X, Y)Z = 2\omega(X, Y)NZ + R(X, Y)Z \quad (24)$$

$$K(\xi, X)Y = P(X, Y) - (\nabla_X N)Y \quad (25)$$

где  $X, Y, Z \in \Gamma D$ .

Можно показать, что для контактного метрического пространства при  $n > 3$  обращение в нуль тензора кривизны Вагнера эквивалентно выполнению равенств  $R(X, Y)Z = 0, P(X, Y) = 0$ . В более общем случае  $N$ -продолженной

связности имеет место следующая

**Теорема 2.3.1.** Пусть  $M$  - многообразие размерности  $n > 3$ , наделенное контактной метрической структурой, тогда условие  $N = 0$  является необходимым для обращения в нуль тензора кривизны  $N$ -продолженной связности.

**Теорема 2.3.2.** На многообразии с контактной метрической структурой существует  $N$ -продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:

- 1)  $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$  (свойство метричности),
- 2)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X - P[X, Y] = 0$  (отсутствие кручения),
- 3)  $N$ -симметрический оператор, такой, что

$$g(NX, Y) = \frac{1}{2}|_\xi g(X, Y) \quad (26)$$

где  $X, Y, Z \in \Gamma D$  - сечения распределения  $D$ .

**Теорема 2.3.3.** Пусть  $\nabla^N$  - произвольная  $N$ -продолженная связность без кручения. Рассмотрим тензоры  $N_1$  и  $N_2$ , определяемые, соответственно, равенствами

$$\nabla_X^N \omega(Y, Z) = \omega(N_1(X, Y), Z), \nabla_\xi^N \omega(Y, Z) = \omega(N_2 Y, Z) X, Y, Z \in \Gamma D.$$

Тогда, связность  $\nabla^{N_2}$ , определяемая условиями

$$\nabla_X^{N_2} Y = \nabla_X^N Y + \frac{1}{3} N_1(X, Y) + \frac{1}{3} N_1(Y, X) \quad (27)$$

$$\nabla_\xi^{N_2} Y = \nabla_\xi^N Y + \frac{1}{2} N_2 Y, X, Y \in \Gamma D \quad (28)$$

является  $N$ -продолженной симплектической связностью.

Связность Танака-Вебстера  $\nabla^*$  определяется с помощью равенства:

$$\nabla *_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \nu(X) \varphi Y - \nu(Y) \bar{\nabla}_X \xi + (\bar{\nabla}_X \nu)(Y) \xi.$$

Отличными от нуля коэффициентами связности Танака-Вебстера будут

$$\Gamma *_{ab}^c = \bar{\Gamma} *_{ab}^c, \Gamma *_{nb}^a = C_b^a.$$

Таким образом, связность Танака-Вебстера является  $N$ -связностью для эндоморфизма  $N = C$ .

Еще одним примером  $N$ -связности является связность  $\nabla **$  [6] Схоутена ван Кампена:

$$\nabla * *_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \nu(Y) \bar{\nabla}_X \xi + (\bar{\nabla}_X \nu)(Y) \xi.$$

В этом случае мы имеем:

$$\Gamma * *_ab^c = \bar{\Gamma}_{ab}^c, \Gamma * *_nb^a = C_b^a - \varphi_b^a.$$

Изучение связностей, сохраняющих гладкое распределение, мотивировано задачами механики со связями. К введению  $N$ -продолженной связности привели попытки дать инвариантное описание связности, используемой В.Вагнером для построения тензора кривизны неголономного многообразия.

**Заключение.** Симплектическая геометрия - область дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии, изучающая симплектические многообразия: гладкие многообразия с выбранной замкнутой невырожденной 2-формой. Исходно симплектическая геометрия возникла из гамильтонова формализма в классической механике, когда фазовое пространство для классической системы оказывалось симплектическим многообразием.

Симплектическая геометрия имеет как сходства, так и различия с римановой геометрией, изучающей многообразия с выбранной квадратичной положительно определённой формой метрическим тензором, позволяющей определить расстояния на многообразии. В отличие от случая римановой геометрии, на симплектических многообразиях нет локального инварианта, каким в римановом случае является кривизна.