МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Математические модели принятия решений в условиях риска и неопределенности

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

АНИКИНА ПАВЛА КОНСТАНТИНОВИЧА
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ.-мат.н., профессор ________________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. В последние десятилетия в математике появилось новое научное направление — исследование математических моделей принятия решений. Эти модели находят приложение во многих практических областях деятельности: экономике, управлении производством, военном деле, спорте и т. п. При этом для практики важнейшую роль играют модели принятия решения в условиях неопределенности и в условиях риска.

Цель работы.

1. Познакомиться с основными типами математических моделей принятия решений в условиях неопределенности и в условиях риска.

2. Овладеть теоретическими знаниями и получить практические навыки исследования задач принятия решения.

3. Получить опыт применения информационных технологий к задачам принятия решений.

Задачи работы.

1. Изучить литературу, относящуюся к принятию решений в условиях риска. Дать связное изложение основных критериев при принятии решений в условиях неопределенности. Указать их достоинства и недостатки.

2. Изложить основные методы принятия решений в условиях риска с использованием критерия ожидаемого выигрыша и критерия риска отклонения от среднего значения.

3. Привести примеры исследования математических моделей в условиях неопределенности и в условиях риска.

4. Составить программу для нахождения оптимальной альтернативы по критерию Лапласа.

Структура работы. Выпускная квалификационная работа состоит из Введения, двух разделов, Заключения, Списка использованных источников и Приложения. В приложении А приведен результат и код программы на языке C++, с помощью которой решается задача поиска оптимального решения по критерию Лапласа. Общий объем работы составляет 48 стр.

Основное содержание работы. Первая глава посвящена изучению математических моделей принятия решений в условиях неопределенности.

Рассмотрена общая структура математической модели задачи принятия решений. Сформулированы основные типы критериев используемых для задач принятия решения в условиях неопределенности, проиллюстрировано их применение на конкретных примерах, сделан анализ полученных результатов.

Задача принятия решения (ЗПР)[1] содержит две структуры: *реализационную структуру* и *целевую (оценочную) структуру.*

А. Реализационная структура задачи принятия решения состоит из множества допустимых альтернатив X, множества состояний среды Y, множества исходов A и функции реализации $F : X \times Y \longrightarrow A$.

Б. Оценочная структура. В бакалаврской работе рассматривается случай оценочная структура задана в виде оценочной функции $\varphi : A \to \mathbb{R}$. Композиция функции реализации и оценочной функции представляет собой целевую функцию $f = \varphi \circ F$, т.е $f(x, y) = \varphi(F(x, y))$. При этом число $f(x, y)$ указывает полезность (ценность, эффективность) того исхода, который получается в ситуации, когда принимающий решение выбирает альтернативу $x \in X$, а среда принимает состояние $y \in Y$. В случае если оценка исходов выражает затраты, убытки или другие негативные факторы, то функция f называется *функцией потерь.*

Итак, математическая модель ЗПР в условиях неопределенности может быть задана в виде следующей тройки объектов

$$\langle X, Y, f \rangle, \tag{1.1}$$

где X - множество допустимых альтернатив, Y - множество возможных состояний среды, $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ - целевая функция.

Таким образом, построение математической модели принятия решения сводится к заданию целевой функции, определенной на множестве $X \times Y$ и принимающей числовые значения.

Основная сложность при принятии решения в условиях неопределенности заключается в том, что выбирая одну из допустимых альтернатив, принима-

[1]Розен, В. В. Цель — оптимальность — решение / В. В. Розен. — М.: Радио и связь, 1982. — 406 с.

ющий решение не знает текущего состояния среды, в то же время результирующий исход зависит от того, в каком состоянии находится среда.

Говоря формально, целевая функция $f(x, y)$ является функцией двух аргументов x и y, причем принимающий решение должен выбирать значение аргумента $x \in X$, не зная значения аргумента $y \in Y$.

В случае конечных множеств X и Y целевая функция может быть задана табличным способом.
Будем различать элементы этих множеств по номерам, полагая

$$X = \{1, ..., i, ..., n\}, Y = \{1, ..., j, ..., m\}.$$

Положим $f(i, j) = a_i^j$ и будем интерпретировать число a_i^j как выигрыш (доход) принимающего решение в ситуации (i, j). Тогда целевая функция задается в виде таблицы 1.1,

Таблица 1.1

	1	...	j	...	m
1	.				.
...		.		.	
i			a_i^j		
...		.		.	
n	.				.

В таблице на пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит число a_i^j - выигрыш принимающего решение в ситуации, когда он выбирает альтернативу i, а среда принимает состояние j. Данная называется также *матрицей выигрышей* или *платежной матрицей.*

Исследуем вопрос: «Выбор какой альтернативы следует считать оптимальным?»
Для того чтобы выбрать оптимальную альтернативу, необходимо иметь некий способ сравнения двух альтернатив. Наиболее простой и естественный принцип, по которому можно сравнить две альтернативы — это *принцип доминирования.*

Говорят, что *альтернатива* i_1 *доминирует альтернативу* i_2 (записывается $i_1 \geq i_2$), если при любом состоянии среды выигрыш принимающего решение при выборе им альтернативы i_1 будет не меньше, чем его выигрыш при выборе альтернативы i_2 (то есть выполняется $a_{i_1}^j \geq a_{i_2}^j$ при всех $j = \overline{1, m}$). Отбрасывая доминируемые альтернативы, мы получаем ЗПР в условиях неопределенности меньшего размера, т.е с меньшим числом альтернатив. Ясно, что независимо от состояния среды доминирующая альтернатива является не менее предпочтительной для принимающего решение, чем доминируемая альтернатива, поэтому доминируемую альтернативу можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Иными словами принимающий решение (игрок) подходя к игре рационально не будет выбирать доминируемую альтернативу, которая заведомо принесет ему меньший выигрыш, т.к это идет в разрез с целью игрока получить как можно больший выигрыш.

Таким образом, отбрасывая доминируемые альтернативы, мы получаем ЗПР в условиях неопределенности меньшего размера, т.е с меньшим числом альтернатив. Однако в практических ЗПР в условиях неопределенности недоминируемых альтернатив может оказаться достаточно много.

Способ позволяющий найти единственную оптимальную альтернативу ЗПР в условиях неопределенности, заключается в следующем: формулируется некоторая гипотеза о состоянии среды, которая позволяет присвоить каждой альтернативе единую числовую оценку.

Задавая числовую оценку для каждой альтернативы получаем критерий для сравнения альтернатив по предпочтению: лучшей из двух альтернатив считается та, которая имеет большую числовую оценку. Те альтернативы, оценки которых одинаковы будем считать эквивалентными. Оптимальной является та альтернатива, которая имеет наибольшую числовую оценку, то есть является более предпочтительной.

В работе рассмотрены важнейшие типы критериев, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенности.

Критерий Лапласа основан на гипотезе равновозможности (равновероятности) и содержательно может быть сформулирован в виде: «Поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, надо считать их равновероятными». При принятии данной гипотезы в качестве оценки i-ой альтернативы выступает среднеарифметическое выигрышей, стоящих в i-ой строке матрицы выигрышей. Таким образом, оценка по критерию Лапласа имеет вид:

$$L(i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_j^i. \tag{1.2}$$

При введении оценки Лапласа любые две альтернативы будут сравнимыми между собой по предпочтительности и лучшей будет считаться та альтернатива, которая имеет большую оценку по критерию Лапласа. Оптимальной по критерию Лапласа является та альтернатива i^*, которая максимизирует оценку (1.2), т.е

$$L(i^*) = \max_{1\leq i\leq n} L(i).$$

Основной недостаток критерия Лапласа в том, что при нахождении по формуле (1.2) среднего выигрыша может происходить «эффект компенсации» маленьких выигрышей большими, и полученное в результате среднее арифметическое будет весьма слабой характеризацией допустимых альтернатив.

Критерий Вальда основан на гипотезе антагонизма, которая может быть сформулирована в виде: «При выборе решения надо рассчитывать на самый худший возможный вариант». При принятии данной гипотезы оценкой альтернативы i служит число $\underline{W}(i) = \underset{j}{min}\ a_j^i$ сравнение любых двух альтернатив производится по величине критерия $\underline{W}$.

Оптимальной по критерию Вальда является альтернатива, максимизирующая функцию $\underline{W}$, то есть та альтернатива i^* , для которой выполняется равенство:

$$\underline{W}(i^*) = \max_i \underline{W}(i) = \max_i \min_j a_i^j. \tag{1.3}$$

Содержательный смысл принципа максимина заключается в том что: число $\underline{W}(i)$ характеризует гарантированный уровень альтернативы i (так как при выборе альтернативы i выигрыш принимающего решение - независимо от состояния среды - не может быть меньше, чем $\underline{W}(i)$).

Главный недостаток принципа максимина: состоит в том, что при выборе решения фактически учитывается только один - наихудший вариант.

Критерий Гурвица связан с введением показателя $0 \le \alpha \le 1$, называемого *показателем пессимизма*. Гипотеза о поведении среды состоит в этом случае в том, что при любом выборе альтернативы наихудший для принимающего решения вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший - с вероятностью $(1-\alpha)$.

Тогда оценкой альтернативы i является взвешенная сумма

$$H_\alpha(i) = \alpha \min_j a_i^j + (1-\alpha) \max_j a_i^j. \tag{1.5}$$

При $\alpha = 1$ данный критерий превращается в «критерий крайнего пессимизма»(то есть в критерий Вальда), а при $\alpha = 0$ – в «критерий крайнего оптимизма».

Основной недостаток критерия Гурвица: состоит в том, что он учитывает только два исхода - наихудший и наилучший.

Критерий Сэвиджа основан на преобразовании первоначальной матрицы выигрышей a_i^j в матрицу r_i^j - *матрицу сожалений.*
Сожалением при выборе альтернативы i в состоянии j называется число $r_i^j = \beta^j - a_i^j$, где $\beta^j = \max_i a_i^j$.

Содержательно число r_i^j интерпретируется как «мера сожаления», возникающего от незнания истинного состояния среды. Если бы принимающий решение знал истинное состояние среды j, он выбрал бы альтернативу, дающую максимальный возможный выигрыш в состоянии j и получил бы в результате выигрыш $\beta^j = \max\limits_i a_i^j$ вместо полученного им выигрыша a_i^j.

Для критерия Сэвиджа оптимальной считается альтернатива: минимизирующая максимальный риск, то есть здесь используется минимаксный критерий для матрицы сожалений.

Во второй главе рассматриваются математические модели принятия решений в условия риска. Изучение математической модели ЗПР в условиях риска предусматривает, кроме задания функции реализации, задание некоторой дополнительной информации о вероятностях состояний среды.

Наиболее простой для анализа случай - когда эта дополнительная информация представлена в виде вероятностной меры на множестве состояний среды. Если множество состояний среды Y конечно, $Y = \{1, ..., m\}$, то вероятностная мера на нем может быть задана вероятностным вектором

$$y = (y_1, ..., y_m), \sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$

(здесь $y_j \geq 0$, y_j есть вероятность наступления состояния $j = 1, ..., m$). Этот способ задания дополнительной информации о состояниях среды мы и рассматриваем в во второй главе. Считаем, что оценочная структура ЗПР задается в виде оценочной функции.

Предметом нашего изучения будут задачи принятия решений, в которых целевая функция (функция выигрыша) представлена в виде таблицы - матрицы выигрышей $||a_i^j||(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ и принимающему решение (игроку) известен вероятностный вектор $y = (y_1, ..., y_m)$. Такая ЗПР (называемая также «игрой с природой») задается таблицей типа таблицы 2.1.

Таблица 2.1

	Состояние среды				
Альтернатива	y_1 1	... ...	y_j j	... ...	y_m m
1	a_1^1		a_1^j		a_1^m
...					
i	a_i^1		a_i^j		a_i^m
...					
n	a_n^1		a_j^n		a_n^m

Выбирая альтернативу i, игрок знает, что он получит один из выигрышей $a_i^1, ..., a_i^m$ с вероятностями $y_1, ..., y_m$, соответственно.

Следовательно, сравнение двух альтернатив i_1 и i_2 сводится здесь к сравнению соответствующих им случайных величин ξ_{i_1} и ξ_{i_2}. Как известно из теории вероятностей, наиболее естественной числовой характеристикой случайной величины ξ является ее математическое ожидание, обозначаемое через $M\xi$.

Если для ЗПР в условиях риска в качестве критерия для сравнения альтернатив взять математическое ожидание соответствующей случайной величины (короче - ожидаемый выигрыш), то оптимальной следует считать альтернативу, максимизирующую ожидаемый выигрыш.

В литературе по принятию решений чаще всего в качестве критерия оценки альтернатив в ЗПР в условиях риска берется ожидаемый выигрыш. Однако этот критерий не всегда можно рассматривать как адекватный. А именно, критерий ожидаемого выигрыша должен быть дополнен еще одним критерием, который отражает возможность отклонения случайной величины от ее среднего значения.

В теории вероятностей в качестве меры отклонения случайной величины от ее среднего значения (меры «разброса») обычно берется дисперсия $D\xi$ или среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

Формально дисперсия определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее ожидаемого значения:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Таким образом, мы получаем два базовых критерия:
А)Критерий ожидаемого выигрыша,
Б)Критерий отклонения случайной величины от ее среднего значения.

Как известно, для многокритериальной ЗПР основной метод выбора оптимальной альтернативы состоит в выборе одной альтернативы из множества оптимальных по Парето альтернатив.

Возможно также «соединение» указанных двух критериев в единый (обобщенный) критерий. В качестве обобщенного критерия возьмем здесь следующий критерий:

$$q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma, \tag{2.3}$$

где $-\lambda$ некоторая постоянная.

Фактически критерий (2.3) представляет собой взвешенную сумму частных критериев M и σ с весовыми коэффициентами 1 и $(-\lambda)$.Содержательный смысл обобщенного критерия (2.3) при $\lambda > 0$ состоит в том, что увеличение критерия q может происходить как за счет увеличения M, так и за счет уменьшения σ.

В многокритериальной ЗПР основная проблема при определении оптимальной альтернативы состоит в выборе одной альтернативы из множества оптимальных по Парето альтернатив.

Рассмотрим нахождение оптимальной альтернативы в ЗПР в условиях риска по двум указанным критериям. Пусть (a_i) - множество альтернатив, каждая из которых характеризуется парой показателей (M_i, σ_i). Представив рассматриваемые альтернативы точками на координатной плоскости (M, σ) получим график, из которого находим Парето оптимальное множество.
Окончательный выбор оптимальной альтернативы должен производиться из полученного множества. Если Парето оптимальные альтернативы не сравнимы по Парето, то для каждой пары из них вычисляются следующие величины

$$\frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}, i = \{1 \dots n\}.$$

Среди всех этих величин находятся наибольшая и наименьшая:

$$\lambda^0 = min\frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}, \lambda^* = max\frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}}.$$

Далее фиксируем λ в интервале $\lambda^0 < \lambda < \lambda^*$ и находим оптимальную альтернативу по следующей методике:
1) нахождение Парето - оптимума с отбрасыванием остальных альтернатив,
2) выбор из Парето - оптимума одной оптимальной альтернативы по максимуму обобщенного критерия.

Заключение. В данной бакалаврской работе изучены математические модели принятия решений условиях неопределенности и риска. Освоена методика выбора метода решения задачи в зависимости от типа и характеристик математической модели. Рассмотрены важнейшие типы критериев, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенности, а именно: критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Гурвица, критерий Сэвиджа. Проведено сравнение этих критериев принятия решений на примере Задачи выбора проекта электростанции.

Во второй главе работы изучены математические модели принятия решений в условиях риска. В работе представлен случай, когда дополнительная информация о состоянии среды представлена в виде вероятностной меры на этом множестве и задана вероятностным вектором. Рассмотрены критерии двух типов: критерий ожидаемого выигрыша и критерий отклонения от среднего выигрыша. Подробно рассмотрена задача двухкритериальной оптимизации и два основных метода решения данной задачи:

(A) нахождение оптимального решения на основе обобщенного критерия,

(B) нахождение оптимального решения на основе отношения доминирования по Парето.

В Приложении А на языке C++ реализована программа для нахождения оптимального решения на основе критерия Критерия Лапласа.