

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

**Эллиптические поверхности Клиффорда в гиперболическом
пространстве положительной кривизны**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ДЕНИСОВОЙ КРИСТИНЫ КОНСТАНТИНОВНЫ
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент
должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

Л.Н. Ромакина
инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ.-мат.н., профессор
должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.В. РОЗЕН
инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. Начиная с построения основ гиперболической геометрии Н. И. Лобачевским, на протяжении двух веков вопросы изучения и дальнейшего развития этой системы вызывают интерес математиков. Ведущим в этом направлении является вопрос вычисления объемов тел в гиперболическом пространстве. Сложность вычисления гиперболических объемов К. Ф. Гаусс характеризовал термином «джунгли». Еще более сложным оказался вопрос вычисления объемов в гиперболическом пространстве $\hat{H}^3$ положительной кривизны, смежном по абсолюту с пространством Лобачевского [Розенфельд Б.А., Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969]. В решении обозначенных задач для каждого конкретного тела пространства $\hat{H}^3$ в целях упрощения вычислений приходится вводить наиболее удобную систему координат. Вычисление объемов некоторых тел удастся значительно упростить, вводя так называемые клиффордовы системы координат — отдаленные аналоги цилиндрических систем координат евклидова пространства. Их изучению и посвящена данная выпускная квалификационная работа.

Основная цель работы — исследовать поверхности Клиффорда эллиптического типа в гиперболическом пространстве $\hat{H}^3$ положительной кривизны. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие задачи.

1. Изучение истории развития неевклидовых геометрий.
2. Знакомство с различными интерпретациями гиперболического пространства положительной кривизны, в частности, с его проективной моделью Кэли–Клейна.
3. Определение основных объектов пространства $\hat{H}^3$ и введение измерений этих объектов.
4. Вывод канонического уравнения эллиптической поверхности Клиффорда пространства $\hat{H}^3$ в присоединенном к ней каноническом репере первого типа и исследование в нем проективных и метрических свойств поверхности.
5. Знакомство с приложениями эллиптической поверхности Клиффорда в геометрии пространства $\hat{H}^3$.
6. Изображение поверхностей Клиффорда пространства $\hat{H}^3$ средствами динамической математической системы GeoGebra.

Бакалаврская работа имеет реферативный характер, она состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 22 наименования и приложения. Во введении сформулированы основные цели работы, описана методика работы, уделено внимание актуальности данной темы. Первый раздел содержит определения основных

объектов пространства $\hat{H}^3$, используемые в работе. В нем введены типы прямых и плоскостей пространства $\hat{H}^3$, типы плоских и двугранных углов, описан канонический репер первого типа этого пространства, и даны основные метрические формулы. Во втором разделе исследованы эллиптические поверхности Клиффорда в каноническом репере первого типа пространства $\hat{H}^3$, доказаны их основные свойства. Показано, что в отличие от аналога этой поверхности в эллиптическом пространстве, в пространстве $\hat{H}^3$ эллиптическая поверхность Клиффорда является овальной поверхностью и поэтому не имеет прямолинейных образующих. Третий раздел посвящен клиффордовым системам координат, в нем предложено описание этих объектов и приведены примеры их применения в задачах вычисления объемов тел пространства $\hat{H}^3$. В приложении представлены изображения поверхностей Клиффорда эллиптического типа, подготовленные с помощью математической динамической системы GeoGebra.

Основное содержание работы

Прямая в пространстве H^3 в зависимости от ее расположения по отношению к абсолюту может быть одного из трех типов. Гиперболические (эллиптические) прямые пересекают абсолютную гиперквадрику в двух вещественных (мнимо сопряженных точках); параболические прямые касаются абсолютной гиперквадрики. Эллиптические прямые пространства H^3 принадлежат полностью пространству $\hat{H}^3$, их называют эллиптическими прямыми пространства $\hat{H}^3$.

Трехмерное гиперболическое пространство $\hat{H}^3$ положительной кривизны рассматриваем в проективной модели Кэли–Клейна на идеальной области пространства Лобачевского L^3 , т.е. на внешней относительно овальной гиперквадрики γ области проективного пространства P_3 . Пространства $\hat{H}^3$ и L^3 в объединении с гиперквадрикой γ образуют расширенное гиперболическое пространство H^3 . Овальную гиперквадрику γ называют абсолютom каждого из пространств $\hat{H}^3$, L^3 и H^3 , а группу G проективных автоморфизмов овальной гиперквадрики γ — фундаментальной группой этих пространств.

В пространстве $\hat{H}^3$ существуют плоскости трех типов: эллиптические, евклидовы и гиперболические плоскости положительной кривизны. Поскольку проективное преобразование не меняет природу объекта, а каждое преобразование фундаментальной группы G пространства $\hat{H}^3$ является автоморфизмом квадрики γ , тип прямой и тип плоскости пространства $\hat{H}^3$ инвариантны относительно действий преобразований из группы G .

Расположение пары прямых по отношению к абсолюту определяет на коевклидовой плоскости четыре типа углов. На плоскости эллиптической все углы одного типа. На гиперболической плоскости положительной кривизны каждый угол может быть отнесен к одному из пятнадцати типов, инвариантных относительно фундаментальной группы этой плоскости. Таким образом, плоские углы пространства $\hat{H}^3$ образуют 20 типов.

Поверхностью Клиффорда эллиптического пространства радиуса кривизны ρ называют множество всех точек этого пространства, расстояние от которых до заданной прямой a , называемой осью поверхности, равно данному числу r , где $r \in (0, \pi\rho/2)$. Клиффорд доказал, что в эллиптическом пространстве введенная поверхность является кольцевой поверхностью, т.е. проективно эквивалентна, например, однополостному гиперболоиду евклидова пространства, и содержит два семейства прямолинейных образующих. В связи с этим через каждую точку эллиптического пространства проходят точно две прямые, состоящие из точек, равноудаленных от заданной прямой, их называют клиффордовыми параллелями данной прямой.

Мы изучаем аналоги поверхностей Клиффорда в пространстве $\hat{H}^3$ [Ромакина Л.Н., Поверхности Клиффорда в гиперболическом пространстве положительной кривизны // Евразийское научное объединение, 2017. Т. 1, № 5(27). С. 30-33]. Поверхность Клиффорда называем эллиптической (гиперболической), если тип измерения ее радиуса r является эллиптическим (гиперболическим). В данной работе мы исследуем только эллиптические поверхности Клиффорда. Доказано, что такие поверхности являются овальными поверхностями, следовательно не содержат прямолинейных образующих.

Исследуем эллиптическую поверхность Клиффорда ω_e пространства $\hat{H}^3$ по ее уравнению

$$x_1^2 + x_2^2 - ctg^2 \frac{r}{\rho} x_3^2 + ctg^2 \frac{r}{\rho} x_4^2 = 0.$$

При допустимых значениях параметра r квадратичная форма из левой части уравнения имеет ранг 4 и сигнатуру 2. Согласно классификации поверхностей второго порядка в проективном пространстве [Ефимов Н.В., Высшая геометрия. М.: Физматлит, 2004] ω_e является овальной поверхностью. Этот результат существенно отличает эллиптическую поверхность Клиффорда пространства $\hat{H}^3$ от ее аналога в эллиптическом пространстве.

Как овальная поверхность эллиптическая поверхность Клиффорда в пространстве $\hat{H}^3$ не имеет прямолинейных образующих. Это означает, что

для прямой каждого типа в пространстве $\hat{H}^3$ параллелей Клиффорда, отличных от поляры данной прямой относительно абсолюта, не существует. Это также существенно разнится с фактом в эллиптической геометрии, поскольку в эллиптическом пространстве через каждую точку проходят точно две параллели Клиффорда для заданной прямой.

При вычислении объемов тел в пространстве $\hat{H}^3$ использовано понятие собственных координат точек этого пространства в каноническом репере первого типа. Приведем определение собственных координат.

Пусть в репере R^* первого типа пространства $\hat{H}^3$ точка M задана вещественными координатами x_p , $p = 1, 2, 3, 4$. Четверку чисел

$$x_p = \pm \frac{\rho x_p}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}},$$

заданных с точностью до знака, называем собственными координатами точки M в репере R^* . Собственные координаты каждой точки пространства $\hat{H}^3$ удовлетворяют условию

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = \rho^2.$$

Рассмотрим в пространстве $\hat{H}^3$ тело F , гомеоморфное замыканию внутренней области проективного пространства P^3 относительно овальной поверхности. Пусть тело F задано в двугранной валиане с осью a . Зададим на этой валиане эллиптическую клиффордову систему координат C_{eCL} и предположим, что тело F задано в ней трехмерной числовой областью $\bar{F}$, т. е. каждая точка тела F имеет в системе C_{eCL} координаты (u, v, w) из области $\bar{F}$, где $\bar{F} \subset R^3$. Тогда объем тела F согласно формуле

$$dV = \rho^3 \sin v \cos v \, du \, dv \, d\omega$$

определен равенством

$$V(F) = \rho^3 \iiint_{\bar{F}} \sin v \cos v \, du \, dv \, d\omega.$$

Данная формула может быть использована для вычисления объемов различных тел, заданных внутри некоторой двугранной валианы. В работе приведены примеры применения этой формулы в задачах вычисления объемов слоя эллиптической поверхности Клиффорда и монополярного тетраэдра пространства $\hat{H}^3$.

Основные свойства эллиптических поверхностей Клиффорда пространства $\hat{H}^3$, доказанные в работах научного руководителя, представлены в данной бакалаврской работе в следующих теоремах.

Теорема 1. Все эллиптические поверхности Клиффорда гиперболического пространства положительной кривизны одного типа.

Теорема 2. Каждая эллиптическая поверхность Клиффорда гиперболического пространства положительной кривизны имеет две оси, эллиптическую и гиперболическую.

Теорема 3. Эллиптическая поверхность Клиффорда гиперболического пространства положительной кривизны является овальной поверхностью.

Теорема 4. Прямая гиперболического пространства положительной кривизны не имеет параллелей Клиффорда, отличных от ее полярной относительно абсолюта.

Теорема 5. Оси эллиптической поверхности Клиффорда гиперболического пространства положительной кривизны являются ее осями вращения.

Теорема 6. Эллиптическая поверхность Клиффорда в гиперболическом пространстве положительной кривизны является эллиптическим бипараболоидом с касательными коевклидовыми плоскостями, проходящими через эллиптическую ось поверхности.

Теорема 7. Эллиптическая поверхность Клиффорда радиуса половины длины эллиптической прямой является парой мнимо сопряженных плоскостей с общей вещественной гиперболической прямой.

Теорема 8. Эллиптическая поверхность Клиффорда радиуса четверти длины эллиптической прямой является множеством всех точек пространства, одинаково удаленных от двух взаимно полярных прямых.

Теорема 9. В эллиптической клиффордовой системе координат C_{eCl} пространства $\hat{H}^3$ радиуса кривизны ρ объем координатного цилиндра радиуса r и высоты h может быть вычислен по формуле

$$V = \pi r h \sin^2 \frac{r}{\rho}.$$

Теорема 10. В пространстве $\hat{H}^3$ радиуса кривизны ρ объем конечного монополярного тетраэдра с величинами A, B двугранных углов при базисных ребрах может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{1}{2} \rho^3 AB.$$

Визуализация эллиптической поверхности Клиффорда в гиперболическом пространстве положительной кривизны проведена с помощью системы GeoGebra. В приложении строим изображение поверхности Клиффорда в случаях, когда ее эллиптический радиус равен $\pi/4$ и $\pi/6$. Для поверхностей указанных радиусов рассматриваем различные варианты для бесконечно удаленной плоскости евклидова пространства. В первом случае считаем, что бесконечно удаленная плоскость евклидова пространства задана в проективных координатах уравнением $x_4 = 0$ (Рисунки 3.3, 3.4), во втором — уравнением $x_2 = 0$ (Рисунки 3.5, 3.6).

Заключение. В работе были исследованы эллиптические поверхности Клиффорда в гиперболическом пространстве $\hat{H}^3$ положительной кривизны. Доказано, что такие поверхности принадлежат одному типу и являются по некоторым своим свойствам аналогами цилиндров евклидова пространства. В работе введены ортогональные клиффордовы системы координат, с помощью которых решены задачи вычисления объемов различных тел в пространстве $\hat{H}^3$. Средствами динамической математической системы GeoGebra подготовлены изображения эллиптических поверхностей Клиффорда в евклидовом пространстве.