

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

**Нормальные формы компактных
ориентированных поверхностей**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ГОРДЕЕВА ПАВЛА АЛЕКСАНДРОВИЧА
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент
должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.Б. ПОПЛАВСКИЙ
инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ.-мат.н., профессор
должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.В. РОЗЕН
инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. Имея дело с топологией поверхностей, удобнее наглядно представлять себе модель, гомеоморфную рассматриваемой поверхности, чем мыслить ее абстрактно. Такие модели способствуют интуитивному пониманию решаемых проблем и помогают более полно осмыслить найденные результаты. Для компактных поверхностей такие модели легко указать. Эти модели называются нормальными формами и обладают тем свойством, что каждая компактная ориентируемая поверхность гомеоморфна одной и только одной нормальной форме.

Основная цель работы изучить нормальные формы компактных ориентированных поверхностей. Для достижения данной цели были сформулированы и рассмотрены следующие задачи:

1. Определить понятие ориентируемости и триангуляции поверхности.
2. Сформулировать определение компактной ориентируемой поверхности.
3. Изучить понятия топологического многообразия, и их гомеоморфные представления.
4. Исследовать основные свойства нормальных форм компактных ориентированных поверхностей.
5. Классифицировать компактные поверхности с помощью нормальных форм.

Основное содержание работы. В первой главе работы, сформулировано понятие компактной ориентируемой поверхности S . Фиксируем триангуляцию Δ на S с когерентной ориентацией и нормальными барицентрическими координатами.

В силу компактности S эта триангуляция содержит только конечное число треугольников. Отобразим один из этих треугольников, скажем s_1^2 барицентрически на евклидов треугольник e_1^2 . Возьмем затем прилегающий к s_1^2 треугольник s_2^2 и отобразим его барицентрически на евклидов треугольник e_2^2 , прилегающий к e_1^2 вдоль соответствующей стороны. Когерентная ориентация s_1^2 и s_2^2 индуцирует ориентацию границы многоугольника $|s_1^2| \cup |s_2^2|$, а следовательно, и границы многоугольника $e_1^2 \cup e_2^2$.

Многоугольник $e_1^2 \cup e_2^2$ можно топологически отобразить на квадрат так, что стороны перейдут в стороны, и вместо $e_1^2 \cup e_2^2$ мы будем рассматривать те-

перь этот квадрат. Выберем затем треугольник s_3^2 , имеющий общую сторону либо с s_1^2 , либо с s_2^2 , и отображим его барицентрически на евклидов треугольник e_3^2 , прилегающий к соответствующей стороне e_1^2 или e_2^2 и не налегающий ни на e_1^2 ни на e_2^2 .

Когерентная ориентация этих трех треугольников снова определит ориентацию границы многоугольника $e_1^2 \cap e_2^2$. Этот многоугольник $e_1^2 \cap e_2^2 \cap e_3^2$ можно топологически отобразить на правильный пятиугольник так, что стороны перейдут в стороны, и этот многоугольник мы будем рассматривать $e_1^2 \cap e_2^2 \cap e_3^2$. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока мы не используем все треугольники из Δ , причем мы все время заботимся о том, чтобы уже выбранные треугольники не перекрывались. Мы придем, таким образом, к плоскому правильному многоугольнику Π с ориентацией на границе, индуцированной ориентациями отдельных треугольников S_Δ . Назовем эту ориентацию положительным направлением обхода границы Π .

Пусть Δ состоит из n треугольников; легко доказать индукцией по n , что Π имеет $n+2$ стороны. Так как каждая сторона принадлежит в точности двум треугольникам в Δ , в точности две стороны многоугольника Π соответствуют одной и той же стороне в Δ . Таким образом, Π имеет четное число сторон. Топологическую модель S_Δ мы получим теперь простым отождествлением (склеиванием) парных сторон многоугольника Π .

Пусть $s^1 = \langle p, q \rangle$ — сторона Δ , соответствующая двум сторонам Π . Вершина стороны s^1 тогда соответствует двум вершинам Π , которые мы обозначим буквой p подобным же образом q соответствует двум вершинам Π , которые мы обозначим буквой Q . При обходе границы Π в положительном направлении мы встретим один раз сторону $\bar{P}Q$ (сначала мы встретим p и потом Q) и встретим один раз сторону $\bar{Q}P$ так как два треугольника из Δ , имеющие сторону $\bar{p}q$ индуцируют противоположные ориентации на ней. Обозначая сторону $\bar{P}Q$ буквой a , мы используем a^{-1} для обозначения стороны $\bar{Q}P$. Таким образом, мы припишем букву каждой стороне Π .

Мы получим символ для многоугольника Π , выписывая эти буквы в том порядке, в котором они встречаются при обходе границы Π в положительном направлении. Символ для многоугольника, имеет вид $abcb^{-1}a^{-1}dc^{-1}d^{-1}$.

Если многоугольник Π разрезать теперь на два многоугольника вдоль пря-

мой, соединяющей две его вершины, а затем эти две части снова склеить вдоль пары отождествленных сторон, чтобы эквивалентные точки соответствовали друг другу, и отождествить две стороны разреза, то мы получим новый многоугольник Π' с парами отождествленных сторон. Оба многоугольника Π и Π' представляют одну и ту же поверхность S , так как отождествляемые точки не менялись в этом процессе. Имея это в виду, приступим к упрощению структуры многоугольника Π , представляющего данную поверхность S . Циклическая подстановка букв в символе для Π приводит к другому символу для того же самого многоугольника Π .

Если буквы aa^{-1} появляются в символе как соседние стороны Π и если символ имеет по крайней мере еще одну букву (а следовательно, имеет самое меньшее четыре буквы), то буквы aa^{-1} можно выкинуть из символа, и мы получим новый символ для Π .

Многоугольник с двумя сторонами, aa^{-1} , с которым мы не можем поступить таким образом, является одной из наших нормальных форм. В дальнейшем мы можем предполагать, что многоугольник Π имеет по меньшей мере четыре стороны. Мы преобразуем теперь Π в многоугольник, в котором все вершины соответствуют одной и той же точке на S . Обозначим одну из вершин Π через Q и этой же буквой пометим все другие вершины Π , соответствующие той же точке на S , что и первоначально взятая. Так помеченные точки образуют класс эквивалентных вершин.

Если имеется сторона a многоугольника Π , у которой одна вершина не помечена, то обозначим эту вершину через Q , так же как и все другие вершины Π , эквивалентные Q . Мы получим тогда второй эквивалентный класс вершин. Покажем сейчас, как уменьшить число вершин Q на 1, увеличив при этом число вершин на 1. Пусть $a = RQ$, а b - сторона многоугольника Π , имеющая с a общую вершину Q . Мы знаем, что b не есть a^{-1} , ибо в противном случае мы имели бы в символе aa^{-1} , что уже исключено. Соединим другую вершину R стороны b (R может быть или Q) с вершиной стороны a диагональю c ; получим треугольник Δ со сторонами a, b, c . Отрежем треугольник Δ вдоль стороны c от многоугольника Π и затем приклеим Δ вдоль его стороны b к стороне b^{-1} оставшейся части Π . Полученный новый многоугольник Π', Π . Вначале треугольник присоединялся к многоугольнику Π по стороне

$\bar{P}R$, так что вершина Q располагалась снаружи.

После только что указанного преобразования тот же треугольник Δ будет присоединен к Π по стороне $\bar{R}Q$ и снаружи окажется уже вершина $.$ Таким образом, многоугольник Π' имеет на одну вершину больше и на одну вершину Q меньше, чем Π . Идя таким путем, мы получим многоугольник Π' , в котором все вершины эквивалентны и обозначаются буквой $.$

Во второй главе формулируем определение симплекса. Говорят, что n -симплекс, $n = 0, 1, 2$, на многообразии M ориентирован, если для его $n + 1$ вершин установлен определенный порядок. Два порядка вершин определяют одну и ту же ориентацию в s^n , если один порядок может быть получен из другого четной подстановкой множества его вершин. Если $n \geq 0$, то симплекс s^n имеет две возможные ориентации: обозначим симплекс с одной ориентацией через s^n , тогда симплекс с противоположной ориентацией следует обозначить через $-s^n$.

1-симплекс с вершинами P_0 и P_1 имеет две ориентации $\langle P_0, P_1 \rangle$ и $\langle P_1, P_0 \rangle$, где мы используем скобки $\langle \rangle$ для обозначения симплекса, вершины которого имеют порядок, указанный в скобках. 2-симплекс с вершинами P_0, P_1, P_2 имеет две ориентации

$$\langle P_0, P_1, P_2 \rangle = \langle P_1, P_2, P_0 \rangle = \langle P_2, P_0, P_1 \rangle$$

и

$$\langle P_2, P_1, P_0 \rangle = \langle P_1, P_0, P_2 \rangle = \langle P_0, P_2, P_1 \rangle$$

Для удобства мы будем также говорить, что 0-симплекс с одной вершиной P_0 имеет две ориентации, обозначаемые $\langle P_0 \rangle$ и $-\langle P_1 \rangle$.

Как видно из рисунка (1.1), ориентация 2-симплекса индуцирует ориентацию на каждом 1-симплексе, являющемся его стороной. Например, ориентация $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ индуцирует ориентации $\langle P_0, P_1 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_2, P_0 \rangle$ на трех его сторонах. Два примыкающих треугольника называются *когерентно ориентированными*, если они индуцируют противоположные ориентации на их общей стороне. Как видно из рисунка (1.1), ориентация 2-симплекса индуцирует ориентацию на каждом 1-симплексе, являющемся его стороной. Например,

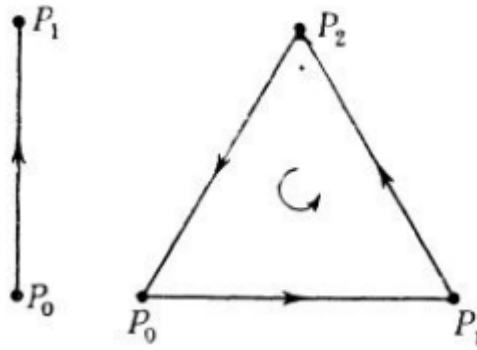


Рисунок 1.1

ориентация $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ индуцирует ориентации $\langle P_0, P_1 \rangle$, $\langle P_1, P_2 \rangle$, $\langle P_2, P_0 \rangle$ на трех его сторонах.

Два примыкающих треугольника называются *когерентно ориентированными*, если они индуцируют противоположные ориентации на их общей стороне.

Простая цепь — маршрут, в котором все вершины различны. Простой граф — граф, в котором нет кратных рёбер и петель. Простой путь — путь, все рёбра которого попарно различны. Другими словами, простой путь не проходит дважды через одно ребро.

Простая цепь треугольников $s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2$, $n > 2$, называется *замкнутой*, если s_1^2 и s_n^2 имеют общую сторону. Говорят, что замкнутая цепь треугольников когерентно ориентирована, если каждый треугольник ориентирован так, что любая пара прилегающих треугольников имеет когерентную ориентацию. Многообразие является *ориентируемым*, если каждая простая замкнутая цепь треугольников на многообразии может быть когерентно ориентирована. В противном случае многообразие называется *неориентируемым*.

Сфера, плоскость и квадрат дают примеры ориентируемых многообразий. В действительности, как мы докажем позднее, каждая риманова поверхность ориентируема. Но существуют ли вообще неориентируемые многообразия? Искомые примеры неориентируемых многообразий дают нам лист Мёбиуса и проективная плоскость. На листе Мёбиуса цепь I, II, ..., VIII является замкнутой, так как I и VIII имеют общую сторону $\overline{RS}$. Если приписать I указанную на рисунке ориентацию, то сторона $\overline{RS}$ будет нести ориентацию $\langle S, R \rangle$; если затем приписать когерентные ориентации сначала II, потом III и т.д., то мы

придем к указанной на чертеже ориентации VIII, которая опять индуцирует ориентацию $\langle S, R \rangle$ на стороне $\overline{RS}$. Таким образом, мы нашли замкнутую цепь, которая не может быть когерентно ориентирована. Аналогично в проективной плоскости замкнутая цепь 1, 2, 5, 6, 4 не может быть когерентно ориентирована.

Если $\langle P_0, P_1 \rangle$ – ориентированный 1-симплекс, то его барицентрическое подразделение состоит из двух ориентированных 1-симплексов $\langle P_0, P_{01} \rangle$ и $-\langle P_1, P_{01} \rangle$, где P_{01} – центр $\langle P_0, P_1 \rangle$. Далее, если мы возьмем неориентированный 1-симплекс s^1 с вершинами P_0, P_1 и припишем ориентацию одному из двух 1-симплексов его барицентрического подразделения, то это определит ориентацию в s^1 ; например, $\langle P_0, P_{01} \rangle$ определяет $\langle P_0, P_1 \rangle$, а $-\langle P_0, P_{01} \rangle$ определяет $-\langle P_0, P_1 \rangle$. В ориентированном 2-симплексе $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ мы обозначим центр стороны $\langle P_j, P_k \rangle$ через P_{jk} , а центр 2-симплекса (центр тяжести) $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ через P_{012} . Тогда барицентрическое подразделение состоит из шести ориентированных 2-симплексов $\langle P_0, P_{01}, P_{012} \rangle$, $-\langle P_1, P_{01}, P_{012} \rangle$, $\langle P_1, P_{12}, P_{012} \rangle$, $-\langle P_2, P_{12}, P_{012} \rangle$, $\langle P_2, P_{20}, P_{012} \rangle$, $-\langle P_0, P_{20}, P_{012} \rangle$. Таким образом, если $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ – ориентированный 2-симплекс с центром P , а $P_{ij} = P_{ji}$ – центр стороны $\langle P_i, P_j \rangle$, то барицентрическое подразделение $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ состоит из шести треугольников вида $\epsilon_{ijk} \langle P_i, P_{ij}, P_{ijk} \rangle$, где $\epsilon_{ijk} = 1$ или -1 в зависимости от четности или нечетности перестановки (i, j, k) множества $(0, 1, 2)$. Заметим, что эти шесть треугольников образуют когерентно ориентированную замкнутую цепь. В неориентированном треугольнике s^2 с вершинами P_0, P_1, P_2 выбор ориентации одной стороны определяет ориентацию треугольника; например, $\langle P_0, P_1 \rangle$ определяет ориентацию $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ треугольника s^2 .

Пусть s_1^2 и s_2^2 – два прилегающих неориентированных треугольника; s_1^2 имеет вершины P_0, P_1, P_2 , а s_2^2 – вершины P_1, P_2, P_3 , причем сторона $\overline{P_1 P_2}$ общая. Используя нормальные координаты для пары треугольников s_1^2 и s_2^2 , мы барицентрически подразделим их, а затем когерентно ориентируем цепи из шести треугольников, входящих в барицентрическое подразделение каждого из них. Предположим теперь, что каждая сторона подразделения, лежащая на $\overline{P_1 P_2}$, получает противоположную ориентацию от двух треугольников подразделения, так что замкнутая цепь из двенадцати треугольников оказывается когерентно ориентированной. Тогда сторона $\overline{P_1 P_2}$ получает про-

тивоположную ориентацию от каждой пары треугольников подразделения, имеющих общую сторону вдоль $\overline{P_1 P_2}$, и, таким образом, определяется когерентная ориентация в s_1^2 и s_2^2 .

Риманова поверхность — традиционное в комплексном анализе название одномерного комплексного дифференцируемого многообразия. Поверхность Римана позволяет геометрически представить многозначные функции комплексного переменного таким образом, что каждой её точке соответствует одно значение многозначной функции, причём при непрерывном перемещении по поверхности непрерывно изменяется и функция.

На всяком многообразии M , которое является одновременно триангулируемым и ориентируемым, можно определить аналитическую структуру, превращающую M в риманову поверхность. Доказать существование на M совокупности координатных окрестностей, в которой пересекающиеся окрестности индуцируют комформные отображения в координатных плоскостях. Предположим, что ориентируемая поверхность S имеет триангуляцию Δ , в которой введена когерентная ориентация и нормальные барицентрические координаты. Фиксируем равносторонний треугольник e^2 в Υ^2 и отображим каждый треугольник s^2 из Δ барицентрически на e^2 , таким образом, что ориентация s^2 переходит в положительную ориентацию e^2 . Эти отображения определяют координаты в окрестности каждой точки, лежащей внутри какого-либо треугольника из Δ . Если точка P лежит на стороне треугольника $s_1^2 \in \Delta$, но не является его вершиной, то существует другой треугольник $s_2^2 \in \Delta$, на стороне которого также лежит точка P . Отобразим затем барицентрически $|s_1^2| \cup |s_2^2|$ на сумму двух прилегающих равносторонних треугольников e_1^2 и e_2^2 . Точка P отображается в точку $p \in e_1^2 \cup e_2^2$. Примем за координаты в окрестности точки P координаты соответствующих точек в окрестности p . В окрестности любой точки из e_1^2 или e_2^2 эти координаты являются аналитическими функциями ранее определенных координат, так как аффинное отображение одного равностороннего треугольника на другой является комформным, будучи в действительности преобразованием подобия Υ^2 и следовательно, целым линейным преобразованием.

Остается рассмотреть только случай, когда P -вершина, общая для n треугольников $s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2$ из Δ . Отобразим сначала s_1^2 барицентрически на рав-

носторонний треугольник e_1^2 в Υ^2 , вершина которого, соответствующая P , лежит в начале координат. Затем отображим s_2^2 барицентрически на равносторонний треугольник e_2^2 с вершиной, соответствующей P , в начале координат и общей с e_1^2 стороной, соответствующей стороне $|s_1^2| \cup |s_2^2|$. Продолжая таким образом, отображим s_i^2 барицентрически на равносторонний треугольник e_i^2 с вершиной, соответствующей P , в начале координат и общей с e_{i-1}^2 стороной, соответствующей $|s_{i-1}^2| \cup |s_i^2|$. Цепь треугольников $e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2$ покрывает окрестность начала координат полностью один раз только при $n = 6$. В противном случае произведем преобразование $\zeta = z^{6/n}$, и образ цепи треугольников образует окрестность начала в ζ -плоскости. Используем в качестве локальных координат относительно P координаты соответствующих точек в ζ -плоскости. Так как отображение $\zeta = z^{6/n}$ конформно в проколоте окрестности $z = 0$, то эти координаты являются аналитическими функциями ранее определенных, и они дают нам аналитическую структуру на S . Поскольку аналитическую структуру мы можем ввести на S не единственным образом, мы видим, что каждое ориентируемое многообразие соответствует целому классу римановых поверхностей.

Заключение. В первой главе исследованы нормальные формы компактных поверхностей. Дано понятие поверхности и сформулировано определение ее ориентации. Изучены понятия топологического многообразия, и их гомеоморфные представления.

Во второй главе проиллюстрированы примеры компактных поверхностей. С помощью нормальных форм построена классификация компактных поверхностей.