МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Характеризации модулярных и дистрибутивных решеток

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ВЕРГУЛЯСОВА ДМИТРИЯ ВИТАЛЬЕВИЧА
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н. ________________ В.Е. НОВИКОВ
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ.-мат.н., профессор ________________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. Теория решеток возникла в 30-е годы 20 столетия из приложений частично упорядоченных множеств к геометрическим и алгебраическим свойствам подпространств, подмодулей, подгрупп. Позднее решеточные свойства алгебраических систем стали изучаться и в других областях алгебры: в теории топологических групп, в теории модулей, в теорий колец и алгебр. Теория решеток была рассмотрена в работах таких математиков, как Биркгоф Г., Гретцер Г., Верников, Б. М. и многих других.

В последние десятилетия все больший интерес представляют изучение, класификация алгебраических систем по свойствам решетки их подсистем. Наиболее глубокие результаты в этом направлении получены для алгебраических систем с модулярными, в частности с дистрибутивными решетками подсистем.

Основная цель работы изучить модулярные и дистрибутивные решетки. Для достижения данной цели были сформулированы и рассмотрены следующие задачи:

1. Рассмотреть отношения порядка на множестве и основные определения, связанные с ним.

2. Разобрать доказательство теоремы об эквивалентности решеточно упорядоченного множества и алгебраической решетки.

3. Разобрать основные критерии модулярности и дистрибутивности решеток. Разработать формальный алгоритм для проверки того, будет ли данная конечная решетка дистрибутивной.

Основное содержание работы. Пусть A и B два конечных множества. Декартовым произведением множеств A и B называют множество $A \times B$,состоящее из всех упорядоченных пар, где $a \in A$, $b \in B$.

Определение 1.1. Бинарным отношением между элементами множества A и B называется любое подмножество R множества $A \times B$, то есть $R \subset A \times B$.

Определение 1.2. Областью определения бинарного отношения R называется множество, состоящее из таких x, для которых $\langle x, y \rangle \in R$ хотя бы для одного y.

Определение 1.3. Областью значений бинарного отношения R называется множество, состоящее из таких y, для которых $\langle x, y \rangle \in R$ хотя бы для одного x.

Определение 1.4. Инверсия (обратное отношение) R — это множество $\{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in R\}$ и обозначается, как R^{-1}.

Определение 1.5. Композиция (суперпозиция) бинарных отношений R и S — это множество $\{\langle x, y\rangle | \exists z \langle xSz \wedge zRy\rangle\}$ и обозначается, как $R \circ S$.

Бинарное отношение R на некотором множестве M может обладать различными свойствами:

Рефлексивность: $\forall x \in M (xRx)$

Антирефлексивность (иррефлексивность): $\forall x \in M \neg(xRx)$

Корефлексивность: $\forall x, y \in M (xRy \Rightarrow x = y)$

Симметричность: $\forall x, y \in M (xRy \Rightarrow yRx)$

Антисимметричность: $\forall x, y \in M (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$

Асимметричность: $\forall x, y \in M (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$. Асимметричность эквивалентна одновременной антирефлексивности и антисимметричности отношения.

Транзитивность: $\forall x, y, z \in M (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

Связность: $\forall x, y \in M (x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx)$

Существует несколько видов бинарных отношений:

Рефлексивное транзитивное отношение называется отношением квазипорядка.

Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется отношением эквивалентности.

Рефлексивное антисимметричное транзитивное отношение называется отношением (частичного) порядка.

Антирефлексивное антисимметричное транзитивное отношение называется отношением строгого порядка.

Полное антисимметричное (для любых x, y выполняется xRy или yRx) транзитивное отношение называется отношением линейного порядка.

Определение 1.6. Упорядоченным множеством называется множество, на котором определено бинарное отношение $x \leq y$, удовлетворяющее для всех x, y, z следующим условиям:

P1: $x \leq x$ (рефлексивность);

P2: Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ (антисимметричность);

P3: Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ (транзитивность).

Пример 1.1. $\mathbb{R}$-множество действительных чисел и $x \leq y$ имеет свой обычный для действительных чисел смысл.

Отношение порядка в этом у-множестве удовлетворяет дополнительно условию:

P4: Для любых x, y имеет место $x \leq y$ или $y \leq x$.

Определение 1.7. У-множество, удовлетворяющее P4, называется линейно упорядоченным или цепью.

Лемма 1.1. В любом у-множестве отношение $<$ обладает следующими двумя свойствами. 1) Ни для какого x не выполняется $x < x$. 2) Из $x < y$ и $y < z$ следует, что $x < z$. Обратно, если бинарное отношение $<$ обладает этими двумя свойствами, то отношение $\leq$, определенное требованием, что $x < y$ или $x = y$, удовлетворяют P1-P3.

Лемма 1.2. Если $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_1$, то $x_1 = x_2 = ... = x_n$. (Антицикличность порядка).

Аксиома выбора. Существует отображение, сопоставляющее каждому непустому подмножеству B множества A элемент из B.

Теорема 1.1. Всякое подмножество S у-множества P само является у-множеством относительно того же самого порядка (ограниченного на S). В частности, любое подмножество цепи является цепью.

Функция $\Theta : P \to Q$, заданная на у-множестве P и принимающая значение в у-множестве Q, называется *сохраняющей порядок* или *изотонной*, если

(1) из $x \leq y$ следует, что $\Theta(x) \leq \Theta(y)$.

Изотонная функция, допускающая изотонную обратную функцию, называется изоморфизмом. Другими словами, изоморфизм между двумя у-множествами есть взаимно однозначное соответствие между ними, которое удовлетворяет условию (1) и условию

(1') из $\Theta(x) \leq \Theta(y)$ следует, что $x \leq y$ (обратная изотонность отображения).

Изоморфизм у-множества P с самим собой называется его автоморфизмом.

Обратным для отношения порядка $\leq$, по определению, является отношение $\leq^{-1}$ такое, что $x \leq^{-1} y$ тогда и только тогда, когда $y \leq x$. Так, обратным для отношения «меньше или равно» будет отношение «больше или равно».

Из условий P1-P3 вытекает следующее заключение.

Теорема 1.2. (Принцип двойственности). Отношение, обратное для отношения порядка, само является упорядоченностью.

Определение 1.8. Двойственным для у-множества X называется у-множество $\breve{X}$, определяемое на тех же элементах отношением, обратным к упорядоченности в X.

Определение 1.9. Функция $\Theta : P \to Q$ называется антиизотонной, если

(2) из $x \leq y$ следует, что $\Theta(x) \geq \Theta(y)$.

Взаимно однозначное соответствие Θ, удовлетворяющее условию (2) и условию

(2') из $\Theta(x) \leq \Theta(y)$ следует, что $x \geq y$,

называется дуальным изоморфизмом (или антиизоморфизмом).

Определение 1.10. Говорят, что «a покрывает b» ($a \succ b$) в у-множестве P, если $a > b$ и не существует такого $x \in P$, чтобы было $a > x > b$.

Определение 1.11. Наименьшим элементом подмножества X у-множества P называется элемент $a \in X$ такой, что $a \leq x$ для всех $x \in X$. Наибольшим элементом подмножества X называется элемент $b \in X$ такой, что $b \geq x$ для всех $x \in X$.

Теорема 1.3. Любое конечное непустое подмножество X произвольного у-множества имеет минимальные и максимальные элементы.

Теорема 1.4. В цепях понятия минимального и наименьшего элемента (максимального и наибольшего элемента) подмножества совпадают. Таким образом любая конечная цепь имеет наименьший (первый) и наибольший (последний) элементы.

Теорема 1.5. Любая конечная цепь из n элементов изоморфна ординальному числу n (т. е. цепи целых чисел 1, ..., n).

Верхней гранью подмножества X в у-множестве P называется элемент $a \in P$, если для любого $x \in X$ выполняется $x \leq a$. Точная верхняя грань подмножества X - это такая его верхняя грань a, что для любой другой его верхней грани b выполняется условие $a \leq b$. Она обозначается символом

$sup\ X$. Согласно Р2, если точная верхняя грань $sup\ X$ существует, то она единственна. Понятия нижней грани подмножества X и точной нижней грани ($inf\ X$) определяются двойственно. Также согласно Р2, если точная нижняя грань $inf\ X$ существует, то она единственна.

Цепное условие Жордана-Дедекинда.

Все максимальные цепи между двумя фиксированными точками имеют одинаковую длину.

Лемма 1.3. В у-множестве P с O и конечными цепями тогда и только тогда выполняется цепное условие Жордана-Дедекинда, когда P градуируется функцией $h[x]$.

Определение 2.1. Решеткой называется у-множество L, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань, или «пересечение», обозначаемое $x \wedge y$, и точную верхнюю грань, или «объединение», обозначаемое $x \vee y$. Решетка L называется полной, если любое ее подмножество X имеет в L точные верхнюю и нижнюю грани.

Определение 2.2. Подрешеткой решетки L называется подмножество $X \subset L$ такое, что если $a \in X, b \in X$, то $a \wedge b \in X$ и $a \vee b \in X$.

Определение 2.3. Свойство подмножеств множества M называется свойством замыкания, если: 1) M обладает этим свойством и 2) любое пересечение подмножеств, имеющих данное свойство, само обладает им.

Теорема 2.1. Пусть L-полная решетка и S-некоторое подмножество в L такое, что 1) $I \in S$ и 2) если $T \subset S$, то $inf\ T \in S$. Тогда S является полной решеткой.

Определение 2.4. Прямым произведением PQ двух y-множеств P и Q называется множество всех пар (x, y), где $x \in P, y \in Q$, упорядоченное по следующему правилу: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leq x_2$ в P и $y_1 \leq y_2$ в Q.

Теорема 2.2. Прямое произведение LM любых двух решеток является решеткой.

Лемма 2.1.В любом у-множестве для операций пересечения и объединения выполняются, если, конечно, определены входящие в них выражения, следующие законы:

L1: $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (идемпотентность)

L2: $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ (коммутативность)

L3: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (ассоциативность)

L4: $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (поглощение)

Кроме того, неравенство $x \leq y$ равносильно каждому из условий:

$x \wedge y = x$ и $x \vee y = y$

Лемма 2.2. Если у-множество P имеет O, то $O \wedge x = O$ и $O \vee x = x$ для всех $x \in P$. Двойственно. если P имеет наибольший элемент I, то $x \wedge I = x$ и $x \vee I = I$ для всех $x \in X$.

Лемма 2.3. Во всякой решетке операции объединения и пересечения изотонны:

(4) если $y \leq z$, то $x \wedge y \leq x \wedge z$ и $x \vee y \leq x \vee z$.

Лемма 2.4. Во всякой решетке имеют место следующие неравенства дистрибутивности

(5) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

(5') $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (z \vee z)$.

Лемма 2.5. Элементы любой решетки удовлетворяют следующему неравенству модулярности:

(6) если $x \leq z$, то $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$.

Определение 2.5. Система с одной бинарной идемпотентной, коммутативной и ассоциативной операцией называется полурешеткой.

Лемма 2.6. Если в полурешетке с бинарной операцией $\circ$ положить

($*$) $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \circ y = x$,

то она становится у-множеством, в котором $inf\{x, y\} = x \circ y$.

Теорема 2.3. Любая алгебраическая система L с двумя бинарными операциями, удовлетворяющими условиям L1-L4, является решеткой и обратно.

Теорема 2.4. В любой решетке следующие тождества равносильны:

L6$'$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ для любых x, y, z;

L6"$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ для любых x, y, z.

Определение 2.6. Решетка называется дистрибутивной, если в ней выполняется тождество L6$'$ (а значит, и L6").

Лемма 2.7. Любая цепь является дистрибутивной решеткой.

Определение 2.7. Кольцом множеств называется семейство Φ подмножеств множества I, содержащее вместе с любыми двумя множествами S и T их (теоретико-множественные) пересечения и объединения $S \cap T$ и $S \cup T$. Полем множеств называется кольцо множеств , которое вместе с любым S содержит также и его теоретико-множественное дополнение S'.

Теорема 2.5. Если в дистрибутивной решетке $c \wedge x = c \wedge y$ и $c \vee x = c \vee y$, то $x = y$.

Рассматривая для дистрибутивного закона L6$'$ случай $x \leq z$, т. е. $z = x \vee z$, мы получаем самодвойственный «модулярный» закон:

L5: если $x \leq z$, то $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

Определение 2.8. Решетка называется модулярной, если в ней выполняется модулярный закон L5.

Теорема 2.6. Нормальные подгруппы любой группы G образуют модулярную решетку.

Пусть x, y и z — элементы решётки $< L, \wedge, \vee >$. Правило

$$Abbr(x, y) : \begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

называется правилом сокращения для x и y. В общем случае это правило несправедливо.

Теорема 2.7. Любая немодулярная решетка L содержит решетку N_5, изображенную на рисунке 1,6 в качестве подрешетки.

Теорема 2.8. В любой модулярной решетке M отображения $\varphi_a : x \to x \wedge a$ и $\psi_b : y \to y \vee b$ являются взаимно обратными изоморфизмами между интервалами $[b,\, a \vee b]$ $[a \wedge b,\, a]$.

Определение 2.9. Два интервала решетки называются транспонированными, если они могут быть представлены в виде $[a \wedge b,\, a]$ и $[b,\, a \vee b]$ для подходящих a, b. Два интервала $[x,\, y]$ и $[x',\, y']$ называются проективными, если существует конечная последовательность $[x,\, y]$, $[x_1,\, y_1]$, $[x_2,\, y_2]$, ..., $[x',\, y']$, в которой любые два последовательные интервала транспонированы.

Теорема 2.9. (критерий модулярности решётки). Решётка модулярна, если и только если никакая её подрешётка не изоморфна пентагону N_5 .

Теорема 2.10 (правило сокращения для модулярных решёток). Решётка модулярна, если и только если при сравнимости её элементов x и y справедливо правило их сокращения.

Теорема 2.11. Модулярная решётка является дистрибутивной, если и только если никакая её подрешётка не изоморфна диаманту M_3.

Следствие. (Критерий дистрибутивности решётки). Решётка дистрибутивна, если и только если никакая её подрешётка не изоморфна ни пентагону N_5, ни диаманту M_3.

Теорема 2.12. (правило сокращения для дистрибутивных решёток). Решётка дистрибутивна, если и только если в ней справедливо правило сокращения Abbr.

Теорема 2.13. (эквивалентность решёточно упорядоченных множеств и решёток).

1. Пусть $< P, \subseteq >$ — решёточно упорядоченное множество. Если для любых элементов x и y из P положить

$x \wedge y = sup\{x, y\}$, $x \vee y = inf\{x, y\}$,

то структура $< P, \wedge, \vee >$ будет решёткой.

2. Пусть $< L, \wedge, \vee >$ — решётка. Если для любых элементов x и y из L положить

$x \subseteq y$, $x \vee y = x$ (или $x \subseteq y$, $x \wedge y = y$),

то структура $< L, \subseteq >$ будет решёточно упорядоченным множеством.

Алгоритм для проверки того будет ли являться данная конечная решетка дистрибутивной состоит из нескольких этапов:

1. Проверка на то, будет ли данное бинарное отношение у-множеством.
2. Является ли данное у-множество решеткой.
3. Является ли решетка дистрибутивной.

Рассмотрим более подробно данный алгорим.

1. На входе файл бинарного отношения $\leq$ на конечном множестве.

Осуществим проверку на то, будет ли являться данное бинарное отношение у-множеством. Для этого необходимо проверить 3 условия: рефлексивность, антисимметричнoть и транзитивность.

1) Проверим рефлексивность. Если на главной диагонали матрицы расположены только единицы, то это означает, что данное бинарное отношение рефлексивно.

2) Проверим антисимметричность. Для этого умножим матрицу M на транспонированную матрицу M^T. Если все элементы, которые находятся все главной диагонали будут 0, то данное бинарное отношение антисимметрично.

3) Проверим транзитивность. Если при умножении матрицы M на саму себя опять получаем матрицу M, то это бинарное отношение транзитивно.

Если все 3 условия выполняются, то данное бинарное отношение является у-множеством и переходим к шагу 2. Если нет, то данное бинарное отношение не является у-множеством, а значит и не является решеткой и тем более дистрибутивной решеткой.

2. Является ли данное у-множество решеткой. По определению решетка это такое у-множество, в котором любые два элемента имеют точную верхнюю ($sup\ x$) и точную нижнюю грани ($inf\ x$).

Для проверки точной нижней грани необходимо сравнить все столбцы данной матрицы M попарно между собой. Для начала выпишем номера строк, в которых находятся единицы на месте двух взятых столбцов. Сравним номера этих строк. Наибольший номер строки, который принадлежит обоим столбцам будет являться точной нижней гранью.

Например рассмотрим 2 и 5 столбцы матрицы M. Строки, в которых находятся единицы на пересечении со столбцом 2 это 1 и 2. А на пересечении с 5 столбцом это строки 1, 2, 3, 4 и 5. Наибольшим номером строки, которая находится в обоих столбцах является 2, это и есть точная нижняя грань для этой пары столбцов.

Для нахождения точной верхней грани будем рассматривать строки матрицы M и сравнивать их между собой по такому же принципу, который использовался для нахождения точной нижней грани. Только в этом случае необходимо найти наименьший номер столбца, который содержится в обоих сравниваемых строках.

Например рассмотрим строки 3 и 4. 3 строка содежит единицы на пересечении 3, 4, 5 и 6 столбцов, а 4 строка 4, 5 и 6. Наименьший номер столбца, который содержится в обоих строках это 4, значит он и будет точной верхней гранью.

Для удобства сделаем таблицы, куда запишем полученные результаты.

Если существуют точная нижняя и точная верхняя грани для всех комбинаций строк и столбцов, то данное у-множество будет являться решеткой. В таком случае переходим к шагу 3.

3. Проверим решетку на дистрибутивность. По определению решетка является дистрибутивной, если в ней выполняется следующее тождество:

$a \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (a \wedge d)$ для любых a, c, d.

Проверим выполнимость этого тождества. a, c, d - это строки и столбцы матриц A (Sup) и B (Inf). Рассмотрим левую часть тождества. Объединение $c \vee d$ находим в матрице B. например c=2, d=4, значит ищем элемент на пересечении 2 столбца и 4 строки матрицы B. Это элемент 2. Дальше рассматриваем пересечение a∧2. Допустим, a=3. Значит ищем элемент на пересечении 3 столбца и 2 строки в матрице A. Это элемент 3. Рассмотрим правую часть тождества. $a \wedge c$ и $a \wedge d$ найдем в матрице A. $a \wedge c$=3, $a \wedge d$= 4. найдем элемент 3∨4 в матрице B. Это элемент 3. Левая и правая часть тождества совпали, следовательно для этой тройки тождество выполняется. Таким образом необходимо проверить все тройки. Если для каждой комбинации это тождество верно, то эта решетка является дистрибутивной.

Заключение. В данной работе были рассмотрены у-множества, а также их частный случай - решетки. Кроме того были рассмотрены модулярные и дистрибутивные решетки и их критерии. Тема данной работы является актуальной, поскольку теория решеток находит многочисленные применения в теории графов и теоретическом программировании. В специальной литературе на базе теории решеток развиты стройная концепция типов данных в языках программирования и теория типов данных.