МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Связь классической и расширенной гипотез Римана

АВТОРЕФЕРАТ НА БАКАЛАВРСКУЮ РАБОТУ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Моршневой Анастасии Юрьевны

Научный руководитель

доцент, к.ф-м.н., доцент ________________ В.В.Кривобок

подпись, дата

Зав. кафедрой

зав. каф., к.ф-м.н., доцент ________________ А.М.Водолазов

подпись, дата

Саратов 2019

Введение.Бакалаврская работа посвящена изучению классической и расширенной гипотез Римана и выявлению их связи между собой. Риман обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x, выражается через распределение так называемых «нетривиальных нулей» дзета-функции, которая задается равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

Нули дзета-функции делятся на два типа: тривиальные и нетривиальные нули. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определена для всех комплексных $s \neq 1$ и имеет нули в отрицательных чётных $s = -2, -4, -6....$

Числа -2, -4, -6,...,$-2k$,... называют тривиальными нулями дзета - функции, и других вещественных нулей у этой функции нет.

Из функционального уравнения

$$\zeta(s) = 2^s \pi^s \sin\frac{\pi s}{2} \frac{1}{2\sin(\pi s)\Gamma(s)} \zeta(1-s)$$

и выражения

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \; Res > 1,$$

где $\mu(n)$ - функция Мёбиуса, следует, что все остальные нули, называемые «нетривиальными», расположены в полосе $0 < Res < 1$ симметрично относительно так называемой «критической линии» $\frac{1}{2} + it$, $t \in \mathrm{R}$.

Классическая гипотеза Римана о распределении нулей дзета-функции Римана была сформулирована в 1859 году. Гипотеза утверждает, что:

Все нетривиальные нули дзета-функции имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$.

L – функции Дирихле – функции комплексного переменного, подобные дзета – функции Римана, введены Дирихле при исследовании вопроса о распределении простых чисел. Пусть k – натуральное число и χ – какой-либо характер по модулю k.

L – функцией Дирихле называется ряд

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}. \tag{2}$$

Расширенная гипотеза Римана состоит из того же самого утверждения для обобщений дзета-функций, называемых L - функциями Дирихле.

Гипотеза Римана входит в список «Семи задач тысячелетия» (Millennium Prize Problems). Многие математики пытались доказать или опровергнуть гипотезу Римана. Тысячи ошибочных доказательств были предоставлены более чем за один век.

Данная работа посвящена изложению основных аналитических свойств данных функций, а также гипотезам, эквивалентным расширенной гипотезе Римана.

Бакалаврская работа состоит из трёх разделов. В первом и втором разделе даются общие сведения о дзета-функции Римана и L-функции Дирихле, их свойства и доказываются их функциональные уравнения. В третьем разделе доказываются утверждения, эквивалентные основной и расширенной гипотезам Римана. Приложение работы состоит из выполнения алгоритма на языке C++ , а именно задача по нахождению характера L - функции Дирихле по модулю 5.

Основное содержание работы. В **Разделе 1** рассматриваются ζ-функция и ее функциональное уравнение. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть определена или рядом Дирихле, или бесконечным произведением Эйлера. Остановимся на первой определении, а второе получим как теорему.[1].

Определение 9. При $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, функция Римана $\zeta(s)$ задается равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2.1}$$

В области $\{s|Re(s) > 1\}$, этот ряд сходится, является аналитической функцией и допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плос-

[1]Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета - функция Римана. - М.:Физматлит, -1994. -С. 11-13

кость без единицы.[2] В соответствии с рисунком 1.1, наблюдаем поведение дзета-функции Римана на действительной оси...

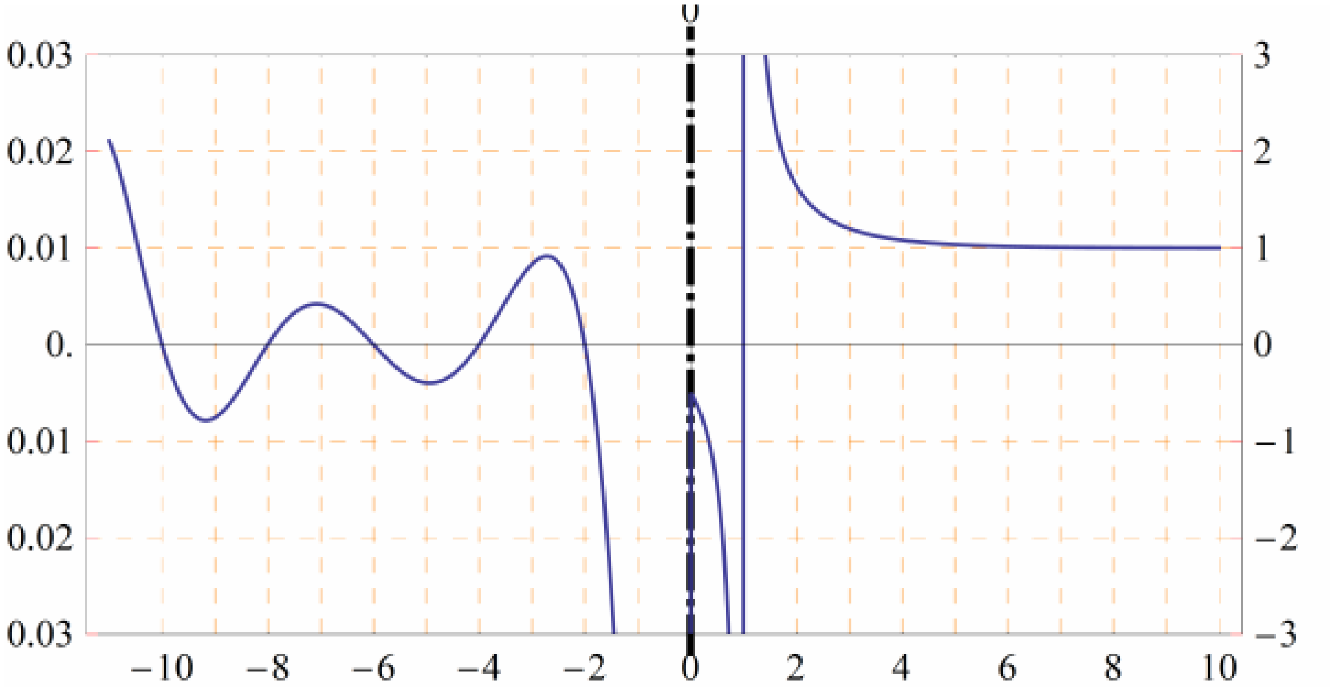

Рисунок 1.1 - График дзета-функции Римана на действительной оси

Теорема 6. При $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, справедливо тождество

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}, \tag{2.2}$$

где в правой части стоит произведение по всем простым числам .

Дзета-функция Римана имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, кроме $s = 1$, где она имеет простой полюс и удовлетворяет тождеству:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

Это тождество является функциональным уравнением дзета - функции Римана.[3]

[2]Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. - М.: Наука, -1977. -С. 65-67
[3]Чудаков Н. Г. О нулях дзета - функции Римана - ДАН СССР., -1936. -С. 187-201

Классическая гипотеза Римана о распределении нулей дзета-функции Римана была сформулирована Бернхардом Риманом в 1859 году. Гипотеза Римана утверждает, что:

Все нетривиальные нули дзета-функции имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$.

Обобщённая гипотеза Римана состоит из того же самого утверждения для обобщений дзета-функций, называемых L - функциями Дирихле.

Приведём некоторые следствия из гипотезы Римана.[4]

Допустим, что гипотеза Римана справедлива, т. е. что все комплексные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$.[5]

1.Приближенная формула для функции $\zeta'(s)\,/\,\zeta(s)$.[6].

Теорема 7. При $t \to \infty$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} e^{-\delta n} + \sum_{p} \delta^{s-\sigma}\Gamma(\rho - s) + O(\delta^{\sigma-\frac{1}{4}} \ln t), \tag{2.14}$$

равномерно при $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{9}{8}$ и $e^{-\sqrt{t}} \leqslant \delta \leqslant 1$.

2.Приближенная формула для функции $\ln \zeta(s)$.

Для получения иного доказательства неравенства $\nu(\sigma) \geqslant 1 - \sigma$ о нам понадобится приближенная формула для $\ln \zeta(s)$.

Теорема 8. Для фиксированных α и σ, $\frac{1}{2} < \alpha < \sigma \leqslant 1$ и $e^{-\sqrt{t}} \leqslant \delta \leqslant 1$

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s} e^{-\sigma n} + O\{\delta^{\sigma-\alpha}(\ln t)^{\nu(\alpha)+s}\} + O(1).$$

Многие математики пытались доказать или опровергнуть гипотезу Римана. Тысячи ошибочных доказательств были предоставлены более чем за один век.

На данный момент, в соответствии с рисунком 1.2, были проверены первые 10^{12} нули на критической линии.

[4]Borchsenius V., Jessen B. Mean motions and values of the Riemann zeta-function, Acta Math., 1948, p. 99-106.

[5]Wang F. T. A note on zeros on Riemann zeta-function, Proc. Imp. Acad. Tokyo, -1937. C.305-306.

[6]Титчмаш Е.К. Теория дзета - функции Римана - Изд-во иностранной литературы , -1953. -С. 335-340

Другой подход доказательства состоит в численном вычислении, который может опровергнуть гипотезу Римана.

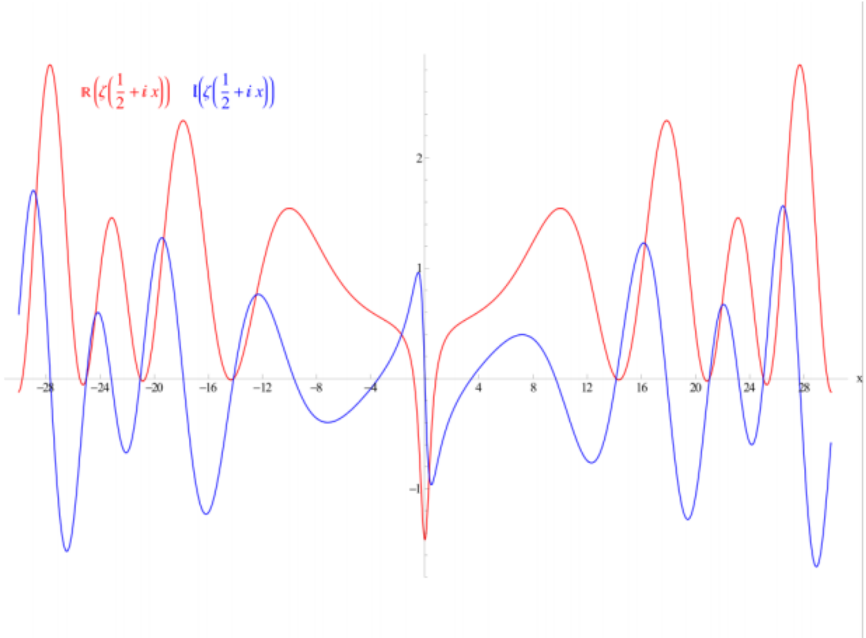

Рисунок 1.2 - Вещественная(красный) и мнимая(синий) части дзета-функции Римана вблизи «критической» линии $Re\, s = \frac{1}{2}$

В **Разделе 2** рассматривается L – функция Дирихле и её характеры, а также её функциональное уравнение.

L–функцией Дирихле называется ряд

$$L = L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \ Res > 1\cdot$$

где $\chi(n)$ - некоторый числовой характер по модулю k.

Определение 10. Характером группы G называется комплекснозначная функция χ, определенная на G, не равная тождественно нулю и такая, что для любых элементов a, $b \in G$ выполняется равенство

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

Отметим некоторые свойства характеров:

1. Функция $\chi_0(a)$, равная 1 для каждого элемента $a \in G$, является характером и называется главным характером. Остальные характеры называются неглавными.[7].

2. Если e - единица группы, то для каждого характера χ

$$\chi(e) \;=\; 1. \tag{3.1}$$

Действительно, из равенства

$$\chi(a) \;=\; \chi(ae) \;=\; \chi(a)\chi(e),$$

справедливого для каждого элемента $a \in G$, имеем, что $\chi(e) \neq 0$. Теперь из равенства

$$\chi(e) \;=\; \chi(e\,e) \;=\; \chi(e)\chi(e),$$

следует равенство (2.1).

3. Из равенства

$$1 = \chi(e) \;=\; \chi(aa^{-1}) \;=\; \chi(a)\chi(a^{-1})$$

получаем, что для каждого элемента $a \in G$ выполнено неравенство $\chi(a) \neq 0$ и

$$\chi(a^{-1}) \;=\; (\chi(a))^{-1}$$

4. Если h - порядок группы G (количество ее элементов), то для каждого элемента $a \in G$ значение $\chi(a)$ есть некоторый корень из 1 степени h. Действительно, по теореме Лагранжа $a^h = e$ и

$$1 \;=\; \chi(e) \;=\; \chi(a^h) \;=\; (\chi(a))^h$$

Примеры:

1. Характером является, очевидно, функция

$$\chi(n) \equiv 1$$

[7] Phillips E. The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method, Quart. J. Math., -1933. -C. 209—211.

Эту функцию мы будем называть единичной функцией. Её основной модуль равен числу 1; поэтому её можно записывать символом $\chi(n,1)$.

2. Характером является функция, определённая условиями[8].

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{если } (n,k) > 1 \\ 1 & \text{если } (n,k) = 1, \end{cases}$$

где k - заданное натуральное число > 1. Такие функции могут быть построены для любого натурального k. Их мы будем называть главными характерами.

Теорема 9. Пусть G - конечная абелева группа, H - подгруппа G и ψ - некоторый характер группы . Существует в точности $\mid G \mid / \mid H \mid$ характеров группы G, совпадающих с ψ на подгруппе .

Теорема 10. Произведение конечного числа характеров есть также характер, основной модуль которого равен делителю наименьшего кратного основных модулей сомножителей; основной модуль произведения конечного числа характеров равен произведению основных модулей сомножителей, если последние попарно взаимно просты.

Справедлива и следующая обратная теорема.

Теорема 11. Пусть k - основной модуль характера $\chi(n)$ и

$$k = k_1 k_2 \dots k_\nu,$$

где все k_i попарно взаимно просты, тогда существует единственная система характеров

$$\chi_1(n)\chi_2(n), \dots, \chi_\nu(n)$$

основные модули которых соответственно равны $k_1 k_2 \dots k_\nu$, и такие, что

$$\chi(n) = \chi_1(n)\chi_2(n), \dots, \chi_\nu(n)$$

При этом области значений функций $\chi_1(n)\chi_2(n), \dots, \chi_\nu(n)$ суть части области значений $\chi(n)$.

[8] W i n t n e r A. A note on the distribution of the zeros of the zeta-function, Amer. J. Math., -1935. -C. 101-102.

Теорема 16.(Функциональное уравнение.) Пусть χ - примитивный характер по модулю k,

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{если } \chi(-1) = 1; \\ 1 & \text{если } \chi(-1) = -1; \end{cases}$$

$$\xi(s, \chi) = (\frac{\pi}{k})^{-(s+\delta)/2}\Gamma(\frac{s+\delta}{2})L(s,\chi).$$

Тогда справедливо равенство

$$\xi(1 - s, \bar{\chi}) = \frac{i^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi)$$

В **Разделе** доказываются утверждения, эквивалентные основной и расширенной гипотезам Римана.

Теорема 18. Следующие условия эквивалентны:

1) для нулей ζ-функции имеет место гипотеза Римана;

2) имеет место следующая ассимптотическая оценка:

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{4.1}$$

где ε - произвольная положительная величина.

Теорема 19. Следующие условия эквивалентны:

1) для нулей L-функции Дирихле $L(s,\chi)$, где χ — неглавный характер Дирихле, имеет место расширенная гипотеза Римана;

2) имеет место следующая ассимптотическая оценка:

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \tag{4.3}$$

где ε — произвольная положительная величина.

Теорема 20. Пусть степенной ряд $g(z)$, отвечающий логарифмической производной ζ - функции Римана

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)z^n, \tag{4.4}$$

во всех точках единичной окружности $z = e^{2\pi n\varphi}$, где φ— рациональное число, не равное 0, ассимптотически ведет себя следующим образом:

$$g(re^{2\pi n\varphi}) = O((1-r)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}),\ r \to 1-0 \tag{4.5}$$

где ε — произвольное положительное число; а в точке $z = 1$ имеет место оценка

$$g(x) = \frac{1}{1-x} + O((1-r)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}),\ r \to 1-0 \tag{4.6}$$

Тогда имеет место расширенная гипотеза Римана. [9]

Теорема 21. Пусть для любого рационального φ, не равного 0, имеет место оценка

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n)e^{2\pi in\varphi} = O(1),$$

где константа не зависит от x. Тогда имеет место расширенная гипотеза Римана.[10]

Заключение.В бакалаврской работе рассматривались вопросы об аналитическом продолжении дзета-функции и L-функции Дирихле, об их функциональных уравнениях, которые помогают раскрыть поведении дзета-функции и L - функции на комплексной плоскости. Далее были доказаны утверждения, эквивалентные основной и расширенной гипотезам Римана.

Гипотеза Римана встречается не только в аналитической теории чисел, но и в других областях математики, например, в криптографии. .

В 1896 году Адамар и Валле - Пуссен независимо доказали, что нули дзета-функции не могут лежать на прямых $Re\, s = 0$ и $Re\, s = 1$.

В 1900 году Давид Гильберт включил гипотезу Римана в список 23 нерешённых проблем как часть восьмой проблемы, совместно с гипотезой Гольдбаха.

В 1914 году Харди доказал, что на критической линии находится бесконечно много нулей, а позже совместно с Литлвудом дал нижнюю оценку доли нулей, лежащей на критической линии, которую потом улучшали разные ма-

[9] Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeros of Riemann's zela-functions an the critical line. Math.Zs. - 1921. - C. 313—317.

[10] Littlewood J.E. On the Riemann seta-function. Proc.Lond.Math.Soc. - 1921. - C. 299 - 301.

тематики.Некоторые нетривиальные нули располагаются экстремально близко друг к другу. Это свойство известно как «явление Лемера».

Титчмарш и Ворос в 1987 году показали, что дзета-функция может быть разложена в произведение через свои нетривиальные нули в разложение Адамара.

На 2004 год проверены более 10^{13} первых нулей.