МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Компьютерной алгебры и теории чисел

Аппроксимация Паде

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

студентки 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Суйнышевой Анастаии Олеговны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент В.В. Кривобок

Зав. кафедрой
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент А.М. Водолазов

Саратов 2019

Введение. В транциндентной теории чисел хорошо известна роль приблежения этих чисел рациональными числами.

Так в 1844 г. Жозен Лиувилль изучил приблежение алгебраических чисел (число $\alpha \in R, C$ называется алгебраическим числом над полем R, C, если существует многочлен $f(x) \in R\left[x\right], C\left[x\right], f(x) \neq 0$, имеющий число своим корнем) рациональными числами; показал, что алгебраические числа не могут слишком хорошо приближаться рациональными числами.

Коротко говоря, аппроксимация Паде представляет функцию в виде отношения двух полиномов. Коэффициенты этих полиномов определяются коэффициентами разложения в ряд Тейлора. Таким образом, если задано разложение в степенной ряд

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots ,$$

то с помощью некой техники аппроксимации рациональной функции, можно оптимальным образом выбрать коэфициэнты a_i, b_i и получить аппроксимацию Паде вида:

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_M z^M}.$$

Использование этой простой идеи и ее обобщения привело ко многим результатам и превратилось в настоящее время практически в фундоментальный метод исследовния.

В данной работе представлено четыре раздела. В первом разделе собраны необходимые определения из теории аппроксимации Паде, а также рассматриваются аппроксимации Паде экспоненциальной функции e^z. Во втором разделе показывается связь аппроксимации Паде с непрерывными дробями, а так же, с непрерывными дробями, связанные с рядом Тейлора. В третьем разделе рассмотрены методы и алгоритмы интерполяции рациональной функции, которая называется многоточечной аппроксимацией Паде. В четвертом разделе показана связь аппроксимаций Паде с матрицами.

Основное содержание работы:

В **Разделе 1** собраны необходимые определения из теории аппроксимации Паде, а также рассматриваются аппроксимации Паде экстремальной функции.

Пусть дан степенной ряд вида

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i. \tag{1}$$

Ряд (1) является исходным объектом любого анализа, использующего аппроксимации Паде.

Определение 1.1. Аппроксимации Паде называется рациональная функция вида:

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_l z^l}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m}, \tag{2}$$

разложение которой в ряд Тейлора в нуле совпадает с разложением (1).

Имеем $L+1$ коэффициентов в числителе и $M+1$ коэффициентов в знаменателе. Для определенности положим $b_0 = 1$, тогда в знаменатели получим M коэффициентов. Всего получим $L+M+1$ коэфициентов. То есть в общем случае коэффициенты тейлоровского разложения функции $[L/M]$ при степенях $1, z, z^2, \ldots, z^{L+M}$ совпадают с соответствующими коэффициентами ряда (1) или другими словами:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_l z^l}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m} + O(z^{L+M+1}). \tag{3}$$

Определение 1.2. Уравнение (6)

$$\begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} \cdots & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+2} \cdots & c_{L+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{pmatrix} \tag{6}$$

и (7)

$$Q^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3}\cdots & c_L & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4}\cdots & c_{L+1} & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ c_{L-1} & c_L & c_{L+2}\cdots & c_{L+M-2} & c_{L+M-1} \\ c_L & c_{L+1}\cdots & c_{L+M-1} & c_{L+M} & \\ z^m & z^{M+1}\ldots & z & 1 & \end{vmatrix} \tag{7}$$

называются уравлениями Паде. В случае разрешимости системы (6), уравнения Паде определяют коэфициенты числителя и знаменателя аппроксимации Паде (2).

Определение 1.3. Набор аппроксимаций Паде принято записывать в соответствии с таблицей 1.1, которая называется таблицей Паде.

Таблица 1.1

M | L	0	1	2	$\cdots$
0	[0/0]	[1/0]	[2/0]	$\cdots$
1	[0/1]	[1/1]	[2/1]	$\cdots$
2	[0/2]	[1/2]	[2/2]	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Явный вид аппроксимации Паде для функции e^z вывел Шарль Эрмит при доказательстве трансцендентности числа e.

Из курса математического анализа извествого разложения функции e^z в ряд Тейлора:

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots. \tag{9}$$

Обозначим коэффициенты тейлоровского разложения (9) через $c_i = \frac{1}{i!}$. Эти коэффициенты используются для того чтобы найти числители и знаменатели соответствующих аппроксимаций Паде. Для этого нужно вычислить знаменатель $Q^{[L/M]}(z)$, а числитель находится с помощью преобразования $e^z = \frac{1}{e^z}$.

Запишем определитель $Q^{[L/M]}(z)$ для функции e^z:

$$Q^{[L/M]}(z) = \begin{vmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \cdots & \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \cdots & \frac{1}{(L+1)!} & \frac{1}{(L+2)!} \\ \cdots & & & & \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \cdots & \frac{1}{(L+M-1)!} & \frac{1}{(L+M)!} \\ z^M & Z^{M-1} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Вычисляя этот определитель, получим следующую формулу:

$$Q^{[L/M]}(z) = C(L/M) \sum_{i=0}^{M} \frac{(L+M-j)!}{(L+M)} \cdot \frac{M!}{(M-j)} \cdot \frac{(-z)^j}{j!} =$$

$$= C(L/M) \cdot F_1(-M, -L-M; -z).$$

В этой формуле

$$C(L/M) = Q\,[L/M]\,(0) = \begin{vmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \cdots & \frac{1}{L!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \cdots & \frac{1}{(L+1)!} \\ \cdots & & & \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \cdots & \frac{1}{(L+M-1)!} \end{vmatrix}.$$

Такой определитель называется определителем Геккеля.

Также можно получить формулу для вычисления числителя аппроксимации Паде:

$$p^{[L/M]}(z) = C(L/M) \cdot F_1(-L, -L-M; -z),$$

тогда аппроксимация Паде $[L/M]$ функции e^z представима в виде

$$[L/M] = \frac{F_1(-L, -L-M; -z)}{F_1(-L, -L-M; -z)}. \qquad (11)$$

В **Разделе 2** показывается связь аппроксимации Паде с непрерывными дробями, а так же, с непрерывными дробями, связанные с рядом Тейлора.

Определение 2.1. Непрерывной (цепной) дробью в общем случае называют следующее выражение:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ldots}}}, \tag{12}$$

где a_i, b_i — элементы непрерывной дроби, которые являются либо вещественными, либо комплексными числами.

Определение 2.6. Непрерывные дроби называются эквивалентными, если у них все соответствующие дроби равны.

Замечание 2.7. По определению (2.6), эквивалентные дроби имеют одну и ту же величину. Например, преобразование

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ldots}}} = \frac{(a_1/b_1)}{1 + \frac{(a_2/b_1 b_2)}{1 + \frac{(a_3/b_2 b_3)}{1 + \ldots}}} \tag{16}$$

являются эквивалентным, так как сохраняет величины подходящих дробей.

Рассмотрим, как формальный степенной ряд преобразовывается в непрерывную дробь.

Пусть дан ряд:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots. \tag{18}$$

Путем неких преобразований, приходим к непрерывной дроби, соответствующей ряду (18), представленную в более общем виде:

$$f(z) = b_0 + \frac{a_1 z}{b_1} + \frac{a_1 z}{b_1} + \frac{a_1 z}{b_1} + \ldots. \tag{21}$$

Подходящие дроби непрерывной дроби (21) находятся из формулы в теореме Лиувилля:

$$\frac{A_0}{B_0} = b_0; \quad \frac{A_1}{B_1} = b_0 + \frac{a_1 z}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1 z}{b_1};$$

Тогда

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{b_i A_{i-1} + a_i A_{i-2} z}{b_i B_{i-1} + a_i B_{i-2} z}, i = 2, 3, \ldots \tag{22}$$

Имеем тейлоровское разложение функции e^z:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots. \tag{24}$$

Также вспомним свойство функции e^z:

$$e^z = (e^{-z})^{-1}. \tag{25}$$

Путем неких преобразований, получим общий вид ряда, который записывается так:

$$f(z) = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 z}{b_2} + \frac{a_3 z}{b_3} + \ldots \tag{28}$$

Числители, знаменатели подходящих дробей (28) находится из теоремы Лиувилля

$$A_1(z) = a_1, A_2(z) = b_2 a_1, \ldots, A_{i+1}(z) = b_{i+1} A_i(z) + a_{i+1} z A_{i-1}(z), i = 2, 3, \ldots \tag{29}$$

$$B_1(z) = a_1, B_2(z) = b_1 b_2 + a_2 z, \ldots, B_{i+1}(z) = b_{i+1} B_i(z) + a_{i+1} z B_{i-1}(z), i = 2, 3, \ldots$$

Аппроксимации Паде ряда (18) и подходящие дроби для дроби (24) связаны соотношения:

$$[M/M]_f(z) = \frac{A_{2M}(z)}{B_{2M}(z)},$$

$$[M/M+1]_f(z) = \frac{A_{2M+1}(z)}{B_{2M+1}(z)}.$$

Вывод: (21) предпочтительнее в тех плоскостях z — плоскости, где $|f(z)|$ возрастает, при возрастании $|z|$, а (28) там, где $|f(z)|$ убывает.

В **Разделе 3** рассмотрены методы и алгоритмы интерполяции рациональной функции, которая называется многоточечной аппроксимацией Паде.

Рациональная функция, значения которой в ряде точек совпадают со значениями данной функции, называется многоточечной аппроксимацией Паде. Соответствующая общая задача интерполяции рациональными функциями называется задачей Коши - Якоби.

Многоточечные аппроксимации Паде называют также рациональными интерполяциями, N - точечными аппроксимациями или аппроксимациями Ньютона - Паде в зависимости от контекста. В случае кратных точек (узлов) интерполяции иногда говорят об осцилляторной интерполяции.

Формула Ньютона.

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} f[z_0, z_1, \ldots, z_i] \prod_{i=1}^{k=0} (z - z_k) + f[z_0, z_1, \ldots, z_n, z] \prod_{k=0}^{n} (z - z_k). \quad (34)$$

При $n > 0$ тождество (34) представляет функцию $f(z)$ в виде суммы полинома Ньютона и остаточного члена. Отсюда можно вывести формальное тождество

$$f(z) = f[z_0] + (z - z_0) f[z_0, z_1] + (z - z_0)(z - z_1) f[z_0, z_1, z_2] + \ldots . \quad (35)$$

Равенство здесь действительно имеет место во всех случаях, когда остаточный член в (34) стремится к нулю. В важном частном случае $z_1 = z_2 = \ldots = z_i = \ldots$ в формулах (34) и (35) принимают вид:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \ldots = \quad (36)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(z - z_0)!}{i!} f^{(i)}(z_0) + \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^n (\xi - t)}. \quad (37)$$

Соотношение (37) справедливо при условии, что контур Γ охватывает точки z, z_0 и функция f аналитична внутри и непрерывна на Γ, оно представляет f в виде отрезка ряда Тейлора и соответствующего остатка. Для краткости введем еще следующее обозначение:

$$f_{i,j} = f[z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j], j \geq i. \quad (38)$$

В этих терминах формальное разложение Ньютона (34) имеет вид:

$$f(z) = f(z_0) + f_{0,1}(z - z_0) + f_{0,2}(z - z_0)(z - z_1) + \dots \tag{37}$$

Перейдем теперь к рассмотрению интерполяции данной функции посредством рациональных дробей. Основная задача состоит в том, чтобы найти рациональную дробь

$$r^{[L/M]}(z) = u^{[L/M]}(z)/v^{[L/M]}(z), \tag{39}$$

такую, что $u^{[L/M]}(z)$ и $v^{[L/M]}(z)$ - полиномы степени не выше L и M соответственно, и справедливы равенства :

$$r^{[L/M]}(z_i) = f(z_i), i = 0, 1, 2, \dots L + M. \tag{40}$$

Предположим, что при данных L и M

$$u^{[L/M]}(z) = \sum_{i=0}^{L} u_j z^j, v^{[L/M]}(z) = \sum_{k=0}^{M} v_k z^k. \tag{41}$$

решение этой основной задачи существует.

Предположим также, что нормировка $v_0 = 1$ является допустимой. Подставляя (39) и (41) в (40), получим $L + M + 1$ линейных уравнений относительно $L + M + 1$ неизвестных коэффициентов $u_0, u_1, \dots, u_L, v_1, \dots, v_M$.

Обычно такая система имеет единственное решение, которое определяет коэффициенты числителя и знаменателя (39) однозначно с точностью до общего числового множителя. В противном, случае говорят, что система является вырожденной. Если система уравнений вырождена, но совместна, и $u^{[L/M]}(z) \neq 0$, то полиномы $u^{[L/M]}(z)$ и $v^{[L/M]}(z)$ имеют нетривиальный общий множитель.

Алгоритм Кронекера. В качестве начальных данных в данном алгоритме используются коэффициенты интерполяционного полинома Ньютона $L + M = m$.

Положим

$$p^{[m/0]}(z) = \sum_{i=0}^{m} f[z_0, z_1, \ldots, z_i] \prod_{k=0}^{i-1}(z - z_k), \tag{45.1}$$

$$q^{[m/0]}(z) = 1 \tag{45.2}$$

и дополнительно

$$p^{[m+1/-1]}(z) = \prod_{k=0}^{m}(z - z_k), \tag{46.1}$$

$$q^{[m+1/-1]}(z) = 0. \tag{46.2}$$

Рекуррентные соотношения имеют вид

$$p^{[m-j/-j]}(z) = (\alpha_j z + \beta_j)p^{[m-j+1/j-1]}(z) - p^{[m-j+2/j-2]}(z), \tag{47.1}$$

$$q^{[m-j/-j]}(z) = (\alpha_j z + \beta_j)q^{[m-j+1/j-1]}(z) - q^{[m-j+2/j-2]}(z). \tag{47.2}$$

Постоянные α_j и β_j определяются из условия, что степень многочлена в правой части (47.1) не выше $m - j$. После этого многочлены (47.1) и (47.2) интерпретируются как числитель и знаменатель следующей (j-той) аппроксимации.

Алгоритм Кронекера особенно полезен в случаях, когда применима точная арифметика и любой тест должен однозначно решать вопрос о вырожденности.

Обобщенный QD - алгоритм (алгоритм частных и разностей). QD-алгоритм дает представление аппроксимации Паде в виде непрерывной дроби на основе известных коэффициентов ряда Тейлора. Рассмотрим обобщение этого алгоритма на случай, когда узлы интерполяции могут быть различны.

Пусть,

$$g_0(z) = \frac{c_0}{1} - \frac{q_1^0(z - z_0)}{1} - \frac{e_1^0(z - z_1)}{1} - \frac{q_2^0(z - z_2)}{1} - \frac{e_2^0(z - z_3)}{1} - \ldots \tag{54}$$

непрерывная дробь типа Тиле. Коэффициенты ее n-й подходящей дроби могут быть определены исходя из данных коэффициентов интерполяционного полинома Ньютона

$$\pi_n(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)(z - z_1) + \ldots + c_n \prod_{i=0}^{n-1}(z - z_i)$$

с помощью следующего алгоритма.

Исходные данные. При $J = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ pологаем

$$Z_1^j = z_{J+1} - z_J, \tag{55.1}$$

$$e_0^{J+1} = 0, \tag{55.2}$$

$$q_1^J = \left[Z_1^J + \frac{c_J}{c_{J+1}} \right]^{-1}, \tag{55.3}$$

$$e_1^J = -q_1^J - q_1^{J+1}(q_1^J Z_1^j - 1). \tag{55.4}$$

Рекуррентные соотношения. При $J = 0, 1, 2, \ldots$ и $i = 2, 3, \ldots$ величины q_i^J, c_i^J определяются следующими рекуррентными формулами:

$$Z_i^J = z_{J+2i-1} - zJ + 2i - 2, \tag{56.1}$$

$$q_i^J = \left[Z_i^J - \frac{e_{i-1}^J}{e_{i-1}^J - q_{i-1}^J} \cdot \frac{(q_{i-1}^{J+1} + e_{i-2}^{J+1})(Z_i^J e_{i-1}^{J+1} - 10}{q_{i-1}^{J+1} \cdot e_{i-1}^{J+1}} \right]^{-1}, \tag{56.2}$$

$$e_i^J = -q_i^J + (Z_i^J q_i^J - 1)(e_{i-1}^{J+1} + q_i^{J+1})(Z_i^J e_{i-1}^{J+1} - 1)^{-1}. \tag{56.3}$$

(предполагается, что все эти величины конечны)

Отметим, что алгоритм допускает совпадение узлов интерполяции; в этом случае он сводится к основному варианту QD - алгоритма.

В приведенном выше обзоре отдавали предпочтение тем методам интерполяции, которые в предельном случае совпадения всех узлов сводятся к аппроксимации Паде.

Этим мы завершаем рассмотрение основных алгоритмов для N - точечной аппроксимации Паде.

В **Разделе 4** показана связь аппроксимаций Паде с матрицами.

Определение 4.3. Правая аппроксимация Паде для ряда $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ с квадратными матрицами коэффициентов c_i определяется соотношением:

$$f(z)^R B^{[L/M]}(z) -^R A^{[L/M]}(z) = O(z^{L+M+1}) \tag{68}$$

и

$$^R B^{[L/M]}(0) = I, \tag{69}$$

так что:

$$^R[L/M] =^R A^{[L/M]}(z) \left\{ ^R B^{[L/M]}(z) \right\}^{-1}. \tag{70}$$

Левая аппроксимация Паде определяется аналогично с использованием левого умножения.

Теорема 4.4. *Пусть c_i-квадратные матрицы порядка d и*

$$\begin{vmatrix} c_{L-M+1} & \cdots & c_L \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_L & \cdots & c_{L+M-1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{71}$$

(слева-определитель порядка Md), тогда как правая, так и левая аппроксимация Паде существуют.

Доказательство. Согласно (68), знаминатель $^R B^{[L/M]}(z)$ определяется симтемой уравнений:

$$\begin{pmatrix} c_L & c_{L-1} & \cdots & c_{L-M+1} \\ c_{L+1} & c_L & \cdots & c_{L-M+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{L+M-1} & c_{L+M-2} & \cdots & c_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{L+1} \\ -c_{L+2} \\ \vdots \\ -c_{L+M} \end{pmatrix}. \tag{72}$$

□

Эта запись отражает блочную структуру системы. Столбец в правой части представляет собой матрицу с d столбцами, так что (72) включает d групп уравнений (по M уравнений в каждой) и представляет линейную систему порядка Md. Соотношение (70) является условием однозначной разрешимости этой системы.

Теорема 4.5. *Правая и левая аппроксимации Паде совпадают, хотя могут иметь различные представления.*

Доказательство. Согласно соотношениям (67) - (69) имеем:

$$^{L}[L/M] =^{R} [L/M] + O(z^{L+M+1}).$$

Умножая справа на $^{R}Q^{[L/M]}(z)$ и слева $^{L}Q^{[L/M]}(z)$, получаем:

$$^{L}Q^{[L/M]}(z)^{R}P^{[L/M]}(z) -^{L} P^{[L/M]}(z)^{R}Q^{[L/M]}(z) = O(z^{L+M+1}) = 0,$$

поскольку в левой части нет степеней порядка z^{L+M+1} и выше. Утверждение теоремы получается отсюда делением. Это утверждение не содержит насамом деле ничего парадаксльного.

Например, два различных выражения $\frac{1}{2} \times 6$ и $9 \times \frac{1}{3}$ представляют одно и то же число. Чтобы проиллюстрировать матричный случай, вернемся к (69).

Находя явный вид матриц, обратных к $^{R}Q(z)$ и $^{L}Q(z)$ из (69) и (71), получим:

$$^{R}[1/1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2z & 1+2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+z}{1-z^2} & 0 \\ \frac{z}{1-z^2} & \frac{1-z}{1-z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 \\ \frac{-z}{1-z^2} & \frac{1+2z}{1+z} \end{pmatrix},$$

$$^{L}[1/1] = \begin{pmatrix} \frac{1+z}{1-z^2} & 0 \\ \frac{-z}{1-z^2} & \frac{1-z}{1-z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-z} & 0 \\ \frac{-z}{1-z^2} & \frac{1+2z}{1+z} \end{pmatrix}.$$

Это показывает, что правая и левая аппроксимации Паде в данном случае действительно совпадают, и подтверждает, что каждая из них аппроксимирует данную матрицу до порядка z^2.

$\square$

Заключение. В ходе данной работы были изложены необходимые определения из теории аппроксимации Паде, а также рассмотренны аппроксимации Паде экспоненциальной функции e^z. Показана связь аппроксимации Паде с непрерывными дробями, а так же, с непрерывными дробями, связанные с рядом Тейлора.

Рассмотрены методы и алгоритмы интерполяции рациональной функции, которая называется многоточечной аппроксимацией Паде. А так же показана связь аппроксимаций Паде с матрицами.