МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

"САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Задача Бомбиери для конформных отображений круга

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки ***2*** курса ***227*** группы

направления ***02.04.01 – Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Арбузовой Дарьи Алексеевны

Научный руководитель
зав.кафедрой, д.ф.-м.н, профессор ____________________________ Д.В.Прохоров

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________________ Д.В.Прохоров

Саратов 2019

Введение. Введём в рассмотрение класс S, голоморфных и однолистных функций в единичном круге $D = \{z: \ |z| < 1\}$:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

С помощью теоремы 6.2. Pommerenke [4] запишем линейную версию цепочки Лёвнера. $f(z) = f(z, 0)$ - начальное значение цепочки отображений

$$f(z,t) = e^t(z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \ldots), t \geq 0.$$

Каждая функция $f(z,t)$ является решением дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = z\frac{1 + k(t)z}{1 - k(t)z}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Функция $k(t)$ имеет вид $e^{i\theta(t)}$, где $\theta(t)$ - вещественная, кусочно-непрерывная функция на $[0, \infty)$. В 1967 году E.Bombieri [5] поставил задачу нахождения чисел

$$\sigma_{mn} = \lim_{a_m \to m} \inf \frac{n - \text{Re } a_n}{m - \text{Re } a_m}, \ m, n \geq 2.$$

Будем называть σ_{mn} числами Bombieri. В своей работе он предположил, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$, где

$$B_{mn} = \min_{\theta \in [0, 2\pi)} \frac{n \sin\theta - \sin(n\theta)}{m \sin\theta - \sin(m\theta)}.$$

Данная магистерская работа посвящена численному опровержению гипотезы Bombieri для области $0.5m \leq n \leq 0.8194m, \ m \leq 81$.

Выбор темы обусловлен возросшим интересом к задаче в 2016-2017 годах. Задачи работы заключаются в следующем:

- вывести вариационные формулы в классе S;
- изучить поиск $\sigma_{32}, \ \sigma_{42}$, предложенный Leung;
- рассмотреть различные способы нахождения чисел Bombieri;
- провести численный эксперимент поиска B_{mn}.

Основная часть. Основная часть работы состоит из 4 разделов, а именно:

- вывод второй вариационной формулы коэффициента a_n;

- числа Bombieri σ_{32} и σ_{42};
- случаи $\sigma_{mn} < B_{mn}$;
- численное опровержение гипотезы Bombieri.

Первая часть работы посвящена рассмотрению коэффициентов функции $f(z,t)$:

$$a_n(t) = e^t n + \varepsilon v_n(t) + \varepsilon^2 q_n(t) + O(\varepsilon^3),\ n > 1,\ a_1(t) = e^t.$$

В этом разделе показано, что каждый коэффициент $v_n(t)$ является мнимым, а каждый $q_n(t)$ - действительным. Таким образом,

$$n - \mathrm{Re}\ a_n(0) = -\varepsilon^2 q_n(0) + O(\varepsilon^3).$$

Кроме того, получены $q_n(t)$, необходимые для рассуждений в следующих главах: $q(z) = q_2 z^2 + q_3 z^3 + q_4 z^4 + q_5 z^5 + \ldots$.

$$q_2 = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \theta^2(x)dx;$$

$$q_3 = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(2+U_1(x))\theta^2(x)dx - \frac{3}{4}\mu_0^2 - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x}^{1}\theta(x)\theta(t)dtdx =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1}(1+x)\theta^2(x)dx - \frac{3}{4}\left(\int\limits_{-1}^{1}\theta(x)dx\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\int\limits_{-1}^{1}\theta(x)dx\right)^2 =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{1}(1+x)\theta^2(x)dx - \left(\int\limits_{-1}^{1}\theta(x)dx\right)^2;$$

$$q_4 = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(3+2U_1(x)+U_2(x))\theta^2(x)dx - \frac{3}{4}(4\mu_0^2 + 2\mu_0\mu_1) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x}^{1}\theta(x)\theta(t)(2+x+t+2t)dtdx = -\int\limits_{-1}^{1}(2x^2+2x+1)\theta^2(x)dx -$$

$$-\frac{3}{4}(4\mu_0^2+2\mu_0\mu_1)-\frac{1}{2}\left(\mu_0^2+\mu_0\mu_1+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x}^{1}2t\theta(x)\theta(t)dtdx\right)=$$

$$=-\int\limits_{-1}^{1}(2x^2+2x+1)\theta^2(x)dx-\frac{7}{2}\mu_0^2-2\mu_0\mu_1-\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x}^{1}t\theta(x)\theta(t)dtdx;$$

$$q_5=-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}(4+3U_1(x)+2U_2(x)+U_3(x))\theta^2(x)dx-\frac{3}{4}(10\mu_0^2+\mu_1^2+10\mu_0\mu_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x}^{1}\theta(x)\theta(t)(1+6t+2x+3tx+\frac{15}{2}t^2+\frac{3}{2}x^2)dtdx=$$

$$=-\int\limits_{-1}^{1}(4x^3+4x^2+x+1)\theta^2(x)dx-\frac{3}{4}(10\mu_0^2+\mu_1^2+10\mu_0\mu_1)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{x}^{1}\theta(x)\theta(t)(1+6t+3tx+2x+\frac{15}{2}t^2+\frac{3}{2}x^2)dtdx.$$

Используя $\theta(x)=\sum\limits_{k=0}^{N}a_jp_j(x)$, можно вычислить собственные значения квадратичной формы с помощью конечной симметричной матрицы M размерности $(N+1)\times(N+1)$. Диагональные элементы M:

$$M(1,1)=8,\ M(j,j)=4,\ j\geq 2.$$

Элементы над главной диагональю:

$$M(1,2)=3\sqrt{3},\ M(j,j+1)=4j/\sqrt{4j^2-1}, j\geq 2,$$

$$M(j,j+2)=(2j+1)/\sqrt{(2j-1)(2j+3)}, j\geq 1.$$

Для этой матрицы M существует скопление собственных значений распределенных внутри интервала $(1,10)$ и дискретное значение $\sigma=19.97714\ldots$ Когда N больше 10, собственное значение меньше 1. Чтобы получить $0.97040\ldots$, требуется взять $N>25$. Это значение близко к полученному Прохоровым и

Васильевым [14] значению $\sigma_{24} = 0.96955$. Заметим, что $1/\sigma = 0.050057$ очень близко к σ_{42}, полученному авторами в той же работе [14].

В следующей главе рассмотрены числа Bombieri σ_{32} и σ_{42}. В 2001 году R.Greiner и O.Roth[12] получили число Bombieri $\sigma_{32} = \dfrac{e-1}{4e}$. Это следствие оценки

$$\frac{3 - \operatorname{Re} a_3}{2 - \operatorname{Re} a_2} \leq \frac{4e}{e-1},$$

полученной для функций из класса S. В работе показано, что эту константу можно рассмаривать как наибольшее собственное значение числа Rayleigh q_3/q_2 [13].

В работе Прохорова Д.В. и Васильева А.Ю. [14] число Bombieri σ_{42} получено с помощью оптимального управления [15]. В магистерской продемонстрировано, что константу можно вычислить численно как наибольшее собственное значение простой симметричной матрицы[16]:

$$\begin{pmatrix}
2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3\cdot 5}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & \frac{2}{\sqrt{3\cdot 5}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{5\cdot 7}} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5\cdot 7}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{7\cdot 9}} & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{7\cdot 9}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{9\cdot 11}} & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{9\cdot 11}} & 0 & \frac{6}{\sqrt{11\cdot 13}} & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{11\cdot 13}} & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}$$

Третий раздел состоит из случаев нарушения гипотезы Bombieri:

$$\sigma_{mn} < B_{mn}.$$

Показано, что гипотеза Bombieri $\sigma_{mn} = B_{mn}$ не справедлива для:

1. $m > 2,\ n = 2$;

2. $m > 3$ и нечетного, $n = 3$.

Для этого определены числа:

$$L_n(\tau) = \frac{1}{\sin\ \tau}\sum_{k=0}^{n-2}(n-1-k)\sin((k+1)\tau) = \frac{n\sin\ \tau - \sin(n\tau)}{2\sin\ \tau - \sin(2\tau)}.$$

Откуда B_{mn}:

$$B_{mn} = \min_{\tau}\frac{n\sin\ \tau - \sin(n\tau)}{m\sin\ \tau - \sin(m\tau)} = \min_{\tau}\frac{L_n(\tau)}{L_m(\tau)}.$$

Из неравенства $|\sin(kx)| \leq k|\sin\ x|\ \forall x \in \Re,\ k > 0, k \in \aleph$:

$$L_n(\tau) = \frac{1}{\sin\ \tau}\left|\sum_{k=0}^{n-2}(n-1-k)\sin((k+1)\tau)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-2}(n-1-k)(k+1)$$

на $[0, 2\pi]$. Рассмотрев сумму, получим:

$$\sum_{k=0}^{n-2}(n-1-k)(k+1) = \frac{n^3-n}{6}$$

при $\tau = 0$. Следовательно, $L_n(\tau)$ не менее $\dfrac{6}{n^3-n}$, $n > 1$.

Теорема 3.1.1. [24]

Для всех $m > 2$, $\sigma_{m2} < B_{m2}$. Для всех нечетных $m > 3$, $\sigma_{m3} < B_{m3}$.

Введем обозначения:

$$A_n(t) = n - \frac{\sin(nt)}{\sin t},\ t \in \Re,\ n \in \aleph,$$

$$\varphi(n) = \frac{2n^2-4n+3}{n(n+1)}.$$

Теорема 3.2.1.[25]

Пусть $m > n \geq 2$ - целые и такие, что выполняется одно из следующих условий:

- m, n - нечетные;
- m, n - четные;
- m - нечетное, n - четное и $n \leq \dfrac{m+1}{2}$.

Тогда $B_{mn} = \dfrac{n^3 - n}{m^3 - m}$ и гипотеза Bombieri для таких пар не справедлива.

Для доказательства этой теоремы доказаны леммы:

Лемма 3.2.2.[25]

Для всех целых $n \geq 2$ и $t \in (0, \pi)$ справедливо, что

$$\frac{A_n(t)}{n^3 - n} \geq \frac{A_{n+2}(t)}{(n+2)^3 - (n+2)}.$$

Лемма 3.2.3. [25]

Для всех $t \in \Re$ и $N \geq 2$,

$$A_n(t) \geq 0,\ A_n(2\pi - t) = A_n(t).$$

Кроме того, A_n обращается в 0 только в $t = 2l\pi,\ l \in Z$, когда n четно и только для $t = l\pi,\ l \in Z$, когда n нечетно.

Следующий результат продемонстрирован в работе Efraimidis, Pastor.

Теорема 3.3.1. [26]

Пусть m, n целые и такие что m - нечетное, n - четное, $0.5 \leq n/m \leq 0.8194$ и $m \geq 81$. Тогда

$$\min_{x \in \Re} f(x) = f(0),$$

где

$$f(x) = \frac{n \sin x - \sin(nx)}{m \sin x - \sin(mx)},$$

$$f(0) = \frac{n^3 - n}{m^3 - m}.$$

В частности, гипотеза Bombieri не справедлива для всех таких пар.

В четвертом разделе реализовано опровержение гипотезы Bombieri для области $0.5 \leq n/m \leq 0.8194,\ m \leq 81$. В соответствии с рисунком 1 она имеет вид:

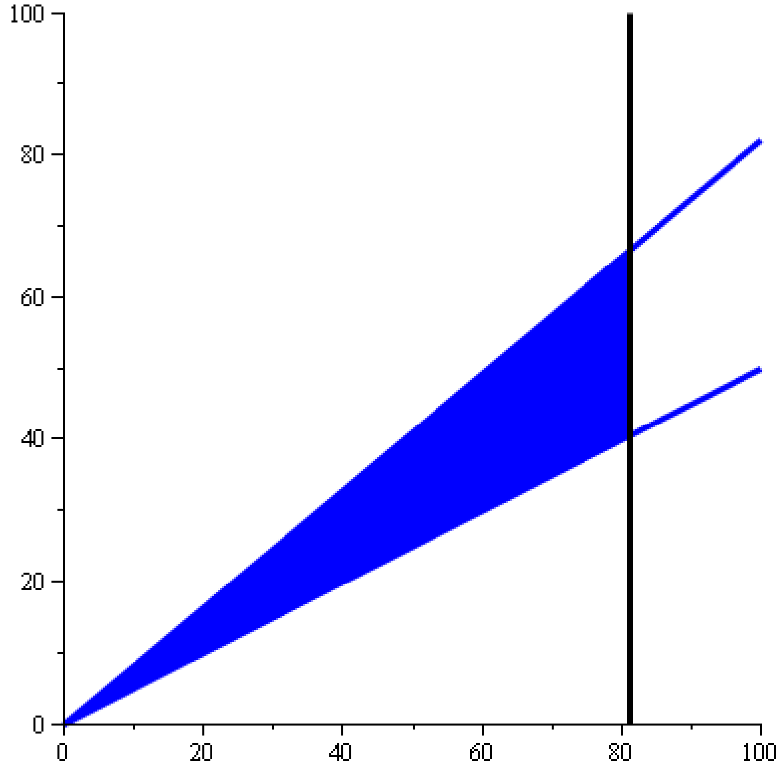

Рисунок 1

Численный эксперимент выполнен с помощью языка программирования C++ и состоит из:

1. поиска
$$B_{mn} = \min_x \frac{n \sin x - \sin(nx)}{m \sin x - \sin(mx)};$$
$$V_{mn} = \frac{(n-1)(2n^2 - 4n + 3)}{(m-1)(2m^2 - 4m + 3)};$$
2. сравнения B_{mn} и V_{mn}.

Такой алгоритм основан на результатах Leung [24], Efraimidis [25], Efraimidis и Pastor [26], по которым $\sigma_{mn} < B_{mn}$, если
$$B_{mn} > V_{mn}.$$

В результате получили опровержение гипотезы Bombieri для 1057 точек из рассмотренной области. Например,

```
B_2_1 = 0, V_2_1 = 0, sigma_2_1 < B_2_1
B_3_2 = 0.25, V_3_2 = 0.166667, sigma_3_2 < B_3_2
B_4_2 = 0.1, V_4_2 = 0.0526316, sigma_4_2 < B_4_2
```

```
B_4_3 = 0.4, V_4_3 = 0.315789, sigma_4_3 < B_4_3
B_5_3 = 0.2, V_5_3 = 0.136364, sigma_5_3 < B_5_3
B_6_3 = 0.114286, V_6_3 = 0.0705882, sigma_6_3 < B_6_3
B_5_4 = 0.5, V_5_4 = 0.431818, sigma_5_4 < B_5_4
B_6_4 = 0.285714, V_6_4 = 0.223529, sigma_6_4 < B_6_4
B_7_4 = 0.178571, V_7_4 = 0.130137, sigma_7_4 < B_7_4
B_8_4 = 0.119048, V_8_4 = 0.0822511, sigma_8_4 < B_8_4
B_7_5 = 0.357143, V_7_5 = 0.30137, sigma_7_5 < B_7_5
B_8_5 = 0.238095, V_8_5 = 0.190476, sigma_8_5 < B_8_5
B_9_5 = 0.166667, V_9_5 = 0.127907, sigma_9_5 < B_9_5
B_10_5 = 0.121212, V_10_5 = 0.0899796, sigma_10_5 < B_10_5
B_8_6 = 0.416667, V_8_6 = 0.367965, sigma_8_6 < B_8_6
B_9_6 = 0.291667, V_9_6 = 0.247093, sigma_9_6 < B_9_6
B_10_6 = 0.212121, V_10_6 = 0.173824, sigma_10_6 < B_10_6
B_11_6 = 0.159091, V_11_6 = 0.126866, sigma_11_6 < B_11_6
B_12_6 = 0.122378, V_12_6 = 0.0953984, sigma_12_6 < B_12_6
B_9_7 = 0.466667, V_9_7 = 0.424419, sigma_9_7 < B_9_7
B_10_7 = 0.339394, V_10_7 = 0.298569, sigma_10_7 < B_10_7
B_11_7 = 0.254545, V_11_7 = 0.21791, sigma_11_7 < B_11_7
B_12_7 = 0.195804, V_12_7 = 0.163861, sigma_12_7 < B_12_7
B_13_7 = 0.153846, V_13_7 = 0.126298, sigma_13_7 < B_13_7
B_14_7 = 0.123077, V_14_7 = 0.0993873, sigma_14_7 < B_14_7
B_10_8 = 0.509091, V_10_8 = 0.472393, sigma_10_8 < B_10_8
B_11_8 = 0.381818, V_11_8 = 0.344776, sigma_11_8 < B_11_8
B_12_8 = 0.293706, V_12_8 = 0.259259, sigma_12_8 < B_12_8
B_13_8 = 0.230769, V_13_8 = 0.199827, sigma_13_8 < B_13_8
B_14_8 = 0.184615, V_14_8 = 0.15725, sigma_14_8 < B_14_8
B_15_8 = 0.15, V_15_8 = 0.125954, sigma_15_8 < B_15_8
B_16_8 = 0.123529, V_16_8 = 0.102439, sigma_16_8 < B_16_8
B_11_9 = 0.545455, V_11_9 = 0.513433, sigma_11_9 < B_11_9
```

Заключение. Гипотезу Bombieri для функций из S, имеющих действительные коэффициенты в разложении Тейлора, доказали D.Bshouty и W.Hengartner[23]. В 2001 году R.Greiner и O.Roth[12] получили число Bombieri

$$\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e} < \frac{1}{4} = B_{32}.$$

В 2005 году Прохоров Д.В. и Васильев А.Ю.[5], применяя параметрическое представление однолистных функций интегралами уравнения Лёвнера и метод оптимального управления, нашли числа Bombieri $\sigma_{42} = 0.050057\ldots$, $\sigma_{24} = 0.969556\ldots$, $\sigma_{34} = 0.791557\ldots$.

В этой работе повторно получена вторая вариационная формула для коэффициентов a_n с помощью линейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = z\frac{1+k(t)z}{1-k(t)z}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Найдены коэффициенты $q(z) = q_2z^2 + q_3z^3 + q_4z^4 + q_5z^5 + \ldots$, необходимые для рассуждений в следующих главах.

Показано, что существует несколько способов нахождения чисел Bombieri, а именно повторно получены σ_{32}, σ_{42}.

В работе изучены результаты Leung, Efraimidis, Pastor. Они показали, что гипотеза Bombieri не справедлива для:

- $m > 2$, $n = 2$;
- $m > 3$ и нечетном, $n = 3$;
- m, n - нечетных;
- m, n - четных;
- m - нечетном, n - четном и $n \leq \dfrac{m+1}{2}$;
- m - нечетном, n - четном, $0.5 \leq n/m \leq 0.8194$ и $m \geq 81$.

С помощью программного пакета Mapple построена область для m и n. На языке программирования C++ проведен численный эксперимент, по которому гипотеза Bombieri о том, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$ не справедлива для m, n из области $0.5 \leq n/m \leq 0.8194$, $m \leq 81$.

Таким образом, все поставленные цели и задачи работы выполнены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Bieberbach,L. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheit-skreises vermitteln/L.Bieberbach// S.-B. Preuss. Akad. Wiss. -1916. -P.940-955.

2 de Branges,L. A proof of the Bieberbach conjecture/L. de Branges// LOMI Preprints E-5-84. -1984. -P.1-21.

3 de Branges,L. A proof of the Bieberbach conjecture/L. de Branges// Acta Math. -1985. -V.154. -№1-2. -P. 137-152.

4 Pommerenke, C. Univalent Functions/C.Pommerenke//Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht. -1975.

5 Bombieri,E. On the local maximum property of the Koebe function/E.Bombieri// Inv. Math. -1967. -V.4. -P. 26-67.

6 Leung, Y.J. The simple-zero theorem of support points in R/Y.J. Leung, G. Schober// Proceedings of the American Mathematical Society 105(3). -1989. -P. 603–608.

7 Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены/П.К. Суетин. -Наука. -2-е издание, 1979. -416 с.

8 Березин, И.С. Методы вычислений. В 2 т. Т.1/И.С. Березин, Н.П.Жидков. -М.: ГИФМЛ, 1962. -464 с.

9 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3.т. Т. 2/Г.М. Фихтенгольц. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. -810 с.

10 Peaslee, D.C. On an inequality of Bombieri/D.C. Peaslee, W. Coppel//Journal of the Australian Mathematical Society 9(3–4). -1969. -C.399–404.

11 Askey, R. Orthogonal Polynomials and Special Functions, SIAM Region Conference Series in Applied Mathematics, vol. 21/R. Askey//Philadelphia: SIAM. -1975.

12 Greiner, R. On support points of univalent functions and a disproof of a conjecture of Bombieri/R. Greiner, 0. Roth// Proc. Amer. Math. Soc. -129. -2001. -№12, -P. 3657-3664.

13 Benard, H. Les tourbillans cellulaires dans une nappe liquide/H. Benard//Revue generale des Sciences, pares et appliquees. -1900. —v. 11. — P. 1261—1271.

14 Prokhorov, D.V. Optimal control in Bombieri's and Tammi's conjectures/D.V.Prokhorov, A.Yu.Vasil'ev// Georgian Math.J.12(4). -2005. -P.743-761.
15 Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения/Л.С. Понтрягин. -Наука, 1982. -328 с.
16 Геворкян, Ю.Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике/Ю.Л. Геворкян, А.Л. Григорьев. -НТУ «ХПИ», 2002. -542 с.
17 Stakgold, I. Green's functions and boundary value problems, 3rd ed./I. Stakgold, M. Hoist//New York: Wiley. -2011.
18 Van Assche, W. Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions of the second kind/W. Van Assche// Journal of Computational and Applied Mathematics 37. -1991. -P. 237–249.
19 Van Assche, W. Compact Jacobi matrices: from Stieltjes to Krein and M(a, b)/W. Van Assche//Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse: Mathmatiques S5. -1996. -P. 195–215.
20 Chihara, T. On co-recursive polynomials/T. Chihara//Proceedings of the American Mathematical Society 8. -1957. -P. 899–905.
21 Slim, H. On co-recursive polynomials and their application to potential scattering/H. Slim//Journal of Mathematical Analysis and Applications 136. -1988. -P. 1–19.
22 Зорич, В. А. Математический анализ: Учебник. Ч. II/В. А. Зорич. -М.: Наука, 1984. 640 с.
23 Bshouty, D. A variation of the Koebe mapping in a dense subset of S/D. Bshouty, W. Hengartner// Canad. J. Math. -1987. -V.39. -№7. -P. 54-73.
24 Leung, Yuk-J. On the Bombieri numbers for the class S/ Yuk-J. Leung//The Journal of Analysis. –2016. –V.24. –№ 2. –P. 229–250.
25 Efraimidis, I. On the failure of Bombieri's conjecture for univalent functions/I. Efraimidis//ArXiv:1612.07242v2[math.CV]. -2016.
26 Efraimidis, I. Some more counterexamples for Bombieri's conjecture on univalent functions/I. Efraimidis, C. Pastor//ArXiv: 1710.10462.[math.CV]. -2017.