

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Математического анализа

**Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных
функций**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Короткова Иннокентия Станиславовича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.

А. М. Захаров

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Д. В. Прохоров

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

В данной дипломной работе рассматривается взаимное изменение начальных коэффициентов функций, определённых на верхней полуплоскости, когда уравнение Левнера имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{\omega - u}$$

с начальным условием $\omega|_{t=0} = z$, $z \in \Pi_z^+$.

В работе изучаются множества значений коэффициентов разложения функций $f(z) = z + c_1 z^{-1} + c_2^{-2} + \dots$ и будет выяснена особая роль коэффициента c_1 функции $f(z)$, оказывающего своей величиной регулирующее влияние на изменение других коэффициентов этой функции, а также на изменение некоторых простейших функционалов, характеризующих поведение функции $f(z)$ внутри её области определения.

Большое внимание работы уделено классу функций $f(z)$, нормированных условием $\lim(f(z) - z) = 0$ при $z \rightarrow \infty$ по Π_z^+ , играющему важную роль при исследовании плоских потенциальных течений.

Основа диплома опирается на научные труды И.А. Александрова, а в качестве материалов для исследования были рассмотрены статьи научных журналов и результаты работ сотрудников кафедры математического анализа.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа состоит из трёх глав и двенадцати параграфов основной части, содержания, введения, заключения, списка использованной литературы.

В первой главе диплома описывается уравнение Левнера для полуплоскости и его свойства на классах однолистных функций.

Вводится аналог уравнения Левнера для функций, голоморфных и однолистных в Π_ξ^+ , где $g(\xi)$ — любая из таких функций. Обозначим через Δ , $\Delta \subset \mathbb{C}_w$, образ Π_ξ^+ при её отображении функцией $g(\xi)$. Рассмотрим семейство всевозможных односвязных областей, получающихся исключением из Δ каких-либо n ($n = 1, 2, \dots$) попарно непересекающихся кусочно непрерывных кривых $L_1, \dots, L_n$.

Далее рассматривается некоторая область семейства $\Delta L^{(n)}$ и кривые L_k ($k = 1, \dots, n$), выделяющие её из Δ . Каждая кривая может быть бесконечным числом способов превращена в исчерпывающий её путь и задана в виде $w = \phi_k(\tau_k)$, где ϕ_k — кусочно непрерывная функция на некотором промежутке, скажем $0 \leq \tau_k < \tau_k^0$ ($0 < \tau_k^0 \leq \infty$), непрерывная справа в точках промежутка $[0, \tau_k^0)$. Не умаляя общности, можно считать, что $\phi_k(0) \in \Delta$, а $\phi_k(\tau_k^0) = \lim_{\tau_k \rightarrow \tau_k^0 \rightarrow 0} \phi_k(\tau_k) \in \partial\Delta$.

Теорема 1.1. Для семейства областей $\Delta L^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$), полученных из Δ проведением n кусочно гладких попарно непересекающихся разрезов, присоединенная функция $\xi = F^*(w, t)$, конформно отображающая область $\Delta(t)$ на Π_ξ^+ равномерно внутри $\Delta(t)$ дифференцируема по t везде на $[0, t_0]$, $t_0 = t(\tau_0)$, за исключением конечного числа точек, и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^*}{u_k - \omega}, \quad 0 < t < t_0,$$

где функции $\delta_k^* = \delta_k^*(t)$ неотрицательны и $\delta_1^*(t) + \dots + \delta_n^*(t) = 1$, а $u_k = u_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) — некоторые вещественные кусочно непрерывные функции на $[0, t_0]$.

Это уравнение мы и будем называть уравнением Левнера для полуплоскости, а в качестве начального условия интегрирования уравнения следует взять $\omega|_{t=0} = q(w)$, где $\xi = q(w)$ — отображение области Δ с разрезами $L_1, \dots, L_n$ на

Π_ξ^+ , или условие $\omega|_{t=0} = g^{-1}(w)$. Отметим, в частности, что если $\Delta = \Pi_w^t$, то $\omega|_{t=t_0} = w$, поскольку $g(\xi) = \xi$.

Классом H называется множество голоморфных однолистных в полуплоскости $\Pi_\xi^+ = \{\xi : \text{Im } \xi > 0\}$ функций $w = f(\xi)$, принимающих значения в Π_w^+ и нормированных условием $\lim_{\xi \rightarrow \infty} (f(\xi) - \xi) = 0$, $\xi \in \Pi_\xi^+$. Через $\tilde{H}$ обозначим совокупность всех функций $f(\xi) \in H$, отображающих Π_ξ^+ на односвязные области без внешних в Π_w^+ точек, которые получаются из Π_w^+ проведением конечного числа жордановых разрезов образующих попарно несвязные деревья, каждое из которых имеет один корень на мнимой оси.

Классом H_L называется совокупность всех функций $f(z) \in H$, допускающих при достаточно больших $R, R > 0$, в полуокрестности $K_R^+ = \{z : |z| > R, z \in \Pi_z^+\}$ точки $z = \infty$ разложение в ряд

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

Через H_L^r обозначим подкласс всех функций из H_L с вещественными коэффициентами в разложении $f(z)$.

Согласно А.И. Александрову [1] для принадлежности функции $f(z) \in H$ классу H_L^r необходимо и достаточно, чтобы дополнение области $\Delta = \{w : w = f(z), z \in \Pi_z^+\}$ до Π_w^+ было ограниченным.

Применительно к функциям класса $\tilde{H}$ из теоремы 1.1 и следующих за ней замечаний выводится

Теорема 1.2. Пусть $f(z) \in \tilde{H}$. Тогда существуют $t_0 > 0$ и вещественная функция $u = u(t)$, непрерывная везде на $[0, t_0]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, такие что $f(z) = \Phi(z, t_0)$.

Как обратная к теореме 1.2 имеет место

Теорема 1.3. Пусть $t_0, t_0 > 0$, — произвольное фиксированное число и $u = u(t)$ — вещественная кусочно непрерывная функция на $[0, t_0]$ без точек разрыва второго рода. Тогда решение уравнения

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{u - \omega},$$

удовлетворяющий начальному условию $\omega|_{t=0} = z, z \in \Pi_z^+$ представляет функцию $\omega = \Phi(z, t)$, которая при каждом $t \in (0, t_0]$ как функция $z, z \in \Pi_z^+$, принадлежит классу H_L^r .

Оставшаяся часть этой главы посвящена теоремам искажения и вращения в классе H и некоторым следствиям из этих теорем, которые дают в точной форме геометрические характеристики отображений в полуплоскости, а также речь будет идти об оценках кривизны линий уровня и их ортогональных траекторий на классе H .

Во второй главе изучается расслоение классов H_L, H_L^r на подклассы, а также взаимный рост $\{f\}_1$ и других коэффициентов на H_L^r .

Классом H_1 назовём подкласс класса H всех функций $f(z)$, для которых при $z \rightarrow \infty, z \in \Pi_z^+$, существует конечный предел $\lim z[f(z) - z] = \{f\}_1$.

Обозначим через $H(c_1)$ множество всех функций $f(z)$ из H_1 , для которых $\{f\}_1 = c_1$. Этим получаем "расслоение" класса H_1 на семейство его попарно непересекающихся подклассов $H(c_1)$, $-\infty < c_1 \leq 0$:

$$H_1 = \bigcup_{-\infty < c_1 \leq 0} H(c_1).$$

Аналогично имеем $H_L = \bigcup_{c_1} H_L(c_1)$, $H_L^r = \bigcup_{c_1} H_L^r(c_1)$, где обозначено $H_L(c_1) = H_L \cap H(c_1)$, $H_L^r(c_1) = H_L^r \cap H(c_1)$. Это позволяет свести изучение свойств функций из $H_L(H_L^r)$ к изучению соответствующих свойств на подклассах $H_L(c_1)(H_L^r(c_1))$.

Для дальнейших нужд вводятся два вспомогательных результата.

Лемма 2.1. Подкласс $\tilde{H}$ всюду плотен в H_L^r как в топологии равномерной сходимости внутри Π_z^+ , так и в топологии равномерной сходимости в окрестности точки $z = \infty$.

Лемма 2.2. Пусть последовательность $\{h_n(z)\}_{n=1}^\infty$ функций $h_n(z) \in \tilde{H}$, $h_n(z) = z + \sum_{k=1}^\infty c_k^n z^{-k}$, сходится к $h(z) \in H_L^r$, $h(z) = z + \sum_{k=1}^\infty c_k z^{-k}$, равномерно в некоторой окрестности точки $z = \infty$. Тогда при любом m , $m = 1, 2, \dots$, выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} c_m^n = c_m$.

Классом H^* назовём множество всех функций $f(z) \in H$, удовлетворяющих в Π_z^+ условию

$$f(z) = -\overline{f(-\bar{z})}.$$

Функции $w = f(z)$ класса H^* отображают Π_z^+ на области, симметричные относительно мнимой оси $\{w : \operatorname{Re} w = 0\}$.

Обозначим $H_L \cap H^* = H_L^*$ и введём подкласс $\tilde{H}^* = H^* \cap \tilde{H}$.

Для $\tilde{H}^* = H^*$ имеет место теорема, аналогичная теореме 1.2, причём уравнение Левнера, для функций класса $\tilde{H}^* = H^*$ имеет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega}{u^2 - \omega^2}$$

с такими же, как и в теореме 1.2 допустимыми функциями $u = u(t)$.

Теорема 2.1. На классе $H_L(c_1)$, $c_1 < 0$, функций

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

имеют место оценки

$$c_3 \leq \frac{c_2^2}{c_1} - \frac{1}{2}c_1^2,$$

$$c_5 \leq \frac{c_2^4}{c_1^3} + \frac{1}{2}c_1^3 - 2, 82c_2^2.$$

Первая оценка точная и равенство в ней реализуется функциями

$$f_0(z) = u_0 + [(z - u_0)^2 + 2c_1]^{1/2} \in H_L(c_1), \quad u_0 = \text{const}, \quad \text{Im } u_0 = 0$$

Оценки c_3, c_5 достаточно доказать для класса $\tilde{H}(c_1) = \tilde{H} \cap H(c_1)$. По теореме 2 $\Phi(z, t) \in H_L$, следовательно, $\Phi(z, t)$ допускает в окрестности бесконечности разложение

$$\Phi(z, t) = z + \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^{-k}$$

с действительными $x_k = x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$). Далее подставляя это разложение в интегральное уравнение

$$\omega = z + \int_0^t \frac{dt}{u - \omega}.$$

получим систему, последовательно интегрируя которую и применяя неравенства Буняковского и Гельдера мы получим нужные нам оценки.

Так как наибольшие значения правых частей в оценках c_3, c_5 достигаются при $c_2 = 0$, приходим к следующему результату.

Следствие. На классе $H_L^r(c_1)$, $c_1 < 0$, функций $f(z)$ с разложением $f(z) = z + c_1 z^{-1} + c_2^{-2} + \dots$ при $p = 1, 2$ имеют место точные оценки

$$c_{2p+1} \leq (-1)^p \frac{(2p-1)!!}{(p+1)!} c_1^{p+1}.$$

Что касается остальных коэффициентов, то их оценки в зависимости от c_1 даются следующей теоремой.

Теорема 2.2. На классе $H_L^*(c_1)$ функций $f(z) = z + c_1 z^{-1} + c_3 z^{-3} + \dots$ точные оценки коэффициентов c_{2p+1} ($p = 1, 2, \dots$) даются неравенствами

$$c_{2p+1} \leq (-1)^p \frac{(2p-1)!!}{(p+1)!} c_1^{p+1},$$

где экстремальной является функция $f(z) = (z^2 + 2c_1)^{1/2} \in H_L^*(c_1)$.

Доказательство приводится для подкласса $\tilde{H}^* = H^* \cap \tilde{H}$.

В следующем параграфе этой главы вводятся минорантные множества значений некоторых функционалов.

Теорема 2.3. Пусть $D_n(c_1), c_1, 0$ ($n = 2, 3, \dots$) означает множество значений $\{f\}_n$ на классе $H_L^r(c_1)$ функций $f(z)$. Тогда при любом $p = 1, 2, \dots$

$$D_2(c_1) = (-\infty, \infty)$$

и в обозначениях данных в следствии выполняется включение

$$D_{2p+1}(c_1) \supset (-\infty, A_{2p+1}].$$

Следующая теорема указывает области значений $\{f\}_n$ или достаточно ёмкие миноранты этих множеств на классе $H_L(c_1)$.

Теорема 2.4. Пусть $R_n = R_n(c_1)$ и $I_n = I_n(c_1)$ ($n = 2, 3, \dots$) означают множества значений $\operatorname{Re} \{f\}_n$ и $\operatorname{Im} \{f\}_n$ соответственно на классе $H_L(c_1), c_1 < 0$, функций $f(z)$. Тогда

1) при $n = 0 \pmod{4}$ $R_n = (-\infty, \infty)$, $I_n \supset (-\infty, 0]$; 2) при $n = 1 \pmod{4}$ $R_n = (-\infty, A_n]$, $I_n = (-\infty, \infty)$; 3) при $n = 2 \pmod{4}$ $R_n = (-\infty, \infty)$, $I_n \supset [0, \infty)$; 4) при $n = 3 \pmod{4}$ $R_n = (-\infty, \infty)$, $I_n = (-\infty, \infty]$.

Поскольку утверждения теоремы во всех четырёх случаях могут быть доказаны одним и тем же приёмом, рассматривается подробно лишь один из случаев, в частности когда $n = 1 \pmod{4}$.

В заключении данной главы показывается, что фиксация величины $c_1 = \{f\}_1$ у функций $f(z)$ класса H_1 оказывает ограничивающее влияние также на рост некоторых функционалов, которые характеризуют поведение $f(z)$ внутри области определения.

В последней главе подобно вычислениям из теорем 2.1 и 2.2 мы получим новые оценки для уравнения Лёвнера, отображающее полуплоскость с разрезом на верхнюю полуплоскость и удовлетворяющее начальному условию $\omega|_{t=0} = z$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа была посвящена взаимному изменению начальных коэффициентов однолистных функций и практической работе с уравнением Лёвнера для верхней полуплоскости. Рассмотрены основные свойства уравнения на классах однолистных функций. В работе рассматриваются задачи о множествах значений коэффициентов c_n , $n = 2, 3, \dots$, на классе $H_L(c_1)$ и на одном его подклассе (H_L^*) , а также даются оценки коэффициентов c_3, c_5 .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров И. А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. – 344 с.
2. Александров И. А., Соболев В. В., Экстремальные задачи для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости // И. А. Александров, В. В. Соболев. – Укр. Матем. Ж. 22, 1970. – С.291-307.
3. Селляхова Т. Н., Соболев В.В., О взаимном росте коэффициентов функций, однолистных в полуплоскости // Т. Н. Селляхова, В. В. Соболев. – ДАН СССР 213, 1974 – С.768-770.
4. Селляхова Т. Н., Соболев В. В., О взаимном изменении величин $\log f'(z)$ и $f(z)$ для одного класса функций, однолистных в полуплоскости, Тр. зонального объединения математических кафедр пединститутов Сибири, Красноярск, №1 (1972), С. 176-192.
5. Соболев В. В., К задаче об относительном экстремуме одного функционала на классе функций, однолистных в полуплоскости, Вопросы геометрической теории функций, вып. 5 (1968) (Тр. Томского ун-та 200), С. 184-188.
6. Соболев В. В., Параметрические представления для некоторых классов функций, однолистных в полуплоскости, Учен. зап. Кемеровского пед. ин-та 23 (1970), С. 30-41.
7. Соболев В. В., К методу параметрических представлений на классе H^2 , Учен. зап. Кемеровского пед. ин-та 23 (1970), С. 42-47.
8. Попова Н. В., Исследование некоторых интегралов уравнения $\frac{d\omega}{dt} = \frac{A}{\omega - \lambda(t)}$, Учен. зап. Новосибирского пед. ин-та 8 (1949), С. 13-26.
9. Попова Н. В., Об отображениях, осуществляемых интегралами одного класса дифференциальных уравнений, ДАН СССР 65 (1949), С. 273-274.
10. Попова Н. В., Об отображениях, осуществляемых интегралами одного класса дифференциальных уравнений, Учен. зап. Томского ун-та 14 (195), С. 49-69.
11. Суворов Г. Д. Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, СО АН СССР, 1965.
12. Васильев А. Ю. Взаимное изменение начальных коэффициентов однолистных функций // Ма. заметки. 1985. Т. 38, №1. С. 56-65.

13. Васильев А. Ю. Взаимное изменение коэффициентов в подклассах однолистных функций // Вычислительные методы и программирование. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. С. 55-64.

14. Лаврентьев М. А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного, М., 1965