

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

**Численное построение линий уровня в практике конформных
отображений**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 227 группы
направления (специальности) 02.04.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Ращупкина Евгения Олеговича

Научный руководитель

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор _____ Прохоров Д.В.

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор _____ Прохоров Д.В.

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе я рассмотрю методы, играющие важную роль при фактическом построении конформных отображений. Первый из этих методов опирается на так называемый принцип симметрии, который был сформулирован Б. Риманом и обоснован Г. Шварцем. Этот метод позволяет в некоторых случаях довольно существенно упростить решение задачи отыскания конформных отображений. (Изложено в Лаврентьев, М. А. "Методы теории функций комплексного переменного" С. 213.)

Второй метод особенно важен для приложений, так как он дает возможность выписать (правда, вообще говоря, лишь в виде интеграла) функцию, реализующую отображение верхней полуплоскости на произвольную область, ограниченную многоугольником.

Принцип симметрии дает в одном частном случае простое достаточное условие существования аналитического продолжения функции, реализующей конформное отображение.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Теорема 1. Пусть функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение областей D и D^* . Тогда

1. если граница D^* не имеет бесконечных ветвей, то $f(z)$ непрерывна на границе области D и граничная функция $w = f(\xi) = \varphi(s)$ осуществляет непрерывное и взаимно однозначное соответствие границ областей D и D^* ;
2. если границы D и D^* не содержат бесконечных ветвей и обладают в каждой точке непрерывной (следовательно, и ограниченной) кривизной, то граничная функция $\varphi(s)$ непрерывно дифференцируема. (Изложено в Маркушевич, А.И. "Теория аналитических функций" С. 624)

Теорема 2. Пусть даны две односвязные области D_0 и D_1 без общих точек, такие, что их границы имеют один общий кусок γ , и в этих областях соответственно заданы аналитические функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$. Если, кроме того, эти функции непрерывны в $D_0 + \gamma$ и $D_1 + \gamma$ и совпадают во всех точках кривой γ , то функция $f_1(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ в область D_1 .

Теорема 3. Если функция $f(z)$ всюду однолистка и аналитична всюду в полной плоскости z , кроме точки C , то она дробно-линейна.

Теорема 4. Каковы бы ни были односвязные области D и D^* (с границами, состоящими более чем из одной точки) и как бы ни были заданы точки z_0 из D и w_0 из D^* и действительное число α_0 , существует одно и только одно конформное отображение

$$w = f(z)$$

Теорема 1. Пусть граница области D_1 содержит дугу окружности C и пусть функция $w = f_1(z)$ реализует конформное отображение этой области на область D_1^* такое, что дуга C переходит в участок C^* границы D_1^* также являющийся дугой окружности. В этих условиях функция $f_1(z)$ допускает аналитическое продолжение $f_2(z)$ через дугу C в область D_2 , симметричную с D_1 относительно C , причем функция $\omega = f_2(z)$ реализует конформное отображение области D_2 на область D_2^* , симметричную с D_1^* относительно C^* , а функция

$$w = f(z) = \begin{cases} f_1(z) = \text{в } D_1 \\ f_1(z) = f_2(z) \text{ на } C \\ f_2(z) = \text{в } D_2 \end{cases}$$

реализует конформное отображение (Для однолистности этого отображения надо потребовать, чтобы области D_1 и D_2 , а также D_1^* и D_2^* не пересекались) области $D_1 + C + D_2$ на область $D_1^* + C^* + D_2^*$.

Доказательство. Для доказательства мы совершим дробно-линейные отображения

$$\xi = \frac{az + b}{cz + d} = l(z), \omega = \frac{a^* + b^*}{c^*\omega + d^*} = l_*(\omega), \quad (0.1)$$

преобразующие C и C^* в отрезки Γ и Γ^* действительных осей плоскостей ξ и ω ; области D_1 и D_1^* пусть переходят при этом в области Δ_1 и Δ_1^* , а функция $\omega = f_1(z)$ – в функцию $\omega = l_* f_1 l^\xi(\xi) = \varphi(\xi)$, осуществляющую конформное отображение Δ_1 и Δ_1^* (Для этого случая принцип симметрии сформулировал еще Эйлер в 1777г.). Обозначим через δ_2 область, симметричную Δ_1 относительно Γ . Построим Δ_2 функцию

$$\omega = \varphi_2(\xi) = \overline{\varphi_1(\bar{\xi})}$$

и покажем, что она является аналитическим продолжением функции $\varphi_1(\xi)$. Прежде всего функция $\varphi_2(\xi)$ аналитична в области Δ_2 . В самом деле, для любых точек ξ и $\xi + \Delta\xi$ из Δ_2 имеем:

$$\frac{\varphi_2(\xi + \Delta\xi) - \varphi_2(\xi)}{\Delta\xi} = \frac{\overline{\varphi_1(\bar{\xi} + \overline{\Delta\xi})} - \overline{\varphi_1(\bar{\xi})}}{\Delta\xi} = \overline{\left(\frac{\varphi_1(\bar{\xi} + \overline{\Delta\xi}) - \varphi_1(\bar{\xi})}{\overline{\Delta\xi}} \right)}$$

где $\bar{\xi}$ и $\bar{\xi} + \overline{\Delta\xi}$ – точки из Δ_1 . В силу аналитичности $\varphi_1(\xi)$ в Δ_1 правая часть имеет предел при $\overline{\Delta\xi} \rightarrow 0$, следовательно, существует и производная

$$\varphi_2'(\xi) = \overline{\varphi_1'(\bar{\xi})} \quad (0.2)$$

в любой точке ξ области Δ_2 , т.е. $\varphi_2(\xi)$ аналитична в Δ_2 . По построению функции $\varphi_2(\xi)$ ее граничные значения на отрезке Γ существуют

$$\varphi_2(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \varphi_2(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} \overline{\varphi_1(\bar{\xi})}, \quad (0.3)$$

ибо по теореме о соответствии границ при конформном отображении (Теорема 1) существует $\lim_{\xi \rightarrow x} \varphi_1(\bar{\xi}) = \varphi_1(x)$. Соотношение (1.3) принимает вид $\varphi_2(x) = \overline{\varphi_1(x)}$, но так как значения $\varphi_1(x)$ действительны (Γ^* , по условию, – отрезок действительной оси), то на отрезке Γ

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) \quad (0.4)$$

По принципу непрерывного продолжения (Теорема 2) можно, следовательно, утверждать, что $\varphi_2(\xi)$ является аналитическим продолжением $\varphi_1(\xi)$ через Γ .

Из построения функции $\varphi_2(\xi)$ следует также, что она реализует конформное отображение области Δ_2 на область Δ_2^* , симметричную с Δ_1^* относительно Γ^* . Функция же $\varphi(\xi)$, составленная из $\varphi_1(\xi)$ и ее аналитического продолжения $\varphi_2(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(\xi) & \text{в } \Delta_1, \\ \varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi) & \text{на } \Gamma, \\ \varphi_2(\xi) & \text{в } \Delta_2, \end{cases}$$

реализует конформное отображение $\Delta_1 + \Gamma + \Delta_2$ на $\Delta_1^* + \Gamma^* + \Delta_2^*$.

Возвратимся теперь к старым переменным z и ω с помощью подстановок, обратных (1.1). В силу свойств дробно-линейных отображений мы получим в области D_2 , симметричную с D_1^* относительно дуги C^* . Теорема доказана. (Изложено в Лаврентьев, М. А. "Методы теории функций комплексного переменного" С. 213.) ■

В качестве примера применения принципа симметрии докажем теорему единственности конформного отображения при заданном соответствии трех граничных точек.

Теорема 2. Существует одно и только одно конформное отображение $\omega = f(z)$ области D на область D^* , переводящее три граничные точки z_k области D в три граничные точки ω_k области D^* . Точки z_k и ω_k задаются произвольно, но с соблюдением порядка следования при обходе границ областей.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда D и D^* представляют собой единичные круги. Можно построить дробно-линейное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|\omega| < 1$ с заданной нормировкой $f(z_k) = \omega_k$. Докажем единственность этого отображения. Пусть $\omega = g(z)$, $g(z_k) = \omega_k$ будет другое отображение круга $|z| < 1$ на круг $|\omega| < 1$. Функция $g(z)$ удовлетворяет условиям принципа симметрии и, следовательно, аналитически продолжается в область, симметричную с кругом $|z| < 1$ относительно окружности $|z| = 1$, т.е. во внешность круга $|z| > 1$. Вместе со своим продолжением $\omega = g(z)$ реализует однолистное отображение полной плоскости z и по теореме (3) является дробно-линейной функцией. Но тогда можно утверждать, что $g(z) \equiv f(z)$, потому как дробно-линейное отображение вполне определяется заданием соответствия трех точек.

Общий случай просто сводится к рассмотренному. В самом деле, пусть $\xi = \varphi(z)$, $\xi_k = \varphi(z_k)$ и $\omega = \psi(w)$, $w_k = \psi(w_k)$ будут какие-либо конформные отображения областей D и D^* на единичные круги $|\xi| < 1$ и $|\omega| < 1$ и $\omega = F(\xi)$, $F(\xi_k) = \omega_k$ — отображение круга $|\xi| < 1$ на круг $|\omega| < 1$ (его существование и единственность гарантированы). Отображением области D на область D^* с заданной нормировкой будет, очевидно, служить

$$w = \psi^{-1} F \varphi(z) = f(z),$$

где ψ^{-1} – отображение, обратное ψ . Существование второго отображения $w = g(z)$ области D на D^* с той же нормировкой привело бы к существованию второго отображения

$$\omega = \psi\varphi^{-1}(\xi) = G(\xi)$$

круга $|\xi| < 1$ на круг $|\omega| < 1$ с нормировкой $G(\xi_k) = \omega_k$, что противоречит установленному выше. Теорема доказана полностью. ■

Рассмотрим еще применение принципа к вопросу о существовании конформных отображений многосвязных областей. По основной теореме (4) любые две одинаковые односвязные области можно однолистно и конформно отобразить друг на друга. С другой стороны, мы видели, что нельзя так же отобразить односвязную область на много-связную. Возникает вопрос о возможности отображения друг на друга областей одного порядка связности. Оказывается, и этот вопрос, вообще говоря, решается отрицательно. В самом деле, даже в простейшем случае концентрических колец имеет место

Теорема 3. Для того, чтобы существовало конформное отображение $w = f(z)$ кольца $r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $\rho < |w| < \rho_2$, необходимо и достаточно подобие этих колец:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r_2}{r_1} \quad (0.5)$$

Доказательство. Для доказательства необходимости условия (1.5) заметим, что функция $f(z)$ удовлетворяет условиям принципа симметрии и на основании этого принципа аналитически продолжается в области $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1$ и $r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$, симметричные с кольцом $r_1 < |z| < r_2$ соответственно относительно окружностей $|z| = r_1$ и $|z| = r_2$. Расширенное кольцо $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$ функция $f(z)$ (вместе с ее продолжением) отображает на кольцо $\frac{\rho_1^2}{\rho_2} < w < \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$. Поэтому к функции $f(z)$ снова применим принцип симметрии и ее можно продолжить в кольцо $r_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 < |z| < r_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. Производя такое продолжение неограниченно, мы получим, что $f(z)$ реализует однолистное отображение области $0 < |z| < \infty$ на область $0 < |w| < \infty$, причем либо $\lim_{z \rightarrow 0} = 0, \lim_{z \rightarrow \infty} = \infty$, либо $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, в зависимости от того, соответствует окружности $|z| = r_1$ окружность $|w| = \rho_1$ или $|w| = \rho_2$. Отсюда заключаем, что $f(z)$ является дробно-линейной функцией одного из двух видов:

$$f(z) = az, f(z) = \frac{a}{z} \quad (0.6)$$

де a – комплексная постоянная. В обоих случаях равенство (1.6), очевидно, выполняется. Достаточность условия (1.6) следует из того, что при его выполнении кольца подобны и их можно отобразить друг на друга простым

растяжением. (Изложено в Лаврентьев, М. А. "Методы теории функций комплексного переменного" С. 213.) ■

В дополнение к доказанной теореме укажем, что любая двусвязная область все же может быть отображена на некоторое кольцо $\rho_1 < |w| < \rho_2$, причем при заданном радиусе ρ радиус ρ_2 определяется для данной области однозначно. Точно так же произвольную n -связную область можно отобразить на некоторую область, получаемую выбрасыванием из плоскости n кругов.

В заключение приведем обобщение принципа симметрии на случай, когда границы отображаемых областей содержат аналитические дуги. Дуга C называется аналитической, если она может быть задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

в которых $x(t)$ и $y(t)$ являются аналитическими функциями действительного переменного t на интервале (α, β) , т.е. функциями, разлагающимися в окрестности каждой точки t_0 этого интервала в степенные ряды по степеням $t - t_0$. При этом предполагается, что ни в одной точке интервала производные $x'(t)$ и $y'(t)$ не обращаются в нуль одновременно (т.е. на C нет особых точек). Кривая C может быть замкнутой, если $x(\alpha) = x(\beta), y(\alpha) = y(\beta)$.

Имеет место так называемый принцип аналитического продолжения:

Теорема 4. Пусть функция $w = f(z)$ реализует конформное отображение области D , граница которой содержит аналитическую дугу C , на некоторую область D^* , причем дуге C соответствует аналитическая дуга C^* границы области D^* . В этих условиях функцию $w = f(z)$ можно аналитически продолжить через дугу C .

Доказательство. В самом деле, пусть z_0 – произвольная точка дуги C , $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ – уравнение этой кривой и $z_0 = z(t_0)$. Так как C по условию – аналитическая дуга, то в некоторой окрестности $|t - t_0| < \delta$ функцию $z = z(t)$ можно разложить в ряд по степеням $t - t_0$; по теореме Абеля последний будет сходиться и для комплексных значений t , которые мы обозначим через ξ , в круге $|\xi - t_0| < \delta$. Следовательно, в этом круге определена аналитическая функция $z = z(\xi)$. Так как $z'(t_0) \neq 0$, то, уменьшая в случае надобности δ , можно считать отображение $z = z(\xi)$ конформными. По настроению $z = z(\xi)$ отображает диаметр круга $|\xi - t_0| < \delta$ на некоторый отрезок кривой C , содержащий точку z_0 ; мы будем предполагать, что верхний полукруг при этом преобразуется внутрь области D , а нижний – в ее внешность.

Точно таким же образом, если $w = w(\tau)$ есть уравнение кривой C^* , мы можем построить конформное отображение $w = w(\omega)$ некоторого круга $|\omega - \tau_0| < \delta_1$ с центром на действительной оси на окрестность точки

$w_0 = w(\tau_0) = f(z_0)$, преобразующее диаметр этого круга в отрезок кривой C^* . Мы предположим также, что верхний полукруг при этом преобразуется внутрь области D^* , а нижний – в ее внешность.

Функция $w = f(z)$ порождает конформное отображение

$$w = w\{f[z(\xi)]\} = \varphi(\xi)$$

($\omega = \omega(w)$ – функция, обратная $w = w(\omega)$) верхнего полукруга $|\xi - t_0| < \delta$ на некоторую часть верхнего полукруга $|\omega - \tau_0| < \delta_1$, причем диаметр первого полукруга переходит в часть диаметра второго. По доказанному принципу симметрии функция $\varphi(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в нижний полукруг и (вместе со своим продолжением) реализует конформное отображение всего круга $|\xi - t_0| < \delta$ на некоторую часть круга $|\omega - \tau_0| < \delta_1$, содержащую отрезок диаметра.

Построенное продолжение $\omega = \varphi(\xi)$ порождает аналитическое продолжение функции $f(z)$ через отрезок кривой C . В самом деле, в части внешности области D , соответствующей нижнему полукругу $|\xi - t_0| < \delta$, определена аналитическая функция $w = w\{\varphi[\xi(z)]\}$ ($\xi(z)$ – функция, обратная $z(\xi)$), граничные значения которой на отрезке дуги C совпадают с граничными значениями $f(z)$. По принципу непрерывного продолжения эта функция является аналитическим продолжением функции $f(z)$. Так как z_0 – произвольная точка кривой C , то можно утверждать, что $f(z)$ аналитически продолжаема через всю дугу C . Теорема доказана. (Изложено в Лаврентьев, М. А. "Методы теории функций комплексного переменного" С. 213.) ■

В частности, если полные границы C и C^* данных областей – аналитические кривые, то $f(z)$ будет аналитически продолжаемой через всю границу области D (и, следовательно, аналитической в замкнутой области $\bar{D}$).

В данной работе я рассмотрел методы, играющие важную роль при фактическом построении конформных отображений. Первый из этих методов опирается на так называемый принцип симметрии, который был сформулирован Б. Риманом и обоснован Г. Шварцем. Этот метод позволяет в некоторых случаях довольно существенно упростить решение задачи отыскания конформных отображений.

Второй метод особенно важен для приложений, так как он дает возможность выписать (правда, вообще говоря, лишь в виде интеграла) функцию, реализующую отображение верхней полуплоскости на произвольную область, ограниченную многоугольником.

Также я рассмотрел различные версии интеграла Кристоффеля-Шварца, в ситуации когда одна или несколько вершин многоугольника лежат в бесконечно удаленной точке, одна из вершин многоугольника – образ бесконечно удаленной точки и т.д. (Изложено в Лаврентьев, М. А. "Методы теории функций комплексного переменного" С. 213.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе я рассмотрел методы, играющие важную роль при фактическом построении конформных отображений. Первый из этих методов опирается на так называемый принцип симметрии, который был сформулирован Б. Риманом и обоснован Г. Шварцем. Этот метод позволяет в некоторых случаях довольно существенно упростить решение задачи отыскания конформных отображений.

Второй метод особенно важен для приложений, так как он дает возможность выписать (правда, вообще говоря, лишь в виде интеграла) функцию, реализующую отображение верхней полуплоскости на произвольную область, ограниченную многоугольником.

Также я рассмотрел различные версии интеграла Кристоффеля-Шварца, в ситуации когда одна или несколько вершин многоугольника лежат в бесконечно удаленной точке, одна из вершин многоугольника – образ бесконечно удаленной точки и т.д. (Изложено в Лаврентьев, М. А. "Методы теории функций комплексного переменного" С. 213.)

В заключение продемонстрировал на примере использование интеграла Кристоффеля-Шварца с помощью Wolfram Mathematica.