

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Задачи принятия решений с отношениями предпочтения

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

КУЛЕШОВА МАКСИМА ИГОРЕВИЧА

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель

профессор, д. физ-мат. н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.В. РОЗЕН

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

доктор физ-мат. наук, профессор

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

В.В. РОЗЕН

инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение

Актуальность работы. Исследование математических моделей задач принятия решений появилось в математике сравнительно недавно. В последние годы в теории принятия решений возникло новое научное направление, состоящее в том, что целевая структура задачи принятия решения задается не в виде целевой функции, а с помощью бинарного отношения предпочтения на множестве допустимых альтернатив. Такой способ формализации целевой структуры позволяет в некоторых случаях избавиться от недостатков, присущих числовым моделям принятия решений и построить более адекватную модель.

Цель работы:

- 1) *Изучить аксиоматику и основные свойства структуры предпочтений. Рассмотреть дополнительные свойства структуры предпочтений (транзитивность, линейность, антисимметричность).*
- 2) *Разобрать основные принципы оптимальности для моделей принятия решения с заданным отношением предпочтения.*
- 3) *Привести доказательства теорем существования важнейших типов оптимальных решений (наиболее предпочтительная альтернатива, недоминируемая альтернатива, ядро).*
- 4) *Дать доказательство достаточных условий существования представления структуры предпочтений в числовую прямую.*
- 5) *Разобрать способы нахождения оптимальных альтернатив, в которых предпочтение задано при помощи графа. Изучить алгоритм приведения структуры предпочтений к нормальной форме.*

Описание структуры работы. Магистерская работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований и приложения, в котором Работа содержит 48 страниц и 15 иллюстраций.

Краткая характеристика материалов работы. Работа носит реферативный характер и основана на источниках, указанных в списке литературы. Часть результатов доказана самостоятельно. В работе произведена визуализация графического материала с применением программы GeoGebra.

Научная новизна и значимость работы. Научная значимость работы состоит в систематизации важнейших результатов, относящихся к задачам принятия решений с отношениями предпочтения на множестве допустимых альтернатив.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Подробные доказательства ряда теорем о существовании оптимальных альтернатив (разделы: Наиболее предпочтительные и недоминируемые альтернативы в задачах принятия решения, Оптимальные альтернативы в «дополнительной» модели).
2. Приведение примеров задач принятия решений с отношениями предпочтения и способов нахождения оптимальных альтернатив.
3. Визуализация графического материала, связанного с приведением структуры предпочтений к нормальной форме (Раздел: Приложение).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

При попарном сравнении объектов по принципу "лучше - хуже" на множестве этих объектов естественным образом возникает отношение предпочтения. Оно может быть задано в виде бинарного отношения, т.е. в виде множества пар, где один объект пары лучше (т.е. не хуже) другого. С одной стороны в этом отношении предпочтения может быть превосходство (доминирование) одного объекта над другим, а с другой – их сходство.

Раздел 1: Отношения предпочтения и структура «доминирование-безразличие»

В данном разделе дается аксиоматическое определение структуры предпочтений и указываются некоторые дополнительные свойства таких структур.

Будем обозначать через α отношение доминирования, где запись $(a, b) \in \alpha$ означает, что b доминирует a , через β будем обозначать отношение безразличия, где $(a, b) \in \beta$ означает, что a и b безразличны между собой.

Аксиомы для отношений доминирования и безразличия таковы:

1. *Отношение доминирования асимметрично: $\alpha \cap \alpha^{-1} = \emptyset$;*
2. *Отношение безразличия симметрично: $\beta^{-1} = \beta$.*
3. *Ни одна пара объектов не принадлежит отношению доминирования и отношению безразличия одновременно: $\alpha \cap \beta = \emptyset$.*
4. *Будем считать, что каждый объект безразличен по отношению к себе, т.е. отношение безразличия рефлексивно. Таким образом, $\Delta \subseteq \beta$, где Δ – тождественное отношение.*

Определение 1.1. Будем говорить, что пара бинарных отношений (α, β) , заданных на множестве A , определяет на нем структуру «доминирование-безразличие» и будем называть α отношением доминирования, а β – отношением безразличия, если выполнены аксиомы 1-4.

Далее для структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ используются инфиксные обозначения:

$$a \lesssim b \Leftrightarrow (a, b) \in \rho,$$

$$a < b \Leftrightarrow (a, b) \in \rho^*,$$

$$a \sim b \Leftrightarrow (a, b) \in \rho^s.$$

Определение 1.2. Пусть (α, β) – структура «доминирование-безразличие», заданная на множестве A . Положим $\rho = \alpha \cup \beta$. Отношение ρ называется *отношением нестрогого предпочтения*, а пара $\langle A, \rho \rangle$ задает *структуру предпочтений* на множестве A .

В работе отмечены следующие свойства отношений предпочтения.

Теорема 1.1. Для того, чтобы бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ было отношением предпочтения на множестве A , необходимо и достаточно, чтобы ρ было рефлексивным.

Теорема 1.2. Пусть (α, β) – структура «доминирование-безразличия» и $\rho = \alpha \cup \beta$ – определенное ею предпочтение. Тогда

$$\alpha = \rho^* \text{ (отношение доминирования), } \beta = \rho^s \text{ (отношение безразличия),}$$

где $\rho^* = \rho \setminus \rho^s$ есть строгая или асимметричная, а $\rho^s = \rho \cap \rho^{-1}$ – симметричная часть отношения ρ .

Рассмотрены некоторые дополнительные условия, которым могут удовлетворять отношения доминирования и безразличия:

- а) *Линейность.* Структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ будет линейной, если ρ линейно, т.е. $\rho \cup \rho^{-1} = A^2$.
- б) *Антисимметричность.* Структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ будет антисимметричной, если $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$. В этом случае для отношения безразличия β получаем: $\beta = \rho^s = \rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$, т.е. $\beta \subseteq \Delta_A$. Поскольку β рефлексивно, имеет место обратное включение $\Delta_A \subseteq \beta$; таким образом, антисимметричность структуры предпочтения принимает вид: $\beta = \Delta_A$. На языке теории графов антисимметричность структуры предпочтения сводится к тому, что в представляющем ее графе нет двойных стрелок, т.е. ребер.
- в) *Транзитивность.* Структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ будет транзитивной, если отношение ρ транзитивно ($(a_1, a_2) \in \rho \wedge (a_2, a_3) \in \rho \Rightarrow (a_1, a_3) \in \rho$); учитывая, что ρ всегда рефлексивно, получаем, что, в этом случае оно является отношением квазипорядка.
- г) Если структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ является одновременно линейной и транзитивной, то ρ есть линейный квазипорядок на A .

Раздел 2: Наиболее предпочтительные и недоминируемые альтернативы в задачах принятия решения

Основная модель задачи принятия решения может быть представлена в виде непустого множества альтернатив A и отношения предпочтения $\rho: G = \langle A, \rho \rangle$. Фактически она представляет собой структуру предпочтений над множеством альтернатив A . Рассматриваемые проблемы для основной модели – это подходы к определению понятия оптимальной альтернативы и условия существования оптимальных альтернатив.

В данном разделе выделено три подхода к понятию оптимальности:

1. Наиболее предпочтительная альтернатива;
2. Недоминируемая (максимальная) альтернатива
3. Ядро.

Определение 2.1. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ – структура предпочтений, $B \subseteq A$. Элемент $b_0 \in B$ называется *наибольшим* элементом подмножества B , если для всех $b \in B$ имеет место $b \preceq b_0$.

Определение 2.2. Элемент $b^* \in B$ называется *максимальным (недоминируемым)* элементом подмножества B , если не существует такого элемента $b \in B$, для которого выполнено $b > b^*$.

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. 1. Наибольший элемент подмножества $B \subseteq A$ является также максимальным элементом этого подмножества.

2. В линейной структуре предпочтений понятия «наибольший» и «максимальный» равнозначны.

Теорема 2.2. Для того чтобы в структуре предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ каждое непустое подмножество имело максимальный элемент, необходимо и достаточно, чтобы в графе строгого предпочтения $\langle A, \rho^* \rangle$ отсутствовали бесконечные пути.

Определение 2.3. Рассмотрим структуру предпочтений $\langle A, \preceq^p \rangle$. Подмножество $B \subseteq A$ называется *внутренне устойчивым*, если для любых $b_1, b_2 \in B$ соотношение $b_1 <^p b_2$ не имеет места. Подмножество $B \subseteq A$ называется *внешне устойчивым*, если для любого элемента $a \notin B$ найдется такой элемент $b \in B$, что $a <^p b$.

Ядром структуры предпочтений $\langle A, \lesssim^p \rangle$ называется такое подмножество $B \subseteq A$, которое одновременно является и внутренне, и внешне устойчивым.

Теорема 2.3. 1. Множество максимальных элементов структуры предпочтений содержится в любом ее ядре.

2. Множество максимальных элементов структуры предпочтений является внутренне устойчивым.
3. Если множество максимальных элементов структуры предпочтений внешне устойчиво, то оно является ее единственным ядром.

Раздел 3: «Дополнительная» модель

«Дополнительная» модель задачи принятия решения может быть представлена в виде непустого множества альтернатив A и критериев оценок этих альтернатив $(q_j)_{j \in J}$: $G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle$.

Относительно основных множеств «дополнительной» модели делаются следующие предположения:

1. Множество альтернатив A должно содержать не менее двух элементов: $|A| \geq 2$ (в противном случае задача выбора становится бессодержательной).
2. Число критериев должно быть также не меньше двух: $|J| \geq 2$ – именно в этом случае задача принятия решений становится многокритериальной.
3. Всякая цепь $C_j (j \in J)$ должна содержать не менее двух элементов: $|C_j| \geq 2$ (иначе критерий q_j ни на что не влияет и может быть исключен из рассмотрения).

Раздел 4: Оптимальные альтернативы в «дополнительной» модели

Для «дополнительной» модели рассмотрены два способа построения отношения предпочтения:

1. Предпочтение по Парето;
2. Предпочтения по правилу большинства.

Определение 4.1. Говорят, что альтернатива a' является не менее предпочтительной по Парето, чем альтернатива a , записывается как $a \leq^{\text{Par}} a'$, если a' не менее предпочтительна, чем a , сразу по всем критериям q_j ($j \in J$):

$$a \leq^{\text{Par}} a' \Leftrightarrow (\forall j \in J) q_j(a) \leq_j q_j(a'). \quad (4.1)$$

Тогда для альтернатив $a, a' \in A$ отношение безразличия по Парето сводится к тому, что $q_j(a) = q_j(a')$ для всех $j \in J$, а отношение строгого предпочтения задается формулой (4.1) с дополнительным условием: хотя бы одно соотношение $q_j(a) \leq_j q_j(a')$ должно выполняться как строгое. Строгое предпочтение по Парето иногда называют также доминированием по Парето.

Определение 4.2. Максимальные (недоминируемые) альтернативы в «дополнительной» модели называются *оптимальными по Парето*. В моделях многокритериальной оптимизации понятие оптимальности по Парето является основным правилом нахождения оптимальных решений.

Если два объекта являются несравнимыми по Парето, то ни один из них не превосходит другого сразу по всем критериям.

Далее рассматриваем правила большинства. Пусть нам задана «дополнительная» модель: $G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle$.

С каждой упорядоченной парой альтернатив $a, a' \in A$ связаны три числа, имеющие простой содержательный смысл:

$n^*(a, a')$ есть число тех критериев $j = 1, \dots, m$, для которых альтернатива a' предпочтительнее (в строгом смысле) альтернативы a ;

$n^*(a', a)$ есть число тех критериев $j = 1, \dots, m$, для которых альтернатива a предпочтительнее альтернативы a' ;

$n^0(a, a')$ есть число тех критериев $j = 1, \dots, m$, для которых альтернативы a и a' одинаковы по предпочтительности.

Имеет место

$$\forall a, a' \in A \quad \begin{cases} n(a, a') = n^*(a, a') + n^0(a, a'), \\ n^*(a, a') + n^0(a, a') + n^*(a', a) = m. \end{cases} \quad (4.2)$$

Имеется несколько способов введения отношений предпочтения по правилу большинства. Они называются *мажорантными отношениями*. Самым распространенным является отношение $\leq^{M1}$, определенное следующей равносильностью:

$$a \leq^{M1} a' \Leftrightarrow n(a', a) \leq n(a, a').$$

В виду (4.2) отношение $\leq^{M1}$ может быть представлено формулой:

$$a \leq^{M1} a' \Leftrightarrow n(a', a) \leq n(a, a'),$$

откуда находим отношение строгого предпочтения $<^{M1}$ и отношение безразличия $\sim^{M1}$:

$$a <^{M1} a' \Leftrightarrow n(a', a) < n(a, a'),$$

$$a \sim^{M1} a' \Leftrightarrow n(a', a) = n(a, a').$$

Недостатком правила большинства $\leq^{M1}$ является возможность принятия решения «большинством в один голос». Этого недостатка лишено правило большинства $\leq^{M2}$, которое определяется следующим образом:

$$a \leq^{M2} a' \Leftrightarrow n(a, a') \geq m/2.$$

Утверждение 4.1. Строгое предпочтение для мажоритарного отношения $\leq^{M2}$ определяется равносильностью:

$$a <^{M2} a' \Leftrightarrow n^*(a, a') > m/2.$$

Раздел 5: Представление структуры предпочтений в числовую прямую

На практике в задачах принятия решений стремятся выразить предпочтение в числовой форме, сопоставляя каждому объекту некоторое действительное число, т.е. оценку, так чтобы более предпочтительный объект имел наибольшую оценку, менее предпочтительный наименьшую оценку, а если объекты одинаково предпочтительны, то равную оценку. Такое понятие носит название «*представления*».

Определение 5.1. Представлением структуры «доминирование-безразличие» (α, β) в числовую прямую $\mathbb{R}$ называется отображение $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$a_1 < a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) < \varphi(a_2); \quad (5.1)$$

$$a_1 \sim a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2). \quad (5.2)$$

Определение 5.2. Представление φ называется *собственным* (или *изоморфным*), если в условиях (5.1) и (5.2) выполнены эквивалентности:

$$a_1 < a_2 \Leftrightarrow \varphi(a_1) < \varphi(a_2); \quad (5.1^*)$$

$$a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2). \quad (5.2^*)$$

Определение 5.3. Представлением структуры предпочтения $\langle A, \rho \rangle$ в числовую прямую $\mathbb{R}$ называется представление, соответствующей структуры «доминирование-безразличие». Таким образом, представление структуры предпочтения $\langle A, \rho \rangle$ в числовую прямую есть отображение $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}$, для которого выполняются условия (5.1) и (5.2).

В работе доказаны следующие результаты:

Теорема 5.1. Если структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ имеет представление в числовую прямую, то отношение ρ должно быть ациклическим относительно своей симметричной части, т.е. при любом $n = 1, 2, \dots$ из условий

$$a_1 \lesssim a_2 \lesssim \dots \lesssim a_n \lesssim a_1$$

должно следовать

$$a_1 \sim a_2 \sim \dots \sim a_n \sim a_1.$$

Теорема 5.2. Ациклическая структура предпочтений на конечном множестве имеет представление в числовую прямую.

При этом $\varphi(a) = h(a)$ и называется высотой элемента a , где $h(a)$ – максимальная длина пути в графе $\langle A, \rho \rangle$, ведущего в вершину a .

Замечание 5.1. Один из удобных способов построения функции высоты h (максимальная длина пути в графе) для графа без контуров и петель: определим для графа $\langle A, \rho \rangle$ по индукции расширяющуюся последовательность подмножеств $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots$ следующим образом.

1. Подмножество $S_0 \subseteq A$ состоит из тех вершин графа, для которых нет предшествующих им вершин:

$$S_0 = \{a \in A: \rho^{-1}\langle a \rangle = \emptyset\} = A \setminus \text{pr}_2 \rho.$$

Для $a \in S_0$ вершина a не может быть более предпочтительной ни для каких вершин. На языке теории графов это означает, что для элементов $a \in S_0$ нет входящих стрелок.

2. Пусть подмножество $S_{n-1} \subseteq A$ уже определено. Для получения S_n добавим к S_{n-1} те вершины, все предшественники которых содержатся в S_{n-1} :

$$S_n = S_{n-1} \cup \{a \in A: \rho^{-1}\langle a \rangle \subseteq S_{n-1}\}.$$

Определение 5.4. Два элемента $a_1, a_2 \in A$ принадлежат одному классу эквивалентности ε_ρ тогда и только тогда, когда либо $a_1 = a_2$, либо существует соединяющий их цикл, т.е. цикл, которому они оба принадлежат.

Теорема 5.3. Отношение взаимной достижимости ε_ρ является наименьшим из отношений эквивалентности ε , для которых фактор-отношение ρ/ε ациклично.

Лемма 5.1. Пусть отношение ρ ациклично относительно своей симметричной части ρ^s . Тогда каноническое отображение из A в A/ε_ρ будет гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на фактор-структуру $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho \rangle$.

Теорема 5.4. Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$, заданная на конечном множестве A , имела представление в числовую прямую, необходимо и достаточно, чтобы отношение ρ было ациклическим относительно своей симметричной части ρ^s .

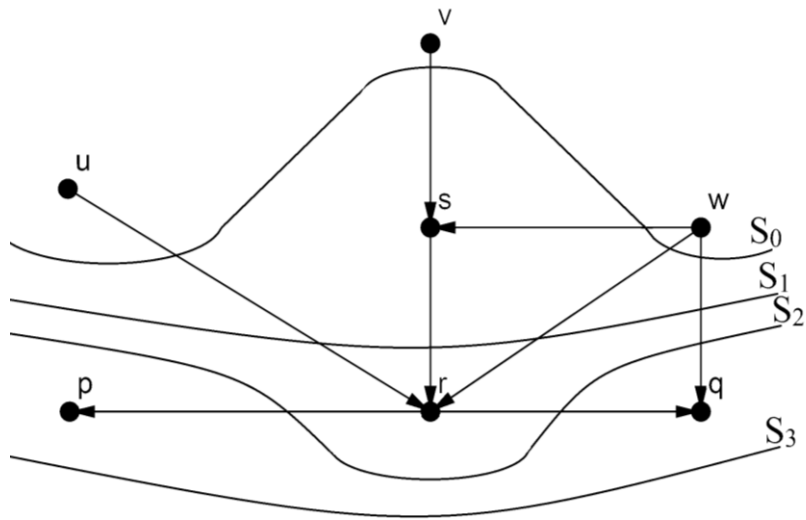
Определение 5.5. Будем говорить, что граф структуры предпочтений имеет нормальную форму, если для любых двух сравнимых элементов строго более предпочтительный находится выше, а безразличные между собой элементы находятся на одном уровне.

Возникает проблема представления графа структуры предпочтений в нормальной форме. Эта проблема решается в Приложении. Также там построена визуализация графов в программе GeoGebra.

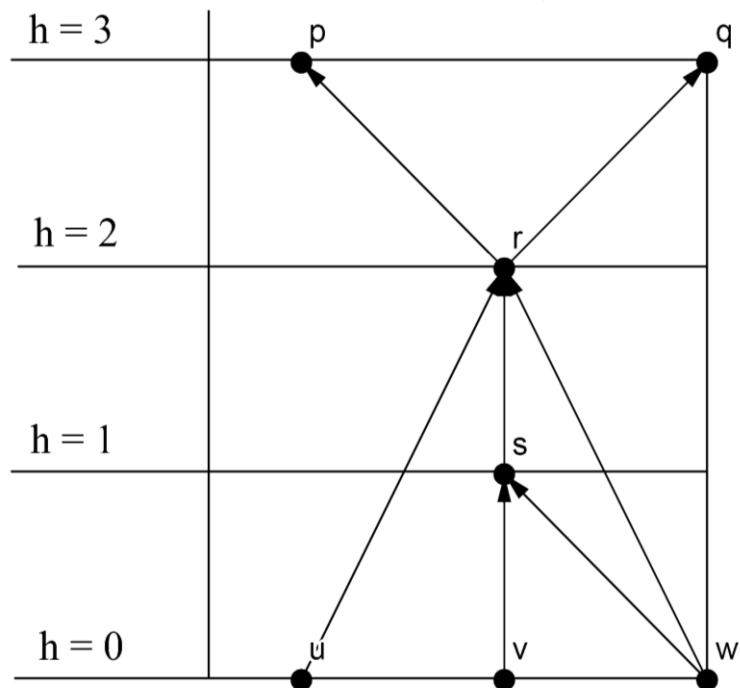
Приложение

В приложении рассмотрен пример, который показывает, что ациклическое предпочтение, заданное на конечном множестве, всегда имеет представление в числовую прямую. Также была произведена визуализация и построение графов в программе GeoGebra.

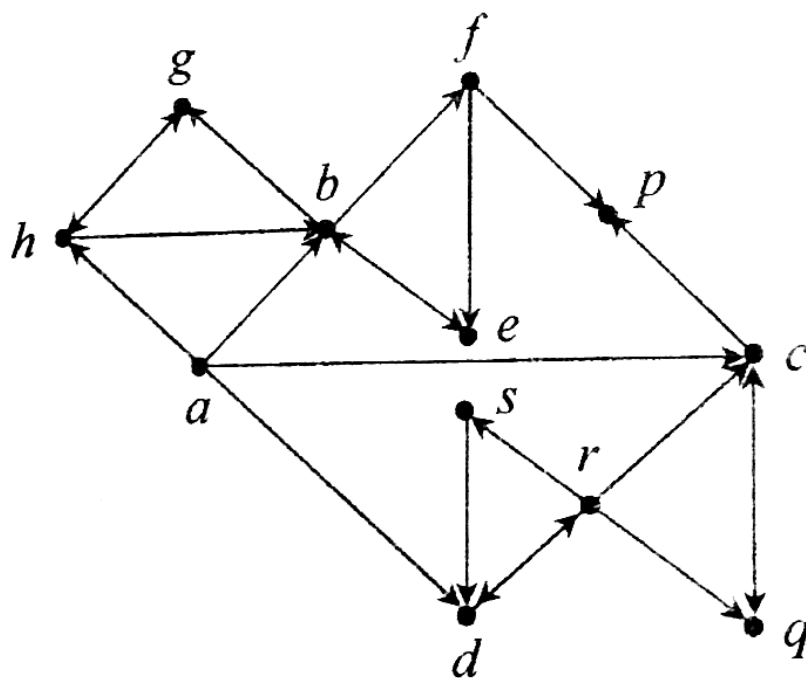
Существует два способа приведения графа к нормальной форме: для ациклического и для произвольного графа:



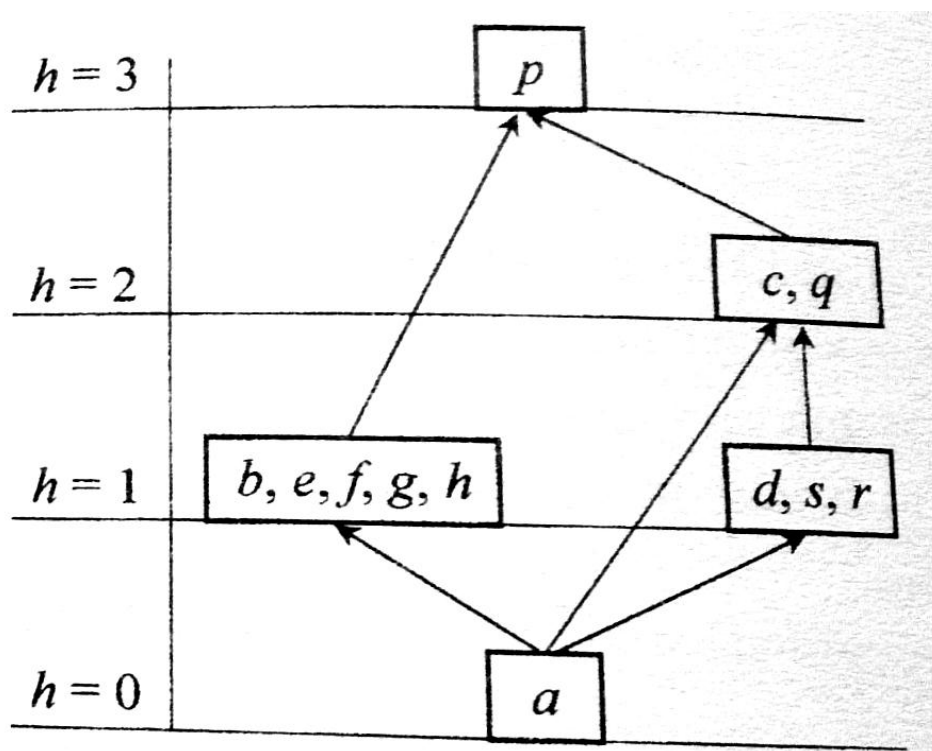
Ациклический граф



Ациклический граф в нормальной форме



Неациклический граф



Неациклический граф в нормальной форме

В неациклическом графе всегда имеются циклы. Элементы, лежащие на одном цикле, составляют класс отношения взаимной достижимости. Поэтому они безразличны по предпочтению и в графе в нормальной форме располагаются на одном уровне.