МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Геометрия распределения Би-метрического многообразия

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

ПОПОВОЙ МАРИИ МИХАЙЛОВНЫ
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н., доцент ____________________ С.В. ГАЛАЕВ
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ____________________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Исследование почти контактных Би-метрических многообразий (продолженных структур) мотивируется приложениями в теоретической физике и в механике со связями. Геометрию почти контактного многообразия с Би-метрикой можно рассматривать как естественное расширение геометрии почти комплексных римановых многообразий в случае нечетной размерности. Аналогом лифта геометрических структур на касательное расслоение является объект исследования данной работы – продолженные структуры. Сама идея продолжения почти контактных структур тесно связана с развитием аппарата связностей над распределением и продолженных связностей[1]. Поэтому в современном научном мире данные понятия являются предметом активного изучения как в России, так и за рубежом[2,3].

Цели и задачи. Целью магистерской работы является исследование принадлежности многообразия специального вида каждому из одиннадцати базовых классов классификации, основанной на свойствах фундаментального, ассоциированного с Би-метрической структурой, тензора F типа $(0, 3)$. Достижение поставленной цели потребовало решения следующих задач.

1. Рассмотреть основные понятия почти контактных Би-метрических многообразий, исследовать свойства Би-метрических многообразий.

2. Изучить случай субриманова многообразия с ненулевым тензором кривизны Схоутена и равной нулю производной Ли $L_{\xi}g$. Рассмотреть формулировки и доказательства теорем о принадлежности классам классификации

---

[1] Галаев, С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью / С. В. Галаев // Математические заметки СВФУ. – 2015. – Т. 22, №1. – С. 25–34.

[2] Manev, M. Contactly conformal transformations of general type of almost contact manifolds with B-metric. Applications / M. Manev // Math. Balkanica (N.S.). – 1997. – 11(3-4). – P. 347–357.

[3] Manev, H. Lie groups as 3-dimensional almost contact B-metric manifolds / H. Manev, D. Mekerov // J. Geom.. – 2015. – Vol. 106. – P. 229–242.

продолженных почти контактных Би-метрических структур, соответствующих субримановым структурам с равным нулю и с отличным от нуля инвариантом $\omega = d\eta$ [4].

3. Подробно рассмотреть вывод классификации продолженных структур, основанной на свойствах фундаментального, ассоциированного с Би-метрической структурой, тензора F типа $(0,3)$ [5].

4. Ввести в рассмотрение Би-метрическое многообразие специального вида, вычислить компоненты поля F в адаптированных координатах для данного многообразия. На основе полученных данных проверить принадлежность многообразия каждому из одинадцати базовых классов, соответстветствующих классификации Би-метрических структур, основанной на свойствах фундаментального, ассоциированного с Би-метрической структурой, тензора F типа $(0,3)$. Вывести соответствующие теоремы.

Описание структуры работы. Работа состоит из введения, определений, пяти разделов, списка использованных источников, содержащего 26 наименований, приложения, содержащего программный код для вычисления скобок Ли. Объем работы составляет 53 страницы.

Научная новизна и значимость работы. Научная новизна работы заключается в исследовании Би-метрического многообразия специального вида на предмет принадлежности одинадцати базовым классам классификации, основанной на свойствах фундаментального, ассоциированного с Би-метрической структурой, тензора F типа $(0,3)$.

Положения, выносимые на защиту. Вывод двух теорем о принадлежности B-метрического многообразия специального вида одинадцати базовым классам классификации, основанной на свойствах фундаментального, ассоциированного с Би-метрической структурой, тензора F типа $(0,3)$.

---

[4] Галаев, С. В. Классификация продолженных Би-метрических структур на распределениях ненулевой кривизны субримановых многообразий / С. В. Галаев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18, № 3. – С. 263–273.

[5] Ganchev, G. Almost contact manifolds with B-metric. / G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev // Math. Balkanica (N.S.). – 1993. – №7(3-4). – P. 261–276.

Краткая характеристика материалов работы. Магистерская работа состоит из пяти разделов. В разделе „Определения“ вводятся основные понятия, необходимые для дальнейшего изложения основного материала работы. Первый раздел является введением в теорию внутренней геометрии субриманова многообразия контактного типа[6]. Во втором разделе вводятся в рассмотрение почти контактные Би-метрические многообразия. Третий раздел посвящен изучению подробного вывода классификации Би-метрического многообразия, основанной на свойствах фундаментального, ассоциированного с Би-метрической структурой, тензора F типа $(0,3)$. В четвертом разделе рассматривается Би-метрическое многообразие специального вида, для которого самостоятельно вычисляются все компоненты тензора F в адаптированных координатах. Пятый раздел посвящен исследованию принадлежности данного многообразия одиннадцати базовым классам рассматриваемой классификации на основе полученных в четвертом разделе данных о компонентах тензора F.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Под субримановым многообразием контактного типа понимается гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где: $\eta-$ 1-форма, порождающая распределение D : $D = ker(\eta)$; $\xi-$ векторное поле, порождающее оснащение $D^{\perp}$ распределения $D : D^{\perp} = span(\vec{\xi})$; $g-$ риманова метрика на многообразии M, относительно которой распределения D и $D^{\perp}$ взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства $\eta(\vec{\xi}) = 1, g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$

Выделим двенадцать классов субримановых многообразий, которым соответствуют двенадцать классов продолженных Би-метрических структур и изучим классы, состоящие из многообразий с нулевым инвариантом $C = \frac{1}{2} L_{\vec{\xi}} g$, но с ненулевым инвариантом R.

---

[6] Manev, M. Natural connections with torsion expressed by the metric tensors on almost contact manifolds with B-metric / M. Manev, M. Ivanova // Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. – 2011. – Vol. 38(3). – P. 47–58.

Пусть $M-$ гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где $\eta-$ 1-форма и $\xi-$ единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения $D^{\perp}$ и D.

Внутренней линейной связностью ∇ на субримановом многообразии называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \longrightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1. \nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}},$$

$$2. \nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y},$$

$$3. \nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где $\Gamma(D)-$ модуль векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D, называемый модулем допустимых векторных полей.

Внутренняя геометрия субриманова многообразия M определяется Вагнером как геометрические свойства M, которые зависят только от параллельного перенесения, определяемого внутренней связностью и от оснащения $D^{\perp}$.

Определение 1.1.1. $(2n+1)$ – мерное вещественное дифференцируемое многообразие M называется (φ, ξ, η) - *структурой* или *почти контактной структурой*, если оно допускает тензорное поле φ типа $(1, 1)$, векторное поле ξ и 1-форму η, удовлетворяющие следующим условиям: $\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = I + \eta \otimes \xi$, где I обозначает тождественное преобразование.

Определение 1.1.2. Пусть $M-$ гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$ с заданной на нем почти контактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$, где φ – тензор типа (1, 1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ – вектор, называемый структурным вектором и η – ковектор, называемый контактной формой, такие что

$$\varphi\vec{\xi} = \vec{0},$$

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi},$$

$$\eta \circ \varphi = 0,$$

$$\eta(\vec{\xi}) = 1.$$

Если почти контактная структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ согласована с псевдоримановой метрикой g таким образом, что $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$, где $X, Y \in (TM)$, где (TM) – модуль векторных полей на многообразии M, то структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ называется почти контактной структурой с Би-метрикой или Би-метрическим многообразием.

Тензорное поле $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g((\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y}, \vec{z})$ типа $(0,3)$, где $\nabla-$ связность Леви-Чивита, является фундаментальным тензорным полем, ассоциированным со структурой Би-метрического многообразия. В зависимости от строения поля F выделяют одинадцать базисных классов почти контактных структур с Би-метрикой:

$\mathcal{F}_1$:
$$F(x,y,z) = \tfrac{1}{2n}\{g(x,\varphi y)\theta(\varphi z) + g(x,\varphi z)\theta(\varphi y) -$$
$$-g(\varphi x,\varphi y)\theta(hz) - g(\varphi x,\varphi z)\theta(hy)\};$$

$\mathcal{F}_2$:
$$F(\xi,y,z) = F(x,\xi,z) = 0,$$
$$F(x,y,\varphi z) + F(y,z,\varphi x) + F(z,x,\varphi y) = 0; \quad \theta = 0,$$

$\mathcal{F}_3$:
$$F(\xi,y,z) = F(x,\xi,z) = 0,$$
$$F(x,y,z) + F(y,z,x) + F(z,x,y) = 0,$$

$\mathcal{F}_4$:
$$F(x,y,z) = -\frac{\theta(\xi)}{2n}\left\{\eta(y)g(\varphi x,\varphi z) + \eta(z)g(\varphi x,\varphi y)\right\},$$

$\mathcal{F}_5$:
$$F(x,y,z) = -\frac{\theta^*(\xi)}{2n}\left\{\eta(y)g(\varphi x,\varphi z) + \eta(z)g(\varphi x,\varphi y)\right\},$$

$\mathcal{F}_6$:
$$F(x,y,z) = -F(\varphi x,\varphi y,z) - F(\varphi x,y,\varphi z) =$$
$$= -F(y,z,x) + F(z,x,y) - 2F(\varphi x,\varphi y,z),$$
$$\theta(\xi) = \theta^*(\xi) = 0,$$

$\mathcal{F}_7$:
$$F(x,y,z) = -F(\varphi x,\varphi y,z) - F(\varphi x,y,\varphi z) =$$
$$= -F(y,z,x) - F(z,x,y),$$

$\mathcal{F}_8:$ $$F(x,y,z) = +F(\varphi x,\varphi y,z) + F(\varphi x,y,\varphi z) =$$

$$= -F(y,z,x) + F(z,x,y) + 2F(\varphi x,\varphi y,z),$$

$\mathcal{F}_9:$ $$F(x,y,z) = F(\varphi x,\varphi y,z) + F(\varphi x,y,\varphi z) =$$

$$= -F(y,z,x) - F(z,x,y),$$

$\mathcal{F}_{10}:$ $\quad F(x,y,z) = \eta(x)F(\xi,\varphi y,\varphi z),$

$\mathcal{F}_{11}:$ $\quad F(x,y,z) = \eta(x)\{\eta(y)\omega(z) + \eta(z)\omega(y)\}.$

Многообразия, входящие во все одиннадцать классов классификации, являются косимплектическими B-метрическими многообразиями.

Класс $\mathcal{F}_0$ почти контактных многообразий с B-метрикой определяется формулой $F(x,y,z) = 0$. Этот специальный класс принадлежит каждому из определенных классов.

Пусть, далее $D-$ распределение субриманова многообразия контактного типа. Векторные поля

$$\left(\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - \Gamma^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b,\partial_n,\partial_{n+a}}\right) = (A_i)$$

определяют на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы

$$\left(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc}x^{n+c}dx^b\right)$$

– соответствующее поле кобазисов.

В силу данных тождеств, верны следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\epsilon}_a, \vec{\epsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d}R^c_{bad}\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\epsilon}, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n\Gamma^c_{ad}\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\epsilon}_a, \partial_{n+b}] = {}^c_{ab}\partial_{n+c},$$

где R^c_{bad} – компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах:

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a\Gamma^d_{b]c}} + 2\Gamma^d_{[a||e||}\Gamma^e_{b]c}.$$

Определим на многообразии D почти контактную структуру

$$\left(\widetilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D\right),$$

полагая $J\vec{x}^h = \vec{x}^v$, $J\vec{x}^v = -\vec{x}^h$. Здесь $\pi : D \longrightarrow M$ – единственная проекция.

Определим на многообразии M метрику g следующим образом:

$$\widetilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = -\widetilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}^h, \vec{y}),$$

$$\widetilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \widetilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \widetilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0.$$

Предложение. Структура $\left(\widetilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \widetilde{g}, D\right)$ является почти контактной структурой с Би-метрикой.

Значения фундаментального тензора продолженной структуры

$$F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

зависят от класса исходного субриманова многообразия. Таким образом, каждому классу субримановых многообразий соответствует некоторый класс из:

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{11}$$

классов Би-метрических многообразий с продолженной структурой.

Пусть M – субриманово многобразие, принадлежащее классу Φ_1. Данное многообразие характеризуется наличием единственного ненулевого внутреннего инварианта – тензора кривизны Схоутена.

В формулировке следующей теоремы отображены связи между описанными выше классификациями Би-метрических многообразий.

Теорема 1.2.6. Пусть M – субриманово многобразие. Тогда всякая продолженная Би-метрическая структура, принадлежащая классу Φ_1, принадлежит классу: $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Предложение. Тензор $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u})$ кривизны Схоутена субриманова контактного типа удовлетворяет следующим условиям:

$$R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u}) + R(\vec{y},\vec{x},\vec{z},\vec{u}) = 0,$$

$$\Sigma_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\left\{R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u})\right\} = 0,$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u} \in \Gamma(D)$.

Теорема 1.2.7. Пусть M – субриманово многообразие. Тогда всякая продолженная Би-метрическая структура, принадлежащая классу Φ_3, принадлежит классу:

$$F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_7 \oplus ... \oplus F_{10}.$$

Пусть M - гладкое трехмерное многообразие с заданной на нем почти контактной структурой

$$(M,\xi,\eta,\varphi,D),$$

где φ – тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, ξ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой такие, что

$$\eta(\xi) = 1,$$

$$\varphi^2 = I + \eta \otimes \xi$$

При этом $\xi \in Ker\omega$, где $\omega = d\eta$.

Гладкое распределение

$$D = \{X \in TM : \eta(X) = 0\} = Ker\eta$$

называется распределением почти контактной структуры.

Карта

$$k(x^i)(i,j,k = 1,2,3; a,b,c = 1,2)$$

многообразия M является адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \xi$.

Пусть $P : TM \to D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^{\alpha})$ – адаптированная карта.

Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение $D : D = Span(\vec{e}_a)$.

Таким образом, имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_a) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \eta = \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$.

Для векторов данного базиса справедливо равенство: $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$.

Поскольку базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ определён адаптированной картой, то он также является адаптированным. В этом случае справедливо равенство $\partial_n \Gamma_a^n = 0$ [3].

Определим далее специальное B-метрическое многообразие следующим образом.

Положим

$$\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3$$

$$\vec{e}_2 = \partial_2$$

$$\xi = \partial_3$$

В этом случае $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \partial_n$, $D_x =< \vec{e}_1, \vec{e}_2 >$ – линейная оболочка.

Таким образом, $\omega_{12} = -\frac{1}{2}$. Будем считать, далее, что $\varphi \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \varphi \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \varphi \partial_3 = 0, \eta = dx^3 + x^2 dx^1$, где dx^3, dx^1 – формы, сопряжённые к базису $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

Определим метрический тензор следующим образом

$$g_{11} = g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \alpha(x) > 0,$$

$$g_{22} = g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -\alpha(x),$$

$$g_{33} = g(\partial_3, \partial_3) = 1,$$

где α – положительная функция.

Заданная структура специального вида действительно является почти контактной B-метрической структурой, поскольку векторы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \partial_3)$ – линейно независимы, выполняется условие $\eta(\xi) = 1$ и равенство $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$, определяющее метрику на почти контактном B-

метрическом многообразии согласуется с тензором φ, заданным как

$$\varphi\vec{e}_1 = \vec{e}_2,$$

$$\varphi\vec{e}_2 = -\vec{e}_1,$$

$$\varphi\partial_3 = 0.$$

Пусть $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ – коэффициенты связности Леви–Чивита:

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}^3_{ab} = \omega_{ba} - \frac{1}{2}\partial_3 g_{ab}$$

$$\tilde{\Gamma}^b_{a3} = \frac{1}{2}g^{bd}\partial_3 g_{ad} + g^{bc}\omega_{ac},$$

где $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

Вычислим все коэффециенты Γ^a_{bc}, а затем перейдём к вычислению фундаментального тензорного поля F специального многообразия. С этой целью получим значения для всех 27 компонент поля F в адаптированных координатах, используя формулы:

$$F(x, y, z) = g((\nabla_x\varphi), z),$$

$$\nabla_a e_b = \Gamma^c_{ab} e_c$$

$$\nabla_a e_b = \Gamma^1_{ab} e_1 + \Gamma^2_{ab} e_2 + \Gamma^3_{ab} e_3$$

Выражения для всех компонент тензора F приведены в итоге в Таблице 1.

На основании полученных данных справедливы следующие теоремы о принадлежности специального B-метрического многообразия

$$\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_3$$

$$\vec{e}_2 = \partial_2$$

$$\xi = \partial_3$$

одинадцати базовым классам классификации.

Теорема 1.3.1. B-метрическое многообразие, заданное как

$$\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3$$

$$\vec{e}_2 = \partial_2$$

$$\xi = \partial_3$$

принадлежит классу $\mathcal{F}_2$ при любых значениях функции α.

Теорема 1.3.2. B-метрическое многообразие, заданное как

$$\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2 \partial_3$$

$$\vec{e}_2 = \partial_2$$

$$\xi = \partial_3$$

принадлежит классам $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_7, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{10}, \mathcal{F}_{11}$ при условии, что функция α является непрерывной функцией, не зависящей от аргумента x^3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены основные понятия, касающиеся почти контактных структур. Рассмотрены две классификации продолженных структур, особое внимение при этом было уделено второй классификации, основанной на свойствах фундаментального, ассоциированного с Би-метрической структурой, тензора F типа $(0, 3)$. Для детального анализа данной классификации было введено специальное B-метрическое многообразие, для которого были вычислены все компоненты тензора, на основании которых были сформулированы две теоремы о принадлежности данного многообразия одинадцати базовым классам классификации многообразий.

Таблица 1 — Компоненты тензора F

1	$F(e_1, e_2, \partial_3)$	$\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{dx^3}$
2	$F(e_1, e_2, e_2)$	$-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\partial x^2}\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^2}$
3	$F(e_1, \partial_3, \partial_3)$	0
4	$F(e_1, \partial_3, e_2)$	0
5	$F(e_1, e_1, e_1)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\partial x^1} - x^2\frac{\alpha}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^1} - x^2\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^3}\right)$
6	$F(e_1, e_2, e_1)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\partial x^1} - x^2\frac{\alpha}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^1} - x^2\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^3}\right)$
7	$F(e_1, \partial_3, e_1)$	0
8	$F(e_1, e_1, e_2)$	0
9	$F(e_1, e_1, \partial_3)$	$\frac{1}{2}$
10	$F(e_2, e_1, \partial_3)$	$-\frac{1}{2}$
11	$F(e_2, \partial_3, e_1)$	$\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\partial x^3}\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^3}$
12	$F(e_2, e_1, e_1)$	$\left(\frac{\alpha}{\partial x^1} - x^2\frac{\alpha}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^1} - x^2\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^3}\right)$
13	$F(e_2, \partial_3, \partial_3)$	0
14	$F(e_2, e_1, e_2)$	$-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\partial x^2}\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^2}$
15	$F(e_2, e_2, e_1)$	$\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\partial x^2}\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^2}$
16	$F(e_2, e_2, \partial_3)$	$\frac{1}{2}$
17	$F(e_2, e_2, e_2)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\partial x^1} - x^2\frac{\alpha}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^1} - x^2\frac{\frac{1}{\alpha}}{\partial x^3}\right)$
18	$F(e_2, \partial_3, e_2)$	0
19	$F(\partial_3, e_1, e_2)$	0
20	$F(\partial_3, e_2, e_1)$	0
21	$F(\partial_3, \partial_3, e_1)$	0
22	$F(\partial_3, \partial_3, e_2)$	0
23	$F(\partial_3, \partial_3, \partial_3)$	0
24	$F(\partial_3, e_2, \partial_3)$	0
25	$F(\partial_3, e_1, \partial_3)$	0
26	$F(\partial_3, e_2, e_2)$	0
27	$F(\partial_3, e_1, e_1)$	0