МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Базисы тождеств многообразий, порожденных классами алгебр отношений

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы

направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Бондаренко Ирины Евгеньевны

Научный руководитель
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ________ А.М. Водолазов

Зав. кафедрой
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ________ А.М. Водолазов

Саратов 2019

Введение. Множество – это группа некоторых объектов, объединенных каким-нибудь общим свойством. Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру, называемую Ω - алгеброй отношений. Альфред Тарский стал первым математиком, который начал рассматривать алгебры отношений с точки зрения теории универсальных алгебр. Одним из важных направлений в исследованиях алгебр отношений является изучение их свойств, выраженных в виде тождеств. Это приводит к необходимости изучения многообразий, порожденных различными классами алгебр отношений.

В данной работе особое внимание уделяется алгебрам отношений с операциями, принадлежащими к числу операций алгебр отношений Тарского. Важным классом таких операций является класс примитивно-позитивных (диофантовых) операций. Операция называется диофантовой (в другой терминологии – примитивно-позитивной), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. Изучение примитивно-позитивных операций играет важную роль при рассмотрении производных объектов над универсальными алгебрам.

В данной магистеркой работе рассмотрим три раздела:

1. Основные понятия и определения;
2. Описание эквациональной теории алгебр отношений;
3. Нахождение базисов тождеств некоторых классов группоидов.

Первый раздел посвящен основным определениям и обозначениям, связанными с алгеброй отношений с примитивно-позитивными операциями. Приведены некоторые понятия общего характера.

Во второй разделе вводится понятие примитивно-позитивной операции над отношениями и рассматривается представление диофантовых операций с помощью графов, излагаются результаты, полученные в работах Д. А. Бредихина «Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями».

Третий раздел постоен на основе статьи Д. А. Бредихина «О базисах тождеств многообразий группоидов отношений». Данный раздел посвящен изучению нахождения базисов тождеств некоторого класса группоидов бинарных отношений с примитивно-позитивными операциями. В этом разделе доказывается теорема о базисах тождеств одного из класса группоидов бинарных отношений с примитивно-позитивными операциями и разработано программное обеспечение, позволяющий решить является ли система тождеств независимой.

Основная часть. В разделе 1 приведем основные определения и обозначения, связанные с алгеброй отношений с примитивно-позитивными операциями. Рассматрим основные понятия общей алгебры, такие как определение алгебры (универсальной алгебры), алгебры отношений и другие. Ниже приведены некоторые из них:

Определение 1. Бинарным отношением или просто отношением на множестве U называются любое подмножество его декартова квадрата.

Определение 4. Под алгеброй (универсальной алгеброй) типа $\tau = \{n_j\}_{j \in J}$ понимают пару $A = (A, \{f_j\}_{j \in J})$, где A - множество, называемое носителем алгебры, и $\{f_j\}_{j \in J}$ - семейство операций на A, причем арность операции f_j совпадает с n_j.

Определение 6. Алгеброй отношений называется пары (Φ, Ω), где Φ некоторое множество бинарных отношений, замкнутое относительно совокупности операции Ω над ними.

Так же в первом разделе рассматривается язык (алгебра) термов.

Для задания функций и производных операций, и для изучения их свойств используют специальный формальный язык — язык термов. Для определения формального языка необходимо задать его алфавит и правила, по которым строятся слова из символов этого алфавита. Произвольная совокупность попарно разных символов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется алфавитом. Символы алфавита часто называют буквами.

Определим некоторое подмножество $T \subset W(\Sigma)$, называемое множеством термов, следующим индуцированным образом:

Определение 7. Термами называются слова, построенные по таким правилам:

1. Все символы из T_0 — термы.

2. Если $t_1, t_2, \dots, t_n$ — термы, то слово вида $f^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ является термом $(f^n \in F, n \geqslant 1)$

3. Термами являются только те слова, которые определены правилами 1 и 2.

Важным понятием является значение терма. Придавая переменным, входящим в терм, конкретные значения и выполняя над ними операции, предписанные термом, получаем значение терма для данной алгебры с конкретным набором переменных.

Так же в этом разделе вводятся основные понятия и факты связанных с многообразием универсальных алгебр.

Определение 10. Класс $\mathscr{K}$ - однотипных алгебр называется многообразием, если существует такая система тождеств Σ, что для любой алгебры A, соответствующего типа, $A \in \mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда A удовлетворяет системе тождеств Σ.

Формулируется основная теорема данного раздела, теорема Биркгофа (структурная характеристика многообразия).

Теорема 1. (Биркгофа) Непустой класс алгебр R сигнатуры Ω тогда и только тогда является многообразием, когда R замкнут относительно подалгебр, факторалгебр и декартовых произведений.

Раздел 2 имеет реферативный характер и основывается на статье Д. А. Бредихина «Описание эквациональной теории алгер отношений с примитивно-позитивными операциями».

Во втором разделе рассматириваются алгебры отношений с примитивно-позитивными операциями.

Определение 15. Логическая операция называется примитивно – позитивной (в другой терминологии диофантовой), если она в своей предваренной форме содержит только кванторы существования и операции конъюнкции.

Примитивно-позитивные операции могут быть описаны на языке теории графов.

Всякой примитивно-позитивной операции F_ϕ ($\phi(z_0, z_1, r_1, r_2, \ldots, r_n)$), задаваемой с помощью формулы ϕ может быть сопоставлен двухполюсник $G = G(F) = G(\phi) = (V, E, in, out)$ следующим образом: множество вершин V совпадает с множеством логических переменных, входящих в запись формулы ϕ. Тройка $(z_i, k, z_j) \in E$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)((z_i, z_j) \in \rho_k)$ входит в запись формулы ϕ, $in = z_0, out = z_1$

В качестве примера, в соответствии с рисунком 1, приведем двухполюсники соответствующие следующим операциям:

$$\rho_1 \cap \rho_2 = \{(z_0, z_1) | (z_0, z_1) \in \rho_1 \wedge (z_0, z_1) \in \rho_2\}; \qquad (1)$$

$$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(z_0, z_1) | (\exists z_2)(z_0, z_2) \in \rho_1 \wedge (z_2, z_1) \in \rho_2\}; \qquad (2)$$

$$\rho_1^{-1} = \{(z_0, z_1) | (z_1, z_0) \in \rho_1\}. \qquad (3)$$

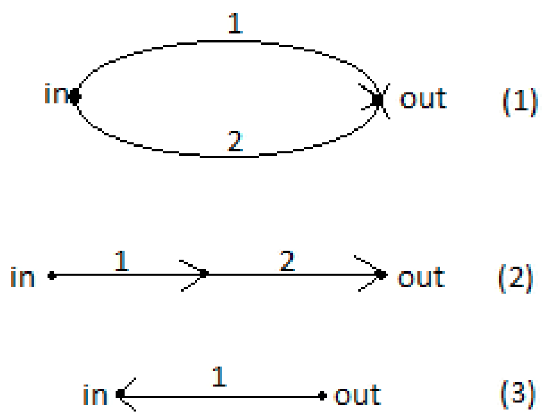

Рисунок 1

Выполняется и обратное: всякому двухполюснику соответствует формула определяющая примитивно-позитивную операцию, которая строится следующим образом: $G = (V, E, in, out)$. Всякой вершине из V сопоставляется индуцированная логическая переменная, причем $in = z_0, out = z_1$. Формула начинается с кванторов существования по всем этим переменным, за исключением z_0, z_1. Далее следует конъюнкция атомарных формул $r_k(z_i, z_j)((z_i, z_j) \in \rho_k)$ для всех дуг $(v_i, k, v_j) \in E$.

Например, в соответствии с рисунком 2:

$$\rho_1 * \rho_2 = \{(z_0, z_1) | (\exists z_2)(\exists z_3)(z_0, z_2) \in \rho_1 \wedge (z_2, z_3) \in \rho_2\}$$

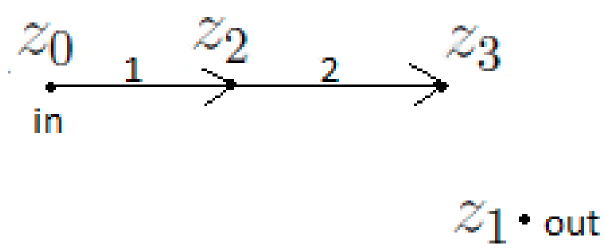

Рисунок 2

Основным результатом второго раздела является теорема 3.

Теорема 3. Пусть Ω - множество позитивных операций. Тождество

$$p = q (p \leqslant q)$$

принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ $(Eq\{\Omega, \subset\})$ тогда и только тогда, когда существуют гомоморфизмы из $G(q)$ в $G(p)$ и из $G(p)$ в $G(q)$ (существует гомоморфизм из $G(q)$ в $G(p)$).

Доказательство теоремы проводится с помощью следующих лемм:

Лемма 2. Пусть $p \in P^{(n)}$ и $r = (r_1, \cdots, r_n)$. Тогда

$$\phi(G(p)) \equiv p^{Af}(r).$$

Лемма 3. Если $p \in P^{(n)}$, то $F_{G(p)}(R) = p^{Re}(R)$, где $R = (R_1, \cdots, R_n)$ и $R_1, \cdots, R_n \in Rel(X)$.

Лемма 4. Фактор-алгебра $Sf\backslash \equiv$ (упорядоченная отношением $\leqslant$ фактор-алгебра $Sf\backslash \equiv$) является свободной алгеброй в многообразии $Var\{\Omega\}(Var\{\Omega, \subset\})$, порожденной элементами $[r_k(\alpha, \beta)](k = 1, 2, \cdots)$.

Лемма 5. Пусть G и $\tilde{G}$ - двухполюсники. Тогда

$$L \vdash (\forall \alpha, \beta)\phi(G) \to \phi(\tilde{G})$$

в том и только том случае, когда существует гомоморфизм из G в $\tilde{G}$.

Раздел 3 основан на статье Д. А. Бредихина «О базисах тождеств многообразий группоидов отношений». В этой главе, используя аппарат изложенный в статье Д. А. Бредихина, самостоятельно докажем теорему о базисах тождеств некоторого класса группоидов бинарных отношений с примитивно-позитивными операциями.

Особое внимание уделим вопросам, качающимся нахождению базисов тождеств многообразий, порожденных классами алгебр отношений с одной бинарной операцией, то есть классами группоидов отношений.

Сосредоточим внимание на следующей операции над отношениями, задаваемой формулой:

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(z, z) \in \rho \wedge (z, z) \in \sigma\},$$

где ρ и σ – бинарные отношения на множестве X.

Для данной операции формулируются и доказываются следующие теоремы:

Теорема 8. Группоид $(A, \cdot)$ принадлежит многообразию $Var\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:

$$xy = yx \; (1), \;\; (xy)^2 = xy \; (2), \;\; (xy^2)z = x(y^2z) \; (3),$$

$$(xy)y = xy\ (4),\ x^2y = xy\ (5).$$

Теорема 9. Упорядоченный группоид $(A, \cdot, \leq)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(5) и тождествам:

$$xy \leq x^2\ (6).$$

В соответвии с рисунком 3, исходный двухполюсник определяет операцию:

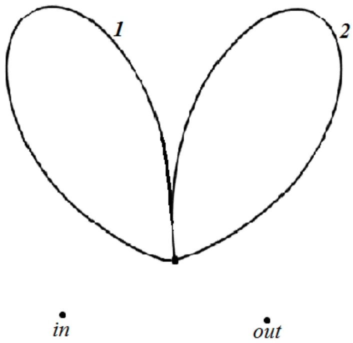

Рисунок 3

Доказательство теоремы основывается на описании эквациональных теорий алгебр отношений с примитивно-позитивными операциями. Доказательство разбито на ряд лемм, некоторые из них формулируются ниже.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ – множество индуцированных переменных и Ξ – множество всех термов группоида над алфавитом X.

Лемма 5. Для любого терма $p \in \Xi$, либо $p \in X$, либо

$$p \cong (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}}).$$

Лемма 7. Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$, $q = (x_{j_1}x_{j_2})(x_{j_3}x_{j_4})\ldots(x_{j_{2n-1}}x_{j_{2n}})$. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем $p \cong p(x_{i_{2k-1}}x_{i_{2k}})$.

Лемма 8. Пусть $G(p) \prec G(q)$, где $p = (x_{i_1}x_{i_2})(x_{i_3}x_{i_4})\ldots(x_{i_{2m-1}}x_{i_{2m}})$,

$q = (x_{j_1} x_{j_2})(x_{j_3} x_{j_4}) \ldots (x_{j_{2n-1}} x_{j_{2n}})$. Тогда $p \cong pq$.

Необходимость условий доказывается непосредственными вычислениями.

Так же в этом разделе разработана программа, предназначена для доказательства независимости системы тождеств. Данная программа анализирует каждое тождество из системы и выясняет существует ли такой группоид, на котором данное тождество не выполняется, при выполняемости остальных.

С помощью программы проверим независимость тождеств, полученных в теореме 4.

```
Введите порядок группоида:
3
Введите количество тождеств:
5
Введите тождества:
x*y = y*x
(x*y)^2=x*y
(x*y^2)*z=x*(y^2*z)
(x*y)*y=x*y
x^2*y=x*y
Вычисления завершены!
```

Рисунок 4

```
Key: 01111
На группоидах: 27 57 81 85 108 117 141 162
243 352 354 355 356 357 365 366 378 648 729
1515 1596 1602 1863 2272 2274 2301 2562 3029
3030 3272 3294 3786 3807 4002 4023 4038 4047
4290 5976 6057 6075 6210 9855 10572 10584
10599 17145 17412 17415 19332

Key: 11110
На группоидах: 63 112 1701 2543 10581 17172

Key: 11011
На группоидах: 1590 2574
```

Рисунок 5

В соответствии с рисунком 4 и рисунком 5, с помощью этой программы удалось доказать, что в системе тождеств (1)-(5) из теоремы 4 тождества 1, 3 и 5 являются независимыми, а для тождеств 2 и 4 этот вопрос остается открытым.

Заключение. Данная магистерская работа была посвящена изучению алгебр отношений. А именно, предметом внимания являлись алгебры отношений с примитивно-позитивными (диофантовыми) операциями, то есть с операциями, которые в своей предваренной форме содержат только кванторы существования и операции конъюнкции.

В магистерской работе были приведены основные определениями и обозначениями, связанными с алгеброй отношений с примитивно-позитивными операциями. Рассмотрены основные понятия общей алгебры. Рассмотрено представление диофантовых операций с помощью графов. Изучена эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями на основе статьи Д. А. Бредихина. Представлен результат, полученный в ходе самостоятельной работы, в которой доказывается теорема о базисах тождеств некоторого класса группоидов бинарных отношений с примитивно-позитивными операциями. Идея доказательства достаточности восходит к работам Д. А. Бредихина. И разработан алгоритм проверки системы на независимость, который в последствии реализован в компьютерной программе. Проведен анализ результатов, были получены новые выводы для теорем о многообразиях определённых на системе тождеств из работ Бредихина Д.А.