МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной алгебры и теории чисел

Тождества группоидов бинарных отношений

АВТОРЕФЕРАТ

студента 2 курса 227 группы

направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Казанцева Максима Николаевича

Научный руководитель
доцент, к.ф-м.н., доцент ________________ А.М. Водолазов

Зав. кафедрой
зав. каф., к.ф.-м.н., доцент ________________ А.М. Водолазов

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Теория алгебр отношений является одной из составных частей активно развивающейся в последнее время алгебраической логики. Изучение операций над отношениями начато более столетия назад Де Морганом, Пирсом и Шредером. Систематическое рассмотрение этого вопроса с алгебраической точки зрения связано с работами А.Тарского. Предметом нашего рассмотрения будут вопросы, касающиеся нахождения базисов тождеств многообразий, порожденных классами алгебр отношений с одной бинарной диофантовой операцией, то есть классами группоидов отношений. Мотивация такого рода исследований приведена в [8, 13]. Некоторые результаты в этом направлении можно также найти в работах [6, 11, 12]. Проблема независимости уходит корнями в древность. В «Началах» Евклида были сформулированы 5 постулатов. Наиболее интересным был 5й постулат: «Если [на плоскости] при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов меньше 180°, то эти прямые при достаточном продолжении пересекаются, и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше 180°». Дело в том, что только этот постулат никак не мог быть выраженным из остальных 4х. Как оказалось, он был независимым. На изучение этого факта потребовалось много лет. Была даже создана наука «абсолютная геометрия», базировавшаяся на отрицании 5го постулата [1]. Независимость до сих пор является фундаментальной проблемой в алгебре. Не всегда находятся тривиальные пути решения этого вопроса. По этой теме публикуются научные работы и развиваются методы решения.

В данной работе будет изучена проблема независимости системы тождеств на множестве группоидов бинарных отношений. В первом разделе рассматриваются общие теоретические понятия из математической логики, общей алгебры, алгебры отношений и языка термов. Таким образом вводится понятийный аппарат, который используется в постановке задачи. Второй раздел посвящен необходимым сведениям о многообразиях, вводится понятие базиса, независимого базиса, описывается модель проверки системы на независимость.

ОСНОВНОЙ РАЗДЕЛ

Множество $Rel(U)$ всех бинарных отношений, заданных на U, относительно операции умножения отношений $\odot$ образует полугруппу отношений и всякая полугруппа изоморфно вкладывается в полугруппу отношений $(Rel(U), \odot)$. Вместе с операцией умножения отношений на множестве $Rel(U)$ могут быть рассмотрены и другие операции, несущие дополнительную информацию об указанной полугруппе. Возникающие при этом алгебраические структуры могут быть рассмотрены в рамках теории алгебр отношений. В общем случае под алгеброй отношений над данным множеством мы понимаем пару (Φ, Ω), где Ω — некоторая совокупность операций над отношениями и Φ — множество отношений, замкнутое относительно операций из Ω. Обозначим $R(\Omega)$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений над всевозможными множествами с операциями из Ω.

подробно рассмотрим такое фундаментальное понятие математики, как множетво и операции над множествами, также введем понятия алгебраических структур, широко применяемые в разных областях науки и техники. К таким понятиям относятся, в первую очередь, понятия: универсальной алгебры, гомоморфизма универсальных алгебр (понятия термов, тождеств, предикатов).

Согласно Кантору, под множеством понимается совокупность объектов некой природы, которая рассматривается как единое целое.

Это описание понятия множества не считается логическим определением, а всего лишь поясняет суть определения.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита:$A, B, C, ...$ Объекты, входящие в состав данного множества, называются его элементами. Элементы множества будем обозначать строчными латинскими буквами: $a, b, c, ...$ [4].

Предложения вида «объект a есть элемент множества A», «объект a принадлежит множеству A», имеющие один и тот же смысл, кратко записывают в виде $a \in A$. Если элемент а не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$.

Определение 1. Объединением, или суммой множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат либо множеству A, либо B.

$C = A \cup B = \{c_i : c_i \in A \textit{ или } c_i \in B\}$

Определение 2. Пересечением множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

$C = A \cap B = \{c_i : c_i \in A \textit{ или } c_i \in B\}$

Определение 3. Дополнение A множества A есть множество, элементы которого принадлежат универсальному множеству U и не принадлежат A.

$C = \bar{A} = \{c_i : c_i \in U \textit{ и } c_i \notin A\}$

Определение 4. Разность множеств A/B - множество, состоящее из элементов множества A и не принадлежащих множеству B.

$C = A/B = \{c_i : c_i \notin A \textit{ и } c_i \notin B\}$

Обобщением понятия упорядоченной пары является понятие кортежа (вектора) – упорядоченного набора произвольных, не обязательно различных n объектов. Кортеж, состоящий из элементов $x_1, x_2, \cdots x_n$ обозначается$(x_1, x_2, \cdots x_n)$ или $\langle x_1, x_2, \cdots x_n \rangle$. Элементы $x_i (i = 1, 2 \cdots, n)$ называются компонентами кортежа. Длина кортежа – число координат вектора Кортежи длины два называются часто упорядоченными парами, кортежи длины три – упорядоченными тройками и т.д., кортежи длины n – упорядоченными n-ми («энками»).

Определение 5. Пусть $a_1, a_2, \cdots, a_n$ — элементы некоторых множеств, $n \in N$. Определим индуктивно последовательность $(a_1, a_2 \cdots, a_n)$:

при $n = 1 (a_1) = a_1$;

при $n = 2 (a_1, a_2) = \{a_1, (a_1, a_2)\}$;

при $n > 2 (a_1, a_2 \cdots, a_n) = \{(a_1, a_2 \cdots, a_{n-1}) a_n\}$.

Последовательность (a_1, a_2) называется упорядоченной парой элементов a_1, a_2 .

Определение 6. Пусть R - произвольное кольцо. Если существует такое натуральное число n, что для каждого $r \in R$ выполняется равенство $nr = 0$, то наименьшее из таких чисел n (скажем, n_0) называется характеристикой кольца R, а само R называется кольцом (положительной) характеристики n_0. Если же таких натуральных чисел n не существует, то R называется кольцом характеристики 0.

Определение 7. Пусть $A_1, A_2 \cdots, A_n$,$n \in N$ — какие-то непустые множества. Их декартовым произведением $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ называется множество:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2 \cdots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

Определение 8. Помеченным ориентированным графом с метками из W мы будем называть пару $G = (V, E)$, где $V = V(G)$ - множество, называемое множеством вершин, и $E(G) \subset V \times W \times V$- тернарное отношение.

Определение 9. Будем говорить, что граф $G^{'}$ является подграфом графа G и писать $G^{'} \subset G$, если $V(G^{'}) \subset V(G)$ и $E(G^{'}) \subset E(G)$. Граф $(V^{'}, E|V^{'})$, где $E|V^{'} = E \cup V^{'} \times W \times V^{'}$ назовем полным подграфом графа (V, E) на подмножестве $V^{'} \subset V$.

Определение 10. Будем гвоорить, что граф $\widetilde{G}= G/\eta$, где η- отношение эквивалентности, порожденное множеством пар $\{(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)\}$, получен из графа G отождествлением вершин u_k с вершинами $v_k (k = 1, \ldots, n)$.

Определение 11. Отображение $f : V(G) \to V(G^{'})$ называется гомоморфизмом графа G в граф $G^{'}$, если $(f(u), k, f(v)) \in E(G^{'})$ для всякого ребра $(u, k, v) \in E(G)$. Взаимно однозначный гомоморфизм $G^{'}$ в G.

Определение 12. Граф G называется графом без кратных ребер, если $|Lab(g)| = 1$.

Последовательность

$$v_0, (v_0, k_1, v_1), v_1, (v_1, k_1, v_2), v_2, \ldots, v_{n-1}, (v_{n-1}, k_n, v_n), v_n$$

вершин и ребер графа G называется путем из вершины v_0 в вершину v_n, последовательно проходящем через вершины $v_0, \ldots, v_n$ по ребрам $(v_0, k_1, v_1), \ldots, (v_{n-1}, k_n, v_n)$. Вершина v_0 называется началом, а вершина v_n - концом пути; число n называется длиной пути (путь нулевой длины состоит из одной вершины). Всякий путь ненулевой длины очевидным образом может быть задан последовательностью составляющих ребер. Цепью графа G называется путь в соотнесенном ему неориентированном графе. Цепью графа G называется путь в соотнесенном ему неориентированном графе. Путь, цепь называются простыми, если каждое ребро входит в задающую их последовательность ровно один раз.

Множество всех путей графа G из вершины u в вершину v обозначим через $\overrightarrow{S}_{u,v}(G)$ $|S_{u,v}(G)|$. Для всяких путей $s_1 \in \overrightarrow{S}_{u,v}(G)$ и $s_2 \in \overrightarrow{S}_{u,v}(G)$ назовем путь $s_1 s_2$ из вершины u в вершину w, последовательно проходящей по ребрам пути s_1 и s_2, произведением путей s_1 и s_2. Для всякой цепи $s \in S_{u,v}(G)$ назовем цепь s^{-1} из вершины v в вершину u, проходящую по ребрам цепи s в противоположном направлении, обратной к цепи s.

Отношение между вершинами является отношением эквивалентности, определяющим разбиение $\{V_i\}_{i \in I}$ множества вершин V графа (V, E). Графы $(V_i, E|V_i)$ называются компонентами связности графа G. Граф называется связным, если он имеет ровно одну компоненту связности, т.е. если любые две его вершины связаны цепью.

Сосредоточим внимание на операции произведения отношений $\circ$ и унарной операции рефлексивной двойной цилиндрофикации:

$$\nabla(p)\ F_g(p) = \{(u,v) : (\exists w)(w,w) \in p\}.$$

Заметим, что эту операцию можно рассматривать как операцию-индикатор существования неподвижных точек для бинарных отношений. Действительно, $\nabla(p) = U \times U$, если p содержит пару вида (w,w), $\nabla(p) = \varnothing$ - в противном случае.

В следующей теореме находится базис тождеств для многообразия $Var\{\circ, \nabla\}$.

Теорема 1. Алгебра $(A, \cdot, *)$ типа $(2,1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:

$$1)\ (xy)z = x(yz),\ 2)\ (x^*)^2 = x^*,\ 3)\ x^*xx^* = x^*,\ 4)\ (x^*y)^2 = x^*y,\ :$$
$$5)\ (xy^*)^2 = xy^*,\ 6)\ (xy)^* = (yx)^*,\ 7)\ x^*yz^* = z^*yx^*,\ 8)\ (xy^*z)^* = y^*zxy^*,$$
$$9)\ x^*yx^*zx^* = x^*zx^*yx^*\ 10)\ x^*(x^p)^* = x^* \text{ *для любого простого числа* } p.$$

Найденный в теореме 1 базис тождеств является бесконечным. Естественно возникает вопрос о конечной базируемости этого многообразия.

Теорема 2. Многообразие $Var\{\circ, \nabla\}$ не является конечно базируемым.

Теорема 3. Тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная магистерская работа была посвящена изучению алгебр отношений. А именно, предметом нашего внимания являлись алгебры отношений с примитивно-позитивными (диофантовыми) операциями.Основным результатом данной работы является нахождение базисов тождеств для многообразий $Var\{*\}$, $Var\{*, \subset\}$ и $Var\{*, \cup\}$. Доказательства основываются на описаниях эквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями, полученных в $[7, 9, 10]$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Tarski, A. On the calculus of relations / A. Tarski //- J. Symbolic Logic. 1941. -Vol 4. -P. 73-89.

2 Tarski, A. Some methodological results concerning the calculus of relations / A. Tarski //- J. Symbolic Logic. 1953. -Vol. 18. -P. 188-189.

3 Schein, B. M. Relation algebras and function semigroups / B. M. Schein //- Semigroup Forum. 1970. -Vol. 1. -P. 1-62.

4 Jónsson, B. Varieties of relation algebras / B. Jónsson //- Algebra Universalis. 1982. -Vol. 54. -P. 273-299.

5 Andreka, H. The equational theory of union-free algebras of relations / H. Andreka, D. A. Bredikhin //- Algebra Universalis. 1994. -Vol. 33. -P. 516-532.

6 Bredikhin, D. A. Varietes of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations / D. A. Bredikhin //- Semigroup Forum. 1992. -Vol. 44. -P. 87-92.

7 Бредихин, Д. А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями / Д. А. Бредихин //- Изв. вузов. Математика. 1993, № 3. -С. 23-30.

8 Bredikhin, D. A. On relation algebras with general superpositions / D. A. Bredikhin //- Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. -Vol. 54. -P. 111-124.

9 Bredikhin, D. A. On quasi-identities of algebras of relations with diophantine operations / D.A. Bredikhin //- Siberian Mathematical Journal. 1997. -Vol. 38, № 1. -P. 23-33.

10 Bredikhin, D.A. On algebras of relations with Diophantine operations / D. A. Bredikhin //- Doklady Mathematics. 1998. -Vol. 57, № 3. -P. 435-436.

11 Бредихин, Д. А. О многообразии группоидов бинарных отношений / Д. А. Бредихин //- Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. -Т. 13, вып. 1, ч. 1. -С. 93-98.

12 Бредихин, Д. А. О многообразиях группоидов отношений с диофантовыми операциями / Д. А. Брежихин //- Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. -Т. 13, вып. 1, ч. 2. -С. 28-34.

13 Bredikhin, D. A. On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrifi- cation / D. A. Bredikhin //- Algebra Universalis. 2015. -Vol. 73. -P. 43-52. DOI : 10.1007/s00012-014-0313-0.

14 Böner, P. Clones of operations on binary relations / P. Böner, F. R. Pöschel //- Contributions to general algebras. 1991. -Vol. 7. -P. 50-70.

15 Henkin, L. Cylindric Algebras, Part I / L. Henkin, D. J. Monk, A. Tarski //- North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London, 1971. -P. 50-65.