МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра __Нелинейной физики__

Динамика биллиарда типа “стадион” с осциллирующими границами

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента__4__ курса __411__группы
направления ____03.03.01 Прикладные математика и физика______________
код и наименование направления (специальности)
_______________факультета нелинейных процессов______________________
наименование факультета, института, колледжа
___________________Юшманова Сергея Дмитриевича____________________
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
___к. ф.–м.н., доцент ____ ____________________ _Савин А. В.___
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
___к. ф.–м.н., доцент ___ ____________________ _Бегинин Е. Н._
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов 2019 год

Введение

Впервые концепция динамического хаоса получила строгое обоснование в 1970-х годах на достаточно простой модели статистической физики — бильярде. Рассмотрение бильярдных моделей восходит к работам Ж. Адамара, в которых изучалось движение на закрученной поверхности отрицательной кривизны. Позднее бильярды как динамические системы исследовались Д. Биркгофом [1]. Более полное рассмотрение вопросов, касающихся динамики материальных точек в ограниченной области, проведено Н.С. Крыловым [2]. Вопросы, возникающие при изучении бильярдных задач, тесно связаны с эргодической гипотезой Больцмана, и поэтому бильярдные модели до сих пор вызывают большой интерес. Системы бильярдного типа с возмущаемыми границами, — это достаточно новая область математической физики, которая открывает большие перспективы в исследовании некоторых фундаментальных проблем классической статистической механики [3]. Так, с новой стороны раскрывается проблема ускорения космических частиц до высоких энергий — ускорения Ферми. Начиная с классической работы Ферми [4], эта проблема до сих пор привлекает к себе внимание исследователей из самых различных областей физики: оптики [5], физики плазмы [6], астрофизики [7] и др. Не так давно подобные идеи были привлечены для объяснения ряда экспериментальных результатов, полученных в атомной физике [8]. Впервые механизм ускорения частиц вследствие их столкновения с движущимися массивными рассеивателями был предложен Э. Ферми [4] для объяснения происхождения космических частиц высоких энергий. Позднее были разработаны модель Ферми – Улама и другие модели, в той или иной степени объясняющие происхождение этого явления. Бильярды с возмущаемыми границами можно рассматривать как обобщение модели Ферми - Улама. Так, в работе [11] было проведено исследование бильярдов в форме эллипса и окружности и показано, что, как и в модели Ферми - Улама, рост скорости ограничен. В работе [12] рассмотрен бильярд в области, образованной прямоугольником, углы которого заменены четвертями окружностей радиусом R, а одна из сторон периодически осциллирует. Результаты работы [10] прояснили причину уменьшения скорости релаксации системы. Дело в том, что в фокусирующих бильярдах, в зависимости от начальной скорости частицы, наблюдается также замедление частиц. Динамика рассеивающих бильярдов с возмущаемыми границами подробно описана в [13]. Отметим, что полученные результаты дают основание полагать, что в хаотических бильярдах с осциллирующими границами всегда должно наблюдаться ускорение частиц. Более того, на основании проведенных исследований авторами работ [13] была выдвинута гипотеза о том, что детерминированная случайность — это достаточное условие возникновения ускорения Ферми. Механизмы возникновения хаоса в рассеивающих и фокусирующих бильярдах различны [9]. В первом случае параллельный пучок, попав на рассеивающую компоненту, сразу начинает расходиться. Во втором случае после отражения от фокусирующей компоненты пучок сходится в точке фокусировки. Хаос в таком бильярде возникает, если время, в течение которого пучки сходятся, меньше времени расхождения (т.е. происходит расфокусирование пучка траекторий).

В данной работе будет исследоваться динамика биллиарда типа “стадион” с осциллирующими границами.

Модель биллиарда типа стадион по форме представляет из себя две дуги окружности, соединенные стенками с обоих сторон, с разными пропорциями[14,15]. Мы будем исследовать биллиард, как показано на рисунке, где *a* –ширина биллиарда, *b*- высота дуги, *l*-длина между дугами, *R*-радиус дуги, *Ф*-половина угловой меры дуги. Введем динамические переменные φ - угол отклонения от центра, a^*- угол падения. Положительным направлением для углов φ и a^* примем направление против часовой стрелки, а для угла a_n — по часовой стрелке. Если граница бильярда неподвижна, то угол падения равен углу отражения a_n. Пусть V_n — скорость частицы, а t_n — время n-го столкновения с границей. Для построения отображения, описывающего динамику частицы в таком бильярде, необходимо рассмотреть два случая: 1) после очередного столкновения с фокусирующей компонентой частица сталкивается с ней же (парные столкновения), 2) следующее столкновение происходит с другой фокусирующей компонентой [16].

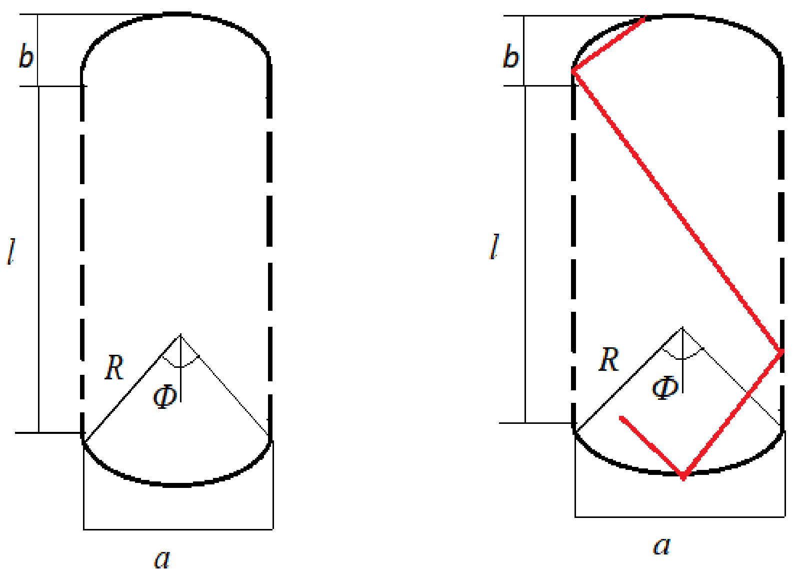


Рис.1 Модель биллиарда типа стадион, с траекторией движения точки

Для случая парных столкновений геометрический анализ приводит к отображению вида

$$\alpha^{*}_{n+1}=\alpha_n$$

$$\alpha_{n+1}=\alpha^{*}_{n+1}$$

$$\varphi_{n+1}=\varphi_n+\pi-2\alpha_n\ (mod\ 2\pi) \qquad (1)$$

$$t_{n+1}=t_n+2R\cos\alpha_n/V_n$$

Если следующий угол отражения меньше половины угловой меры угла, то частица продолжает каскад столкновений с одной компонентой. В противном случае следующее столкновение произойдет с другой фокусирующей компонентой. При переходе от одной фокусирующей компоненты к другой отображение запишется как

$$\alpha_{n+1}=\arcsin\left[\sin(\psi_n+\Phi)-x^{*}_{n+1}*\cos\psi_n/R\right]$$

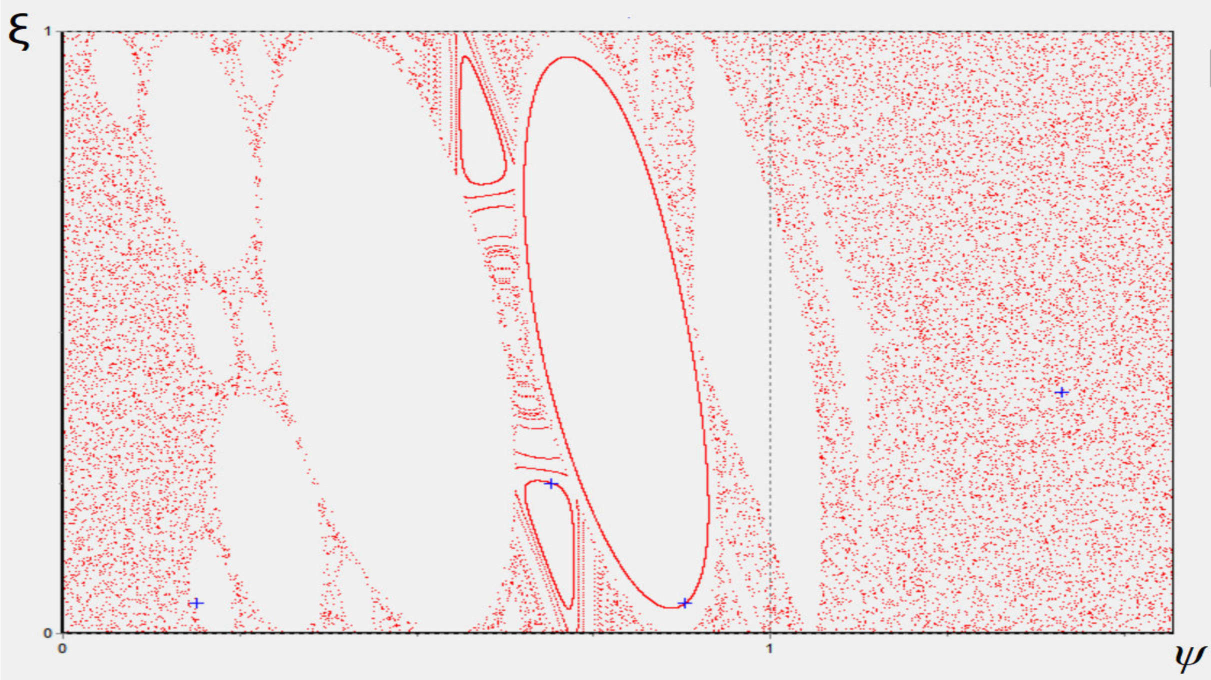
$$\alpha_{n+1}=\alpha^{*}_{n+1}$$

$$\varphi_{n+1}=\psi_n-\alpha^{*}_{n+1} \qquad (2)$$

$$t_{n+1}=t_n+(R^{*}(\cos\varphi_n+\cos\varphi_{n+1}-2\cos(\Phi))+l)/V_n\cos\psi_n$$

где следующие обозначения $\psi_n=\alpha_n-\varphi_n$, $x_n=(R/\cos\psi_n)[\sin\alpha_n+\sin(\Phi-\psi_n)]$, $x^{*}_{n+1}=x_n+l\,\mathrm{tg}\psi_n$ (mod$a$)

Была построена программа, в результате которой были построены фазовые портреты системы биллиарда типа стадион.



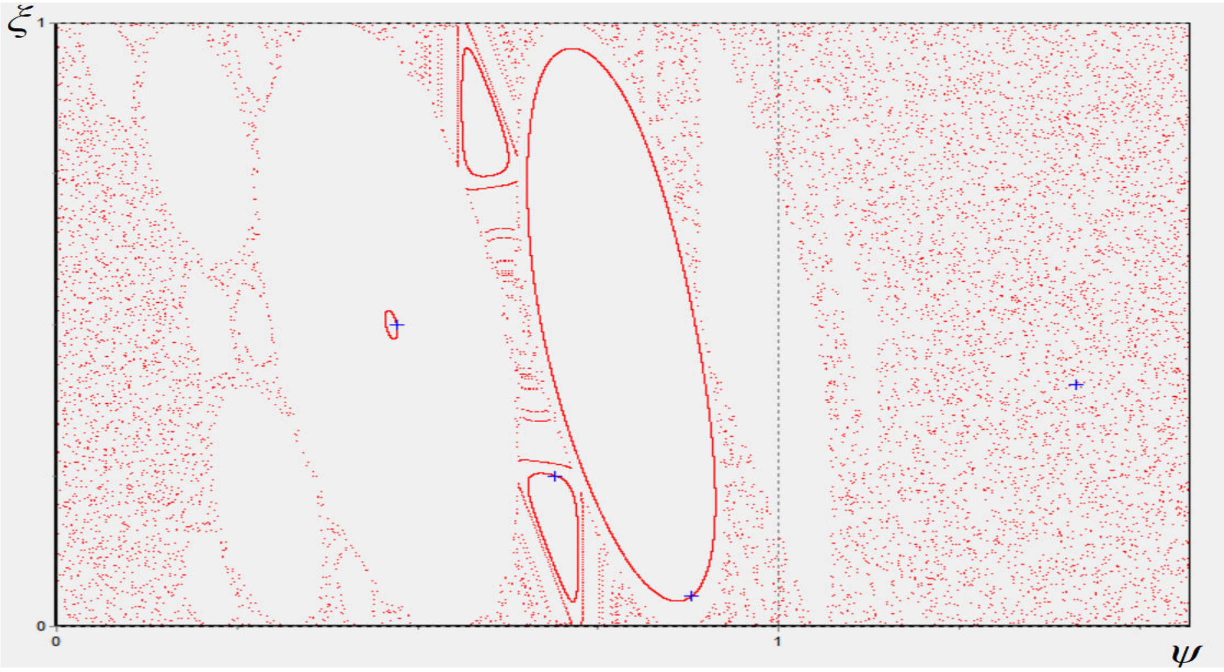


Рис.2 Траектория движения 4 точек в биллиарде типа „стадион” с начальными условиями в ψ =0.15·π; ξ:= 0.5 ψ =0.45·π;ξ=0.4;ψ =0.22·π; ξ= 0.25;ψ =0.28·π;ξ= 0.05 начальные значения параметров: *a*= 0.5, *b*= 0.01, *l*= 1(а).

На полученных фазовых портретах видно, что в системе существуют устойчивые неподвижные точки, окруженные инвариантными кривыми. Динамика частиц в окрестностях этих точек является регулярной, отвечающей движению вдоль таких инвариантных кривых. Области, соответствующие различным резонансам, разделены сепаратрисами, окруженными стохастическим слоем. Ширина этого слоя определяется степенью нелинейности системы. Частица, начав движение в таком слое, посещает все доступные ей области хаотическим образом.

Разрушение всех резонансов и переход к хаосу произойдет, если $4bl/a^2>1$. С возрастанием нелинейности неподвижные точки теряют устойчивость, в результате чего образуется область глобальной стохастичности, в которой частице доступно уже все фазовое пространство.

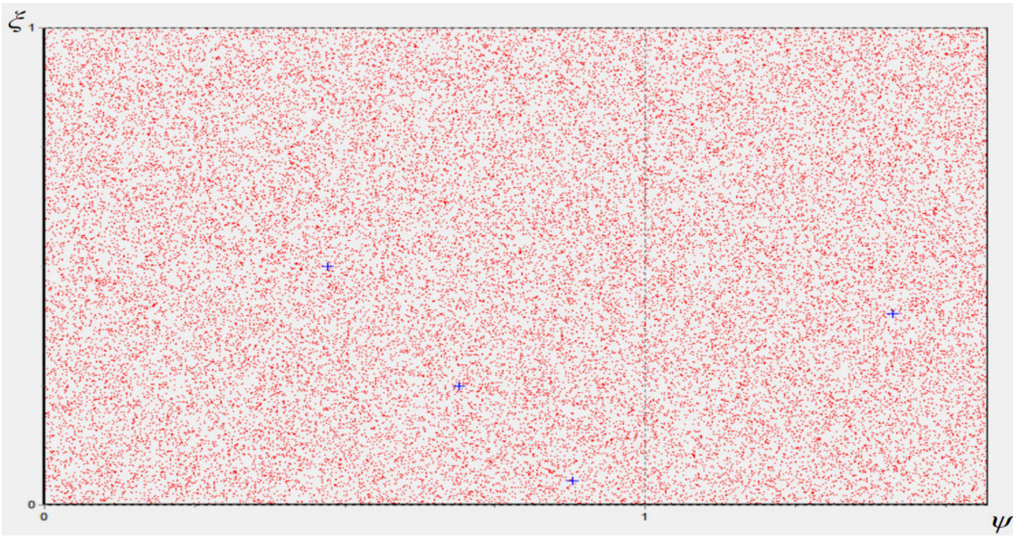


Рис.3 Траектория движения точек в биллиарде типа „стадион” с выполненным условием $4bl/a^2 > 1$

Во второй главе работы было рассмотрено устройство системы биллиарда типа стадион с осциллирующими стенками, поведение частицы в нем, а так же главные особенности и физический феномен происходящие в нем ускорение материальной точки при ударе со стенками биллиарда. Была описана зависимость от парных соударений с одной дугой, и при переходе для другой дуги.

$$V_n= \sqrt{V^2_{n-1} + 4V_{n-1}\cos\alpha^*_n U_n+4U^2_n}$$

$$a_n = arcsin(V_{n-1} \sin \alpha^*_n / V_n) \qquad (5)$$

При $|\varphi_{n+1}| \leq \Phi$

$$\alpha^*_{n+1} = \alpha_n \qquad (6)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \ (mod\ 2\pi)$$

$$t_{n+1} = t_n + 2R\cos\alpha_n / V_n$$

Если следующий угол отражения меньше половины угловой меры угла, то частица продолжает каскад столкновений с одной компонентой. В противном случае следующее столкновение произойдет с другой фокусирующей компонентой. При $|\varphi_n + \pi - 2\alpha_n| > \Phi$

$$\psi_n = \alpha_n - \varphi_n$$

$$x_n = (R/\cos\psi_n)[\sin\alpha_n + \sin(\Phi - \psi_n)],$$

$$x^*_{n+1} = x_n + l\,\mathrm{tg}\psi_n \ (\mathrm{mod}\, a)$$

$$\alpha_{n+1} = arcsin\Big[sin(\psi_n + \Phi) - x^*_{n+1} * cos\psi_n / R\Big] \qquad (7)$$

$$\varphi_{n+1} = \psi_n - \alpha^*_{n+1}$$

$$t_{n+1} = t_n + (R^*(\cos\varphi_n + \cos\varphi_{n+1} - 2\cos(\Phi)) + l) / V_n \cos\psi_n$$

При помощи ранее построенного фазового портрета, были выбраны начальные точки, для которых проводилось 50000 итераций, при разных начальных скоростях.

Начальные точки брались в окрестности ξ (± 0.01), ψ (± 0.01π) где ξ это нормированная на ширину бильярда проекция точки столкновения частицы с фокусирующей компонентой на ось *Ox*, ψ это угол между вектором скорости и вертикалью.

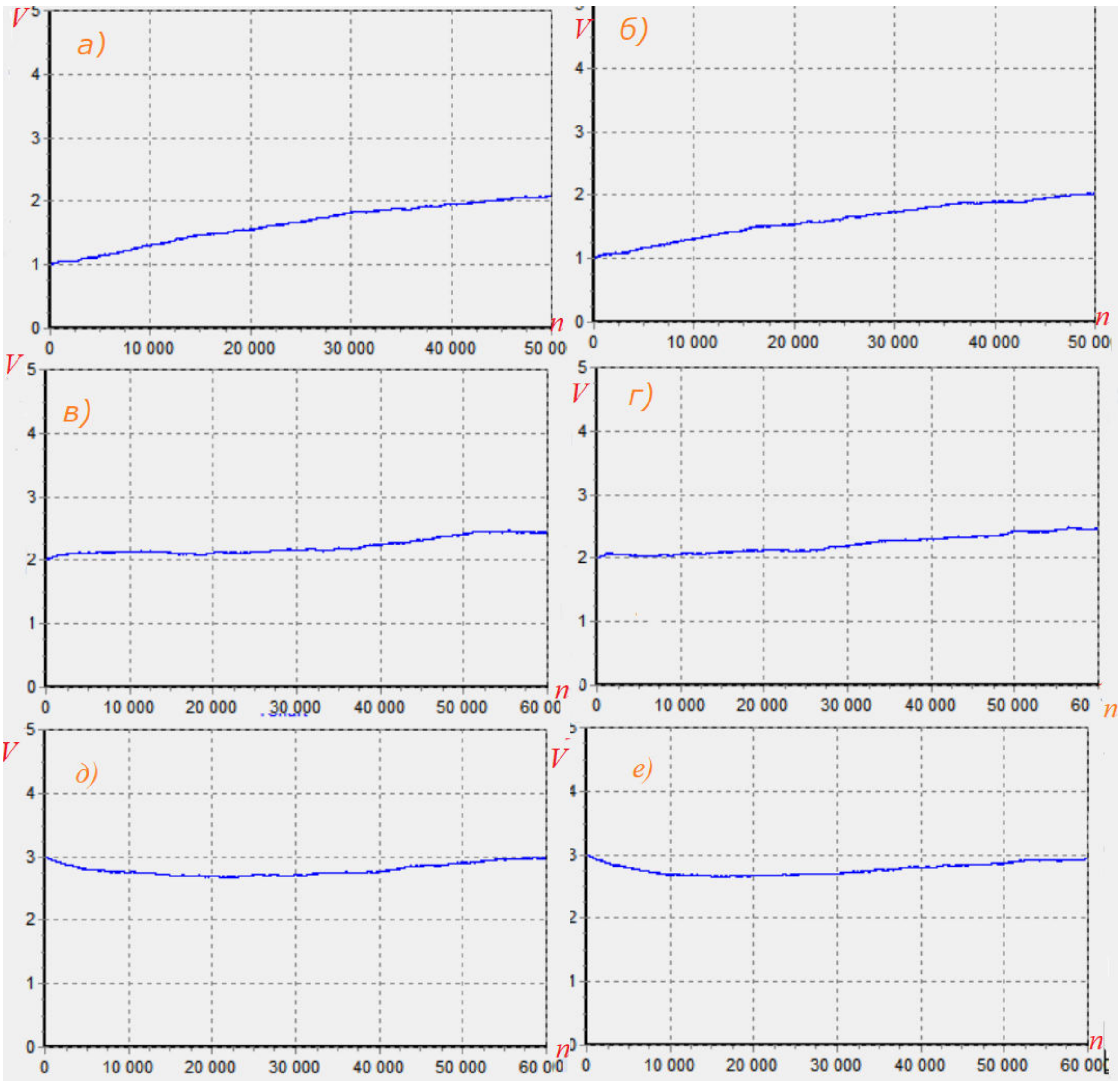


Рис.4 Зависимость средней скорости от количества итераций, при разных начальных скоростях, ξ и ψ а)V=1 ξ =0.4 ψ=0.1π ; б)V=1 ξ=0.6 ψ=0.4πV=2 в)V=2 ξ =0.8 ψ=0.1π ; г) V=2 ξ=0.2 ψ=0.4π д)V=3 ξ =0.6 ψ=0.3π ; е)V=3 ξ =0.6 ψ=0.1π

Исходя из рисунка (4) видно, что при значении начальной скорости V=1 и V=2 средняя скорость увеличивается, причем чем меньше она тем быстрее идет прирост, а при скорости V=3 средняя скорость сначала уменьшается а потом начинает возрастать.

Так же было рассмотрена зависимость средней скорости в биллиарде с развитыми хаотическими свойствами

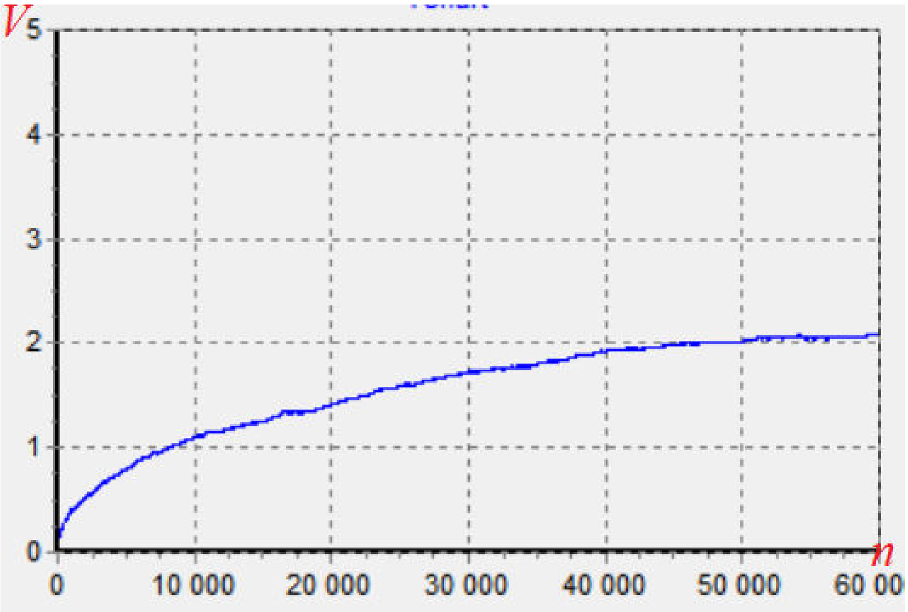


Рис 5. Зависимость средней скорости для биллиарда развитыми хаотическими свойствами *(b* = 0,25) V=0.1

Из рисунка (10) видно, что для биллиарда с развитыми хаотичными свойствами, когда b=0.25, а начальная скорость V=0.1, зависимость средней скорости имеет вид близкий к $V(n) \sim \sqrt{n}$

Заключение

В ходе работы была разработана программа, при помощи которой строились фазовые портреты и зависимости средней скорости от числа соударений в биллиарде типа стадион с осциллирующими стенками. Полученные результаты подтвердили полученные в работах ранее. Было получено что в зависимости от изменения нормированной на ширину бильярда проекции точки столкновения частицы с фокусирующей компонентой на ось Ox, средняя скорость меняет свое поведение, чем меньше нормированной на ширину бильярда проекции точки столкновения частицы с фокусирующей компонентой на ось Ox, тем больше соударений нужно частицы, чтобы достигнуть определенной скорости, но эта зависимость такая незначительная, что ею можно пренебречь, а так же от изменения угла между вектором скорости и вертикалью, средняя скорость меняет свое поведение, чем больше угол между вектором скорости и вертикалью, тем меньше нужно соударений частицы с стенками, чтобы достигнуть определенной скорости, но эта зависимость видна при первых 10000 соударений, эта зависимость настолько слаба, что ею можно пренебречь.

Список литературы

1. Биркгоф Д Динамические системы (Ижевск: Изд. дом «Удм. ун-т» (1999)
2. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.-Л.: Из-во АН СССР, 1950
3. А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. Основы теории сложных систем. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007
4. Fermi E *Phys. Rev.* 75 1169 (1949)
5. Saif F et al. *Phys. Rev. A* 58 4779 (1998)
6. Milovanov A V, Zelenyi L M *Phys. Rev. E* 64 052101 (2001)
7. Kobayakawa K, Honda Y S, Samura T *Phys. Rev. D* 66 083004(2002)
8. Lanzanô G et al. Phys. Rev. Lett. 83 4518 (1999)
9. Бунимович Л А, в сб. *Итоги науки и техники* (Динамические системы, Т. 2, Сер. Современные проблемы математики.Фундаментальные направления) (М.: ВИНИТИ, 1985)
10. Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г. // ЖЭТФ. 1999
11. Kamphorst S O, de Carvalho S P *Nonlinearity* 12 1363 (1999)
12. Tsang K Y, Ngai K L *Phys. Rev. E* 56 R17 (1997)
13. Лоскутов А Ю, Рябов А Б, в сб. Нелинейные волны — 2004 (Под ред А В Гапонова-Грехова, В И Некоркина) (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005) с. 510
14. Г.А. Гальперин, Н.И. Чернов БИЛЛИАРДЫ И ХАОС, Москва: «Знание»,1991.
15. Г.А. Гальперин, А.Н. Земляков Математические биллиарды Москва: «Наука», 1990.
16. А.Ю. Лоскутов, Динамический хаос. Системы классической механики// Успехи физических наук, Том 177, № 9, стр.1008-1011, 2007 г.