

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра компьютерной физики и метаматериалов  
на базе Саратовского филиала Института радиотехники  
и электроники им. В.А. Котельникова РАН

**Обобщение операторного подхода  
к исследованию хаотических отображений на двумерный случай**

**АВТОРЕФЕРАТ  
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

Студента 4 курса 432 группы  
направления 03.03.02 «Физика»  
физического факультета

Никонова Андрея Михайловича

Научный руководитель

к.ф.-м.н.; доцент

Ремизов А.С.

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н.; декан

Аникин В.М.

Саратов 2019

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** Одним из значимых достижений физической науки прошлого столетия является возникновение и становление теории детерминированного хаоса. Это не завершённый ещё математический аппарат, описывающий поведение детерминированных нелинейных динамических систем, которые, при определённых условиях, демонстрируют хаотическое поведение, обусловленное сильной чувствительностью системы к начальным условиям. Говорят, что в таких системах имеет место явление динамического (детерминированного) хаоса. Как следствие упомянутой чувствительности, поведение системы кажется случайным, даже если модель, описывающая систему, является детерминированной. Существует также такая область физики, как теория квантового хаоса, изучающая недетерминированные системы, подчиняющиеся законам квантовой механики. В современной литературе термин «хаотический» применяется к таким движениям в детерминированных физических и математических системах, траектории которых обнаруживают *сильную зависимость от начальных условий*.

Другое свойство хаотических систем – потеря информации о начальных условиях. Предположим, что мы способны измерить координату с точностью  $\Delta v$ . Разделим теперь плоскость координата – скорость (называемую фазовой плоскостью) на ячейки площадью  $\Delta x \Delta v$ . Если начальные условия заданы с конечной точностью, то мы знаем, что система находится где-то в заштрихованной области на фазовой плоскости. Но если система хаотична, то эта неопределённость со временем растёт, увеличиваясь до размера  $N(t)$  ячеек. Увеличение неопределённости, описываемое законом  $N \sim N_0 \exp(ht)$ , является вторым характерным свойством хаотических систем.

Естественным для динамических систем с хаотическим поведением является статистическое описание. Поскольку начальное состояние физической системы не может быть задано абсолютно точно (например, из-за ограничений

измерительных инструментов), то всегда приходится рассматривать некоторую (пусть и очень маленькую) область начальных значений. При движении в ограниченной области пространства экспоненциальная расходимость с течением времени близких орбит приводит к перемешиванию начальных точек по всей области. После такого перемешивания бессмысленно говорить о координате частицы, но можно найти вероятность её нахождения в некоторой точке.

Традиционно одномерные отображения исследуют в рамках операторного подхода, реализующего вероятное описание хаотических систем. Р

Распространение операторного описания на двумерные отображения и является **целью** данной работы.

В **задачи** работы входят:

- 1) описание операторного метода исследования хаотических отображений, свойств оператора Перрона-Фробениуса (ОПФ);
- 2) обзор двумерных хаотических отображений;
- 3) вывод интегрального вида ОПФ для двумерного случая
- 4) анализ возможностей перехода от интегральной записи к функциональным уравнениям

**Структура и объем работы.** Выпускная квалификационная работа изложена на 42 страницах, состоит из введения, 3 разделов и заключения. Библиографический список включает 22 наименования. Текст с иллюстрирован 14 рисунками.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 описывается операторный метод исследования одномерных хаотических отображений на основе ассоциированного с отображением оператора Перрона-Фробениуса.

В главе 2 приводятся некоторые типы известных двумерных хаотических отображений – отображения Энона и отображения «подкова», отображения Заславского, стандартного отображения, кубического отображения (Холмса), отображения Икеды, отображение пекаря.

В главе 3 формулируются уравнения и оператор Перрона\_Фробениуса для четырех возможных случаев записи оператора Перрона фробениуса.

Двумерные отображения можно рассматривать как модельные динамические системы, состояние которых характеризуется двумя скалярными переменными  $x$  и  $y$  – фазовое пространство этой динамической системы двумерно. Отображение переводит одни точки фазовой плоскости в другие с помощью некоторого преобразования. Будем рассматривать отображения, определённые на единичном квадрате (рисунок 1):

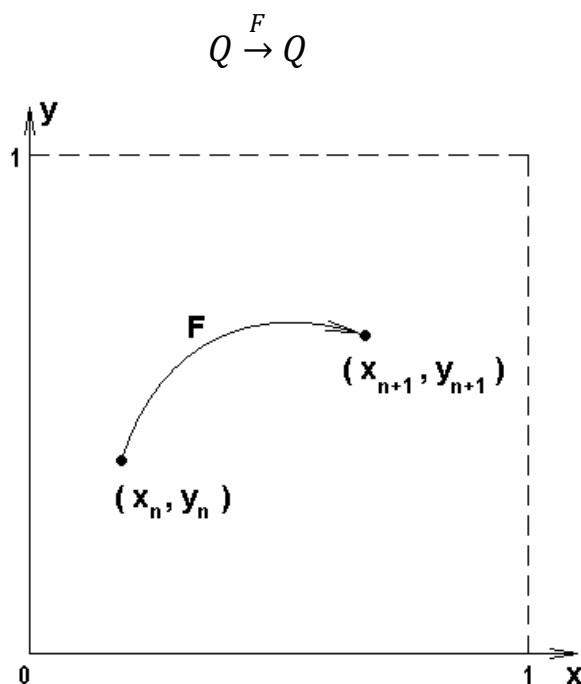


Рисунок 3.1 – Визуализация двумерного отображения.

Оператор эволюции может быть задан разными способами. Преобразование каждой из координат фазовой плоскости может зависеть как от своего предыдущего значения, так и от предыдущих значений других координат. Рассмотрим несколько случаев.

**Случай 1.**  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n), g(y_n))$ .

Самый простой случай – преобразования координат не зависят одно от другого, а зависят только от предыдущего состояния. Другими словами, в качестве отдельных компонент данных двумерных отображений используются одномерные отображения (двумерное фазовое пространство может быть представлено произведением одномерных пространств).

Простейший пример – когда оба преобразования одинаковы и являются сдвигами Бернулли – так называемое отображение «преломление хлебов»:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (\{2x_n\}, \{2y_n\}).$$

**Случай 2.**  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n), g(x_n, y_n))$

или  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(y_n))$ .

При вычислении следующего значения одной из координат учитывается не только её предыдущее значение, но и предыдущее значение другой координаты – одно из преобразований зависит от другого.

$$g(x_n, y_n) = g(f(x_{n-1}), y_n)$$

или  $f(x_n, y_n) = f(x_n, g(y_{n-1}))$ .

Самый известный пример – отображение пекаря.

**Случай 3.** Почти та же ситуация, что и в предыдущем случае, за исключением того, что преобразования координат могут осуществляться по предыдущему значению «чужой» координаты:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(y_n), g(x_n, y_n))$$

или  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(x_n))$ .

Отображениями такого сорта являются отображение Энона (2.1), отображение Заславского, кубическое отображение.

**Случай 4.**  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(x_n, y_n))$ .

При вычислении каждого из последующих значений координат учитываются предшествующие значения обеих координат – преобразования взаимосвязаны.

$$(f(x_n, y_n), g(x_n, y_n)) = (f(x_n, g(y_{n-1})), g(f(x_{n-1}), y_n)).$$

К такого рода отображениям относится стандартное, а также отображение Икеды .

**Случай 5.**  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n, y_n), g(x_{n+1}, y_n))$ . (

При вычислении последующего состояния системы учитываются предыдущие значения обеих координат и, по одному из преобразований – текущее, только что вычисленное значение.

Кроме разных способов получения последующего состояния системы, два измерения позволяют рассматривать связки разных типов одномерных преобразований по координатам. Хаотическими могут быть как оба одномерных преобразования, так и только одно из них. Все эти различные случаи характеризуются разными особенностями операторного описания отображений.

### **Оператор Перрона-Фробениуса**

#### **для различных типов двумерных отображений**

**Случай 1.** Оператор имеет самый простой вид:

$$\rho_{n+1}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(x - f(t)) \delta(y - g(\tau)) \rho_n(t, \tau) dt d\tau,$$

который можно сделать ещё проще, учитывая, что в случае независимых преобразований по координатным осям, координаты случайной точки  $(X_n, Y_n)$  независимы, следовательно, двумерная плотность представляется просто произведением одномерных плотностей:

$$\rho(x, y) = \rho(x)\rho(y).$$

А это означает, что оператор для двумерной плотности в данном случае равен произведению действий операторов для одномерных плотностей:

$$\rho_{n+1}(x, y) = P\rho_n(x, y) = P_x\rho_n(x)P_y\rho_n(y).$$

Очевидно, что тоже справедливо и для собственных функций:

$$P\psi_{n,m}(x, y) = P_x\psi_n(x)P_y\psi_m(y).$$

Учитывая, что функции собственные, запишем:

$$\lambda_{n,m}\psi_{n,m}(x, y) = \lambda_n\lambda_m\psi_n(x)\psi_m(y),$$

откуда следует, что собственные числа двумерного оператора записываются как произведение собственных чисел соответствующих одномерных операторов, также и с собственными функциями:

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= \lambda_n\lambda_m, \\ \psi_{n,m}(x, y) &= \psi_n(x)\psi_m(y). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Таким образом, для исследования двумерного отображения, эволюция которого определяется преобразованиями типа 1, достаточно исследовать соответствующие координатные одномерные отображения. Решения спектральных задач операторов связаны простым соотношением.

Отсюда незамедлительно следует вывод, что для отображения «преломление хлебов» собственные функции и собственные числа его двумерного оператора имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= \frac{1}{2^n * 2^m}, \\ \psi_{n,m}(x, y) &= B_n(x)B_m(y), \end{aligned}$$

где  $B_n(x)$  и  $B_m(y)$  – полиномы Бернулли.

**Случай 2.** Для преобразования типа 2 оператор имеет вид :

$$P\rho(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(x - f(t))\delta(y - g(t, \tau))\rho(t, \tau) dt d\tau$$

Здесь координаты случайно точки уже не являются независимыми величинами, поэтому так просто, как в предыдущем случае, преобразовать интеграл не

удастся. Разобьем область определения отображения на интервалы монотонности  $f(t)$ , тогда получится несколько интегралов:

$$P\rho(x, y) = \sum_{i=1}^g \int_0^1 \int_{a_{i-1}}^{a_i} \delta(x - f_i(t)) \delta(y - g(t, \tau)) \rho(t, \tau) dt d\tau,$$

где  $g$  – число монотонных участков функции  $f(t)$ ,  $(a_{i-1}, a_i)$  – границы этих участков, а  $f_i(x)$  – её монотонные ветви. Сделаем в этих интегралах замены переменных вида  $z = f_i(t)$ :

$$P\rho(x, y) = \sum_{i=1}^g \int_0^1 \int_{a_{i-1}}^{a_i} \delta(x - z) \delta(y - g(f_i^{-1}(z), \tau)) \rho(f_i^{-1}(z), \tau) f_i^{-1}'(z) dz d\tau.$$

Теперь воспользуемся фильтрующим свойством дельта-функции:

$$P\rho(x, y) = \sum_{i=1}^g f_i^{-1}'(x) \theta_{f_i(a_{i-1}), f_i(a_i)}(x) * \int_0^1 \delta(y - g(f_i^{-1}(x), \tau)) \rho(f_i^{-1}(x), \tau) d\tau.$$

В случае, если монотонные участки функции  $f(t)$  таковы, что её значения на границах участков равны 0 или 1 – иными словами, монотонные ветви полные – то характеристическая функция отрезков упрощается:

$$P\rho(x, y) = \sum_{i=1}^g f_i^{-1}'(x) \theta_{0,1}(x) * \int_0^1 \delta(y - g(f_i^{-1}(x), \tau)) \rho(f_i^{-1}(x), \tau) d\tau.$$

Дальнейшие преобразования затруднены проблемой обращения двумерной функции  $g(f_i^{-1}(x), \tau)$ , однако, для конкретного вида отображения можно попытаться получить какие-нибудь результаты. В случае преобразования пекаря зависимость функции  $g(x, y)$  от первой переменной представлена в характеристической функции отрезка, а это позволяет обратить эту функцию под интегралом. Продемонстрируем это.

Для отображения пекаря функции преобразований по координатам имеют вид:



$$f(x) = 2x\theta_{0,\frac{1}{2}}(x) + (2x - 1)\theta_{\frac{1}{2},1}(x),$$

$$g(x, y) = \frac{y}{2}\theta_{0,\frac{1}{2}}(x) + \frac{y+1}{2}\theta_{\frac{1}{2},1}(x).$$

Поэтому в конечном итоге оператор Перрона-Фробениуса для этого отображения представится в виде:

$$P\rho(x, y) = \left[ \rho\left(\frac{x}{2}, 2y\right)\theta_{0,\frac{1}{2}}(y) + \rho\left(\frac{x+1}{2}, 2y-1\right)\theta_{\frac{1}{2},1}(y) \right] \theta_{0,1}(x).$$

Этот результат известный, получить его удастся благодаря тому, что связь координатных преобразований друг с другом заложена в характеристических функциях отрезков.

Легко убедиться, что инвариантной плотностью для этого отображения (соответственно неподвижной точкой оператора Перрона-Фробениуса является двумерная равномерная плотность  $\rho(x, y) = 1 * \theta_{0,1}(x)\theta_{0,1}(y)$ ). Тем самым, найдена низшая собственная функция с единичным собственным числом:

$$\psi_{0,0}(x, y) = \theta_{0,1}(x)\theta_{0,1}(y),$$

$$\lambda_{0,0} = 1.$$

Однако при попытке отыскать другие собственные функции, возникают большие сложности. Спектральная задача имеет вид:

$$P\psi_{n,m}(x, y) = \lambda_{n,m}\psi_{n,m}(x, y).$$

Вполне вероятно, что  $\psi_{0,0}(x, y)$  единственная функция из гильбертова пространства для данного отображения, а все остальные собственные функции являются обобщёнными.<sup>1</sup>

В самом деле, если мы будем искать часть собственных функций в виде  $\psi_{0,m}(x, y) = \psi_m(y)\theta_{0,1}(x)\theta_{0,1}(y)$ , то

$$P_o\psi_m(y) = \left[ \psi_m(2y)\theta_{0,\frac{1}{2}}(y) + \psi_m(2y-1)\theta_{\frac{1}{2},1}(y) \right].$$

А это ничто иное, как оператор Купмана для отображения сдвиг Бернулли (оператор, сопряжённый к оператору Перрона-Фробениуса). Этот оператор

---

<sup>1</sup> Шиллов Г.Е. Математический анализ, второй специальный курс. Москва, Наука, 1965

изометрический, т.е.  $\langle P_0\varphi | P_0\varphi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle$ . Трудности выявляются именно здесь, так как в гильбертовом пространстве изометрический оператор может иметь собственные значения только равные по модулю единице. Однако  $P_0$  допускает в качестве собственных функций обобщенные функции – распределения в смысле Л. Шварца. Функции эти найдены И. Пригожиным и имеют вид:

$$\psi_m(y) = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} [\delta^{n-1}(x-1) - \delta^{n-1}(x)].$$

**Случай 3.** Для преобразования типа 3 результаты практически идентичны полученным для преобразования типа 2:

$$P\rho(x, y) = \sum_{i=1}^g f_i^{-1}(x) \theta_{f_i(a_{i-1}), f_i(a_i)}(x) * \int_0^1 \delta(y - g(f_i^{-1}(x))) \rho(t, f_i^{-1}(x)) dt.$$

В функциях  $g$  и  $p$  под интегралом поменяны местами аргументы.

**Случай 3.** Для преобразования типа 3 имеем оператор в форме

$$P\rho(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \delta(x - f(t, \tau)) \delta(y - g(t, \tau)) \rho(t, \tau) dt d\tau.$$

Из рассматриваемых преобразований этот случай самый тяжёлый. Получить какие-либо результаты, не оговаривая конкретного вида функций  $f$  и  $g$ , не удаётся. Однако можно утверждать, что, если преобразования координат взаимосвязаны через характеристические функции отрезков, то есть надежда получить явный вид этого оператора. Явный в том смысле, что удастся записать функциональное (без интегралов) уравнение для нахождения собственных функций. Связь функций можно представить так:

$$f(x, y) = \sum_i f_i(x) \theta_{a_{i-1}, a_i}(y),$$

и

$$g(x, y) = \sum_i g_i(y) \theta_{b_{i-1}, b_i}(x).$$

Если имеет место только одна связь, то оператор примет вид:

$$P\rho(x, y) = \sum_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_0^1 \delta(x - f_i(t)) \delta(y - g(t, \tau)) \rho(t, \tau) dt d\tau.$$

Очевидно, что одной связи недостаточно, так как неясно, каким образом обращать функцию  $g$ .

Пусть имеет место обе связи, тогда получаем соответствующий вид оператора:

$$P\rho(x, y) = \sum_i \sum_j \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{b_{j-1}}^{b_j} \delta(x - f_i(t)) \delta(y - g_j(t, \tau)) \rho(t, \tau) dt d\tau.$$

Появляется возможность обращать функции  $f_i$  и  $g_j$ , однако, следует учитывать, что сами эти кусочки преобразований могут быть необратимыми, и придётся ввести в рассмотрение ещё две суммы по ветвям монотонности этих функций.

Сначала предположим, что функции  $f_i$  и  $g_j$  монотонны и обратимы. Тогда, делая замены вида  $z = f_i(t)$  и  $h = g_j(\tau)$ , получим:

$$P\rho(x, y) = \sum_i \sum_j \int_{g_j(a_{i-1})}^{g_j(a_i)} \int_{f_i(b_{j-1})}^{f_i(b_j)} \delta(x - z) \delta(y - h) \rho(f_i^{-1}(z), g_j^{-1}(h)) f_i^{-1}'(z) g_j^{-1}'(h) dz dh.$$

И применяя фильтрующее свойство дельта-функции, в итоге найдем:

$$P\rho(x, y) = \sum_i \sum_j f_i^{-1}'(x) g_j^{-1}'(y) \rho(f_i^{-1}(x), g_j^{-1}(y)) * \theta_{f_i(b_{j-1}), f_i(b_j)}(x) \theta_{g_j(a_{i-1}), g_j(a_i)}(y).$$

В случае, если границы связующих характеристических функций отрезков таковы, что функции преобразований  $f_i$  и  $g_i$  на этих границах принимают значения 0 или 1, то вид оператора еще немного упрощается:

$$P\rho(x, y) = \theta_{0,1}(x)\theta_{0,1}(y) \sum_i \sum_j f_i^{-1}'(x)g_j^{-1}'(y)\rho(f_i^{-1}(x), g_j^{-1}(y)).$$

Представление операторов в полученном виде в случае заданных координатных преобразований позволяет записывать функциональные уравнения для его собственных функций и искать решение спектрально задачи. В случае, если функции  $f_i$  и  $g_j$  немонотонны, следует ещё раз разбить интегралы – по участкам монотонности, в операторе будет присутствовать четыре суммы, а у преобразующих функций будет по два индекса.

## ВЫВОДЫ

Основным достоинством операторного подхода в изучении хаотических отображений является переход от поиска и исследования точного решения нелинейных разностных уравнений, определяющих анализируемую динамическую систему, к решению спектральной задачи для линейного оператора, ассоциированного с данной динамической системой. Дискретный спектр оператора говорит о скорости установления равновесного состояния в системе. Низшая собственная функция, соответствующая единичному собственному числу, имеет смысл инвариантной плотности и позволяет определить вероятность нахождения системы в том или ином состоянии.

Определено, что если координаты случайной точки в фазовом пространстве двумерного отображения – пара случайных чисел – являются независимыми, то оператор Перрона-Фробениуса для такого случая выражается через произведение действий операторов одномерных отображений, соответствующих преобразованиям координат. Решение спектральной задачи в этом случае сводится к исследованию пары одномерных операторов.

Выяснено, какие трудности возникают, если два случайных числа, определяющих состояние системы, не являются независимыми. В этой ситуации возникают сложности с получением явного вида оператора, а именно, не удаётся в общем случае перейти от интегрального представления оператора к функцио-

нальному. Намечены способы преодоления этих трудностей – найден тип связи случайных величин, при котором такой переход осуществим.

На примере отображения пекаря (оно как раз обладает подходящим типом связи) продемонстрировано применение операторного подхода к исследованию двумерных отображений, частично решена спектральная задача.

#### **Список основных использованных источников**

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. М., 1988
2. Кузнецов С.П. Динамический хаос.- М.: Физматлит, 2001. 295 с.
3. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса.- М.: Мир, 1986. 430 с.
4. Андреев К.В., Красичков Л.В. Моделирование электрической активности нейрона с помощью кусочно-непрерывных отображений.// Письма в ЖТФ, 2003, том 29, выпуск 3, стр.46-52
5. Hiroshi H. Hasegawa and Dean J. Driebe, Intrinsic irreversibility and the validity of the kinetic description of chaotic systems.//Physical Review E, Volume 50, number 3, September 1994, page 1781
6. S. Lakshmibala and M. V. Satyanarayana, Phase estimation, photon cloning and the Bernoulli map.// Physics Letters A, Volume 298, Issue 1, 27 May 2002, Pages 1-6
7. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 360 с.
8. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
9. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Аналитическое решение спектральной задачи для оператора Перрона–Фробениуса кусочно–линейных хаотических отображений// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 2. с.16–34.
10. Мун Ф. Хаотические колебания. М. Мир, 1990г, с. 39, 209, 282.

11. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. Москва, Наука, 1991, с.41.
12. Лихтенберг А., Либерман М. "Регулярная и стохастическая динамик". Москва, Мир, 1984, с.528.
13. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. Москва. Наука, 1974, с.271.
14. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. – М.: Изд-во физ.-мат.лит., 2002. – 252 с.
15. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. – 296 с.
16. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 709.
17. Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В. Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды. // Письма в ЖТФ, 2007, том 33, выпуск 3, с.57-63
18. Шилов Г.Е. Математический анализ, второй специальный курс. М. Наука. 1965.