МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

Свойства одномерных сопряжённых хаотических отображений

АВТОРЕФЕРАТ ВЫПУСКНОЙ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 432 группы

направления 03.03.02 «Физика» физического факультета

Овечкина Александра Сергеевича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н. ____________ С.С. Аркадакский

29.05.2019

Зав. кафедрой

профессор, д.ф.-м.н. ____________ В.М. Аникин

29.05.2019

Саратов – 2019

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В работе приведены данные о динамических системах, демонстрирующих хаотическое поведение, построенные на основе сопряжения с «базовыми» отображениями с равномерным инвариантным распределением. Такие отображения могут использоваться в качестве датчиков псевдослучайных чисел с заданными инвариантными законами распределения (с позиции эволюционного оператора Перрона-Фробениуса, ассоциированного с выбранным отображением).

Целью работы является обзор соответствующей литературы и написание учебного пособия по аналитическому методу исследования, основанному на вероятностном описании и использовании свойств сопряжённых отображений.

Структура и объём работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, состоящей из трёх глав, заключения, приложения и списка использованной литературы. Всего в работе 39 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **ведении** указано, что среди модельных систем с хаотическим поведением есть системы, «живущие» в дискретном времени – так называемые отображения, которые описываются нелинейными **разностными** уравнениями. Исследование таких систем имеет и фундаментальное, и прикладное значение. Так, некоторые отображения демонстрируют сценарии перехода от регулярной динамики к хаосу, присущие и более реалистичным системам.

В первой главе определено дно из фундаментальных понятий современной физики – понятие динамической системы. О динамической системе говорят в том случае, если можно указать набор величин, называемых динамическими переменными и характеризующих состояние системы, такой, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу. В последнее время в теоретических исследованиях и в работах прикладного характера часто рассматривают системы с дискретным временем, которые описываются нелинейными разностными уравнениями. Их называют рекуррентными отображениями или просто отображениями. Высокая чувствительность к начальным условиям, приводящая к хаотическому поведению во времени, — типичное свойство таких систем. Причиной хаотической динамики является свойство нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории, которые остаются при этом в ограниченной области фазового пространства. Таким образом, становится практически невозможным предсказать длительное поведение системы, поскольку начальные условия можно задать лишь с конечной точностью, а ошибки очень быстро (экспоненциально) нарастают с течением времени.

Рассмотрены модельные системы, состояние которых характеризуется одной-единственной переменной x (фазовое пространство одномерно), а оператор эволюции задан нелинейным разностным уравнением вида

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu). \tag{1}$$

На простом примере двоичного сдвига Бернулли показано, что эта динамическая система демонстрирует хаотическое поведение, а траектории в фазовом пространстве быстро разбегаются, что обуславливает необходимость использования вероятностного подхода для анализа хаотических отображений.

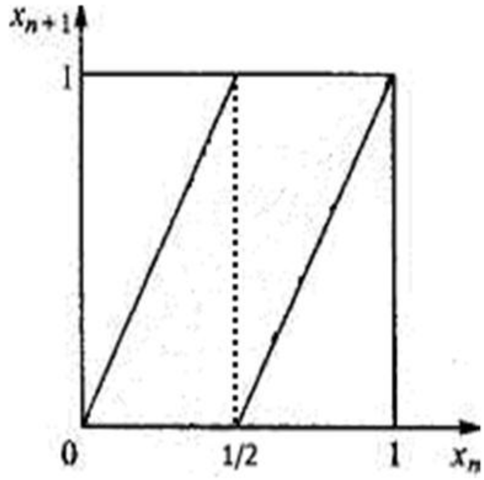

Рис.1.1. Отображение «двоичный сдвиг Бернулли»

Чувствительная зависимость от начального значения приводит к существованию предела предсказуемости: независимо от того, какова (конечная) точность задания начального значения, существует номер итерации N, начиная с которого нельзя предсказать последующие значения итераций.

При вероятностном подходе к анализу отображений предполагают, что начальное значение есть случайная величина с известным законом распределения. Определения и соотношения теории вероятностей приведены в приложении.

Соотношение, связывающее законы распределения случайных величин X_i и X_{i+1}, имеет вид:

$$\rho_{i+1}(y)=\int_0^1 \delta(y-f(x))\rho_i(x)dx, \tag{2}$$

где $\delta(y)$ - дельта-функция Дирака.

Данное соотношение является ключевым при вероятностном описании рассматриваемых динамических систем: оно позволяет определить, как связаны плотности вероятностей на i-м и $(i+1)$-м шагах итераций в зависимости от итерируемой функции $f(x)$.

Предельная плотность вероятности должна удовлетворять интегральному **уравнению Фробениуса - Перрона**:

$$\widetilde{\rho}(y)=\int_0^1 \delta(y-f(x))\widetilde{\rho}(x)dx \tag{3}$$

Оператором Фробениуса-Перрона (ОФП) $\hat{P}$ называют интегральный оператор, определяемый соотношением:

$$\hat{P}\psi(y)=\int_0^1 \delta(y-f(x))\psi(x)dx \tag{4}$$

Таким образом, при вероятностном подходе к описанию хаотических отображений вместо поиска точного решения нелинейного разностного уравнения необходимо решать спектральную задачу для ассоциированного с исследуемой динамической системой **линейного** интегрального оператора Фробениуса – Перрона.

Количественные меры хаоса. О выходе системы на хаотический режим можно судить по количественным характеристикам. Если качественные критерии позволяют констатировать выход системы на хаотический режим, то количественные меры хаоса позволяют сравнивать хаотические режимы и определять, какой из них более хаотичен (или менее регулярен). Следует подчеркнуть, что приводимые ниже количественные меры хаоса характеризуют различные аспекты хаотических режимов.

Показатель Ляпунова. Одна из отличительных особенностей нелинейных систем — чувствительная зависимость решений от начальных условий. Даже небольшого возмущения начальных условий достаточно для того, чтобы фазовые траектории в дальнейшем быстро (экспоненциально) разошлись.

Количественной мерой скорости экспоненциального разбегания траекторий служит показатель Ляпунова, определяемый соотношением:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\left|\frac{df^{N}(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \tag{5}$$

Показатель Ляпунова можно выразить и через вероятностные характеристики:

$$\lambda = \int_0^1 \tilde{\rho}(x)\ln\left|\frac{df(x)}{dx}\right|dx \tag{6}$$

где $\tilde{\rho}(x)$ - инвариантная плотность для рассматриваемого отображения.

Следует отметить, что соотношение (6) для показателя Ляпунова справедливо для **любой** траектории, начинающейся в произвольной точке x_0. При этом следует помнить, что наряду с траекториями, притягивающимися к странному аттрактору, существуют и другие траектории - неподвижные точки и циклы. Для последних показатель Ляпунова может быть вычислен только через траекторные характеристики с помощью соотношения (5), содержащего предельный переход. Следует помнить, что точки отрезка $[0,1]$, в которых начинаются подобные траектории, составляют множество меры нуль.

Инвариантная плотность

Инвариантная плотность определяется как плотность вероятности, не изменяющаяся под действием оператора Фробениуса – Перрона, ассоциированного с рассматриваемым отображением. Инвариантная плотность совпадает с низшей собственной функцией оператора Фробениуса – Перрона, соответствующей единичному собственному числу, и потому является неподвижной точкой этого оператора. Следует помнить, что для рассматриваемых динамических систем существует неразрывная связь между траекторными и вероятностными характеристиками. Подтверждением тому служит соотношение, позволяющее выразить инвариантную плотность через точное решение:

$$\tilde{\rho}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta(x - x_i(x_0)), \tag{7}$$

где $x_i(x_0)$ - i-ая итерация, начинающаяся в точке x_0.

Корреляционная функция. Корреляционной (или автокорреляционной) функцией называется величина

$$C(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{x}_{m+j} \hat{x}_j \tag{8}$$

Функция C(m) служит мерой корреляции итераций, номера которых отличаются на m. Если орбита $\{f^j(x_0)\}$ хаотическая, то корреляция отсутствует, и C(m) спадает до нуля.

Во второй главе рассмотрены свойства сопряжённых отображений. Аналитическое исследование одномерных отображений существенно упрощается, если все возможные отображения разбить на определённые группы, объединяемые общими свойствами, и выделить в каждой наиболее простые (канонические, базовые), которые и необходимо исследовать в первую очередь. Кроме того, необходимо построить алгоритм, позволяющий для заданного отображения отыскивать соответствующее ему базовое, а по известным свойствам базового отображения определять свойства исследуемого.

Наиболее простыми свойствами обладают отображения, имеющие равномерное инвариантное распределение, их ОФП оставляет на месте константу. Прежде всего, это отображения, имеющие кусочно – линейные итерируемые функции, у которых все ветви полные (каждая линейная ветвь отображает «свой» участок отрезка $[0,1]$ на весь единичный отрезок). Кусочно - линейные отображения имеют следующие свойства:

- инвариантное распределение для них является равномерным;
- собственные функции ОФП представимы произведением полиномов на индикаторную функцию единичного отрезка.

Сопряжёнными называют отображения, итерируемые функции которых преобразуются друг в друга посредством монотонной замены независимой переменной. Итерируемые функции сопряжённых отображений связаны соотношением:

$$F(x) = \varphi^{-1}(f(\varphi(x))), \tag{9}$$

где $\varphi(x)$ монотонная сопрягающая функция.

Соотношение (9) впервые получено американским математиком Ст. Уламом и является функциональным уравнением: если задать две входящие в (2.3) функции, то третья подлежит определению. При этом легко решается задача «синтеза» отображений – при заданных итерируемой функции исходного отображения и сопрягающей функции итерируемая функция нового отображения определяется из (9) без труда. В случае, когда необходимо найти сопрягающую функцию, стандартных алгоритмов решения задачи не существует.

Параметры сопряжённых отображений связаны между собой. Считаем, что все свойства одного отображения известны.

Точное решение. Если $x_n = \Phi(n, x_0)$, то для второго отображения с очевидностью имеем:

$$y_n = \varphi^{-1}(\Phi(n, \varphi(y_0)) \cdot$$

Инвариантная плотность. После несложных преобразований убеждаемся, что инвариантные плотности сопряжённых отображений связаны между собой соотношением:

$$R(y) = |\varphi'(y)|\tilde{\rho}(\varphi(y)) \qquad (10)$$

Наиболее простой вид соотношение (10) приобретает в случае, когда исходное отображение является базовым (имеет равномерное инвариантное распределение $\tilde{\rho}(x) = 1$). Тогда

$$R(y) = |\varphi'(y)| \qquad (11)$$

Собственные функции оператора Фробениуса-Перрона. Пусть известны собственные функции $\psi_n(x)$ ОФП для исходного отображения. Собственные функции сопряжённого отображения определяются соотношением:

$$\Phi_n(y) = |\varphi'(y)|\psi_n(\varphi(y)) \qquad (12)$$

При этом собственные числа оператора не изменяются, то есть являются инвариантом преобразования Улама.

Показатель Ляпунова для сопряжённых отображений также является инвариантом.

Анализ, проведённый во второй главе, позволяет сделать следующие выводы.

1. Для отображений, связанных монотонным преобразованием переменной (сопряжённых отображений) собственные числа оператора Фробениуса – Перрона и показатель Ляпунова являются инвариантами.
2. Собственные функции оператора Фробениуса – Перрона сопряжённых отображений связаны соотношением, которое позволяет легко определять набор собственных функций для исследуемого отображения, если известно решение спектральной задачи для сопряжённого ему известного (базового) отображения.

3. Особенно простые соотношения получаются, если в качестве исходного отображения используется базовое, поэтому исследование нового отображения существенно упрощается, если удаётся отыскать функцию, сопрягающую исследуемое отображение с базовым. Обсуждение проблемы поиска сопрягающей функции выходит за рамки данной дипломной работы.

В третьей главе свойства сопряжённых отображений использованы для моделирования случайных величин с заданным законом распределения

Пусть необходимо моделировать на отрезке $[0,1]$ случайную величину с интегральным законом распределения

$$W(y)=\int_0^y R(\xi)d\xi \qquad (13)$$

Здесь $R(y)$ - плотность вероятности, связанная с интегральным законом распределения соотношением: $R(y)=\dfrac{dW(y)}{dy}$. Отметим, что $R(y)$ - функция неотрицательная, а $W(y)$ - неубывающая, т. е. монотонная. Тогда для моделирования случайной величины с законом распределения $W(y)$ достаточно выбрать любое базовое отображение

$$x_{n+1}=f(x_n), \quad x_n\in[0,1]$$

и выполнить в нём монотонную замену переменной $x=W(y)$. В соответствии с приведёнными выше результатами вновь полученное отображение будет иметь необходимую инвариантную плотность. Поэтому итерации такого отображения имеют на отрезке $[0,1]$ заданный закон распределения.

В заключении приводится перечень основных выводов, полученных в работе.

ВЫВОДЫ

В данной выпускной квалификационной работе показано, что при изучении свойств одномерных отображений эффективным является использование известных свойств сопряжённых отображений. Алгоритм исследования содержит несколько этапов:

- определение базового отображения, сопряжённого исследуемому;
- анализ базового отображения;
- получение характеристик исследуемого отображения по характеристикам базового отображения.

На примере пары сопряжённых отображений (tent – map и логистическое отображение) продемонстрировано использование общих соотношений для описания отображения, имеющего квадратичную итерируемую функцию. Приведённые в дипломной работе результаты могут быть использованы для моделирования случайных величин с заданным законом распределения, что необходимо при численном моделировании различных процессов.

Список использованной литературы

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос.- М.: Физматлит, 2001. 295 с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос.- М.: Мир, 1988.
3. Пригожин И. От существующего к возникающему.- М.: Наука, 1985. 328 с.
4. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса.- М.: Мир, 1986. 430 с.
5. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М. Специальные функции в теории детерминированного хаоса// Известия вузов - Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т.8 № 6. С. 50 -58.
6. Голубенцев А.Ф. Аникин В.М. Аркадакский С.С. О некоторых свойствах оператора Фробениуса - Перрона для сдвигов Бернулли // Известия вузов - Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 2. С. 67 - 73
7. Голубенцев А.Ф. Аникин В.М. Аркадакский С.С.Сопряжённые хаотические отображения: построение, траекторные, вероятностные и спектральные ха-

рактеристики.// Проблемы современной физики. К 90-летию Саратовского государственного университета и 40-летию сотрудничества ОИЯИ - СГУ. Под общей ред. А.Н. Сисакяна и Д.И. Трубецкова. Дубна: ОИЯИ, 2000. С. 172 - 179.

8. Katsura Sh., Fukuda W. Exactly solvable models showing chaotic behavior // Physica A. 1985. V. 130A. No 3. P. 597-605.
9. Улам С. Нерешённые математические задачи. М.: Наука, 1964.
10. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Собственные функции и числа оператора Перрона-Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 62-75.
11. Кузнецов С. П.,. Динамический хаос (курс лекций) М: Физматлит, 2001.
12. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
13. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: УРСС, 2006
14. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М. Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // Изв. вузов – Прикладная нелинейная динамика. 2005. № 1-2. С.3-17.
15. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
16. Evans M., Harrell II. Dynamical Systems and Chaos.
17. Магницкий Н. А. О стабилизации неподвижных точек хаотических отображений / Н. А. Магницкий // Доклады РАН. 1996.- Т. 351. № 2. С. 175-177.
18. Lynch, Stephen. "Nonlinear discrete dynamical systems." Dynamical Systems with Applications using Maple. Birkhäuser Boston, 2010. 263-295.
19. Малинецкий Г. Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. - М. : Эдиториал УРСС, 2000. 336с.
20. Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики . М. : Физматлит, 2003. - 296 с.