

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра компьютерной физики и метаматериалов на базе Саратовского  
филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

**Скорость установления инвариантного распределения  
для одномерных хаотических отображений**

АВТОРЕФЕРАТ

ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ  
студента 4 курса 432 группы  
направления 03.03.02 «Физика» физического факультета  
Янюшкина Алексея Васильевича

Научный руководитель  
доцент, к.ф.-м.н.

С.С. Аркадакский

---

29.05.2019

Зав. кафедрой  
профессор, д.ф.-м.н.

В.М. Аникин

---

29.05.2019

Саратов 2019

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Прежде всего, нельзя недооценивать колоссального мировоззренческого значения исследований динамического хаоса. Окружающий нас мир полон нелинейных явлений и процессов, правильное представление о которых немислимо без понимания возможности хаоса, а также связанных с этим принципиальных ограничений на предсказуемость поведения сложных систем. Сказанное не мешает обсуждать возможность использования хаоса в системах различной природы для каких-либо конкретных практических целей или же учета тех последствий, к которым может привести возникновение сложной динамики.

Одно из возможных приложений хаоса состоит в использовании генерируемых динамическими системами хаотических сигналов в целях коммуникации. Благодаря хаотической природе сигналов открываются новые возможности кодирования информации, которая становится труднодоступной для перехвата.

Результаты, полученные в нелинейной динамике, открывают новые нетривиальные возможности для сжатия и хранения, а также обработки информации. Свойства одномерных отображений используются при моделировании случайных величин с заданным законом распределения. При этом существенное значение имеет скорость установления инвариантного распределения, определяющая статистические характеристики генерируемой выбранным отображением последовательности.

**Цель работы.** Один из параметров, характеризующих скорость перемешивания и скорость установления инвариантного распределения, – показатель Ляпунова. Кратко цель настоящей дипломной работы можно сформулировать так: определение свойств итерируемых функций, обеспечивающих максимально возможное значение показателя Ляпунова.

**Структура и объём работы.** Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, состоящей из двух глав, заключения, приложения и списка использованной литературы. Всего в работе 47 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** описан основной объект исследования и сформулирована цель работы. Объекты различной природы могут рассматриваться в известном приближении как динамические системы. Независимо от конкретной природы объекта, о нем говорят как о динамической системе, если можно указать набор величин, называемых динамическими переменными, которые полностью характеризуют состояние системы. При этом значения динамических переменных в любой последующий момент времени получаются из исходных значений по определенному правилу, которое задает оператор эволюции системы. Значительным достижением теории динамических систем стало открытие хаотической динамики. В хаотическом режиме сколь угодно малая неточность в задании начального состояния системы быстро нарастает во времени, так что на достаточно больших интервалах времени предсказуемость становится недостижимой. Такие режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени. В фазовом пространстве диссипативных систем этим режимам отвечают странные аттракторы — сложно устроенные множества, демонстрирующие все более тонкую структуру на разных уровнях ее разрешения (фракталы).

Особое место в теории динамического хаоса занимают отображения — динамические системы, задаваемые нелинейными разностными уравнениями.

В первой главе приведены основные свойства динамических систем, живущих в дискретном времени, одномерных отображений, которые описываются нелинейными разностными уравнениями. В этом случае под фазовой траекторией следует понимать некоторую дискретную последовательность точек в фазовом пространстве.

Одномерные отображения являются простейшими моделями хаотических динамических систем; их эволюцию определяет детерминированная вещественная итерируемая функция  $f(x)$ , определенная на некотором подмножестве  $X \subset R$  и переводящая его в себя:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0, \quad x \in X \subset R,$$

Отображения - очень специфический класс динамических систем, но их анализ оказывается полезным и важным, проливая свет на многие феномены, встречающиеся в более сложных ситуациях.

Если динамическая система, подобная по своим свойствам рассматриваемой модели, привлекается для описания какой-либо физически реалистичной ситуации, то попытка предсказания состояния на  $N$  шагов вперед сталкивается при увеличении  $N$  с необходимостью столь точного задания начальных условий, что это становится, в конце концов, принципиально невозможным. Иными словами, в рассматриваемой динамической системе существует предел предсказуемости, за которым ничего определённого о значениях  $x_n$  сказать нельзя, нельзя даже указать, в левой или правой половине единичного отрезка будет находиться значение  $x_n$  на  $n$ -ой итерации при условии  $n > N$ . Поэтому наиболее адекватным является вероятностное описание динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение.

Рассмотрим ансамбль динамических систем - большое количество идентичных систем (описываемых нелинейным разностным уравнением), различающихся только начальным значением. Считаем, что выбор  $i$ -ой системы с  $i$ -ым начальным условием происходит с вероятностью  $p_i$ . Такая постановка задачи означает, что начальным значением исследуемой динамической системы является не детерминированная, как раньше, а случайная величина с заданным законом распределения.

$$\rho_{i+1}(y) = \int_0^1 \delta(y - f(x)) \rho_i(x) dx. \quad (1)$$

Данное соотношение является основным при вероятностном описании рассматриваемых динамических систем. Оно позволяет определить, как связаны плотности вероятностей на  $i$ -м и  $(i+1)$ -м шагах итераций при различных итерируемых функциях  $f(x)$ .

Назовём оператором Фробениуса-Перрона (ОФП)  $\hat{P}$  интегральный оператор с ядром в виде дельта – функции Дирака, определяемый соотношением:

$$\hat{P}\psi(y) = \int_0^1 \delta(y - f(x))\psi(x)dx. \quad (2)$$

Инвариантная плотность  $\tilde{\rho}(x)$  есть неподвижная точка оператора Фробениуса-Перрона и, одновременно, низшая собственная функция этого оператора, соответствующая единичному собственному числу. Определённый равенством (2) оператор Фробениуса-Перрона не является самосопряжённым.

Собственные функции оператора определяются соотношением:

$$\hat{P}\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x) \quad (3)$$

В достаточно общем случае собственные функции ОФП удовлетворяют условию нормировки:

$$\int_0^1 \psi_n(x)dx = \delta_{n,0} \quad (4)$$

причём низшей (нулевой) считается собственная функция, соответствующая единичному собственному числу. Данное условие нормировки соответствует смыслу, придаваемому собственным функциям ОФП  $\psi_n(x)$ : нулевая собственная функция, соответствующая единичному собственному числу, совпадает с инвариантной плотностью распределения  $\psi_0(x) = \tilde{\rho}(x)$  и должна быть нормирована на 1; остальные собственные функции, как следует из соотношения (4), ортогональны единице.

Предположим, что для какого-либо отображения задан явный вид итерируемой функции, найдены собственные числа и собственные функции

ОФП. Несложно проследить, как изменяется начальный закон распределения после  $k$  итераций:

$$\hat{P}^k \rho_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_n^k \psi_n(x) \quad (5)$$

Соотношение (5) показывает, как устанавливается инвариантная плотность распределения. Если  $|\lambda_n| < 1$  (именно так ведут себя собственные числа ОФП), то вклад слагаемых, содержащих высшие собственные функции, уменьшается с ростом числа итераций, в то время как слагаемое, соответствующее низшей собственной функции, остаётся неизменным, поскольку  $\lambda_0 = 1$ . Иными словами, чем меньше  $|\lambda_n|$ , тем быстрее "вымирают" высшие собственные функции в исходном разложении  $\rho_0(x)$ .

Исследование одномерных отображений существенно упрощается, если все возможные итерируемые функции удаётся разбить на группы, объединяемые общими свойствами, и выделить в каждой группе наиболее простые (канонические), которые необходимо исследовать в первую очередь. Следует отметить, что базовыми принято называть отображения, имеющие равномерное инвариантное распределение, в частности, все кусочно – линейные отображения с полными ветвями являются базовыми.

Назовём сопряжёнными (топологически эквивалентными) отображения, итерируемые функции которых удовлетворяют определённому функциональному уравнению:

$$F(y) = \varphi^{-1}(f(\varphi(y))), \quad (6)$$

где  $\varphi(x)$  - сопрягающая функция.

Функциональное уравнение (6) легко разрешается относительно функции  $F$ , однако общего алгоритма поиска функции  $\varphi$  по заданным  $F, f$  не существует.

Свойства подобных отображений связаны между собой. Будем считать для определённости, что все свойства отображения (6) известны. Тогда справедливы следующие соотношения.

**Точное решение** можно записать сразу: если  $x_n = \Phi(n, x_0)$ , то для второго отображения имеем  $y_n = \varphi^{-1}(\Phi(n, \varphi(y_0)))$ .

**Инвариантная плотность** определяется соотношением:

$$R(y) = |\varphi'(y)| \tilde{\rho}(\varphi(y)). \quad (7)$$

Если исходное отображение базовое, то инвариантная плотность любого отображения, сопряжённого данному базовому, определяется соотношением:

$$R(y) = |\varphi'(y)| \quad (8)$$

Если известна инвариантная плотность  $R(y)$  исследуемого отображения, то с помощью () без труда можно найти функцию  $\varphi(y)$ , сопрягающую это отображение с базовым:

$$\varphi(y) = \pm \int_0^y R(\xi) d\xi \quad (9)$$

Последнее соотношение означает, что функция, преобразующая заданное отображение в каноническое, с точностью до знака совпадает с интегральным законом распределения, соответствующим исходному отображению. Полученные соотношения позволяют конструировать отображения с заданным законом распределения.

**Собственные числа и собственные функции оператора Фробениуса – Перрона для подобных отображений.** Пусть известны собственные числа  $\lambda_n$  и собственные функции  $\psi_n(x)$  ОФП для отображения (6). Собственные числа ОФП являются инвариантом преобразования подобия итерируемых функций отображений. Собственные функции ОФП связаны соотношением, совпадающим с (7):

$$\Lambda_n = \lambda_n;$$

$$\Phi_n(y) = |\varphi'(y)| \psi_n(\varphi(y))$$

**Показатель Ляпунова**, как и собственные числа ОФП, является инвариантом преобразования Улама. Одна из отличительных особенностей нелинейных систем — чувствительная зависимость решений от начальных условий. Даже небольшого возмущения начальных условий достаточно для того, чтобы траектории в дальнейшем быстро (экспоненциально) разошлись. Количественной мерой скорости экспоненциального разбегания траекторий служит показатель Ляпунова. Его можно выразить через вероятностные характеристики:

$$\lambda(x_0) = \int_0^1 \tilde{\rho}(x) \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right| dx, \quad (10)$$

где  $\tilde{\rho}(x)$  - инвариантная плотность для рассматриваемого отображения.

В случае, когда итерируемая функция кусочно-линейная, и при этом все линейные отрезки итерируемой функции имеют одинаковые значения модуля тангенса угла наклона, выражение для показателя Ляпунова упрощается:

$$\lambda = \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right|.$$

Среди множества сопряженных отображений можно выделить те, для которых инвариантная плотность представима в виде

$$\tilde{\rho}(x) = \Theta_{0,1}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \\ 1, & x \in [0,1] \end{cases},$$

то есть  $\tilde{\rho}(x) = 1$  на отрезке  $[0,1]$ . Такие отображения будем называть **базовыми** для множеств сопряженных с ними отображений. Для базовых отображений справедливо соотношение:

$$\sum_{i=1}^g |(\psi_i(x))'| = 1. \quad (11)$$

Соотношение (11) означает, что в случае равномерного инвариантного распределения сумма модулей производных от обратных функций ветвей итерируемой функции должна равняться единице. Отметим, что кусочно-линейные отображения с полными ветвями, с очевидностью, удовлетворяют соотношению (40). Однако, как следует из (40), возможны базовые отображения с итерируемой функцией, отличающейся от кусочно – линейной.

**Во второй главе** определено, для каких базовых отображений показатель Ляпунова имеет максимальное значение, - именно эти отображения следует использовать при моделировании случайных величин. Сначала вычислен непосредственно показатель Ляпунова для некоторых исследованных базовых отображений, затем сформулировано и доказано утверждение о максимальном значении показателя Ляпунова.

Анализ двух кусочно – линейных отображений (косой сдвиг Бернулли и косой тент) показал, что максимальное значение показателя Ляпунова  $\Lambda_{\max} = \ln 2$  достигается в случае итерируемой функции, симметричной относительно середины единичного отрезка. Это позволяет предположить, что показатель Ляпунова имеет максимальное значение в случае, когда модули угловых коэффициентов всех линейных ветвей одинаковы. Отметим, что для базового отображения с нелинейной итерируемой функцией значение показателя Ляпунова меньше.

При использовании соотношения (11), которому удовлетворяют итерируемые функции базовых отображений доказано, что из всех базовых отображений с двумя интервалами монотонности итерируемой функции и полными ветвями наибольшее значение показателя Ляпунова имеют кусочно линейные отображения «двоичный сдвиг Бернулли» и «tent-map». Если вспомнить, что показатель Ляпунова для сопряжённых отображений одинаков, последнее утверждение можно усилить: для любого отображения с двумя полными ветвями показатель Ляпунова не превосходит  $\ln 2$ .

Полученный результат без труда обобщается на случай, когда кусочно линейная итерируемая функция с полными ветвями имеет  $g$  интервалов монотонности, при этом максимальное значение показателя Ляпунова есть

$$\Lambda = \ln g. \quad (12)$$

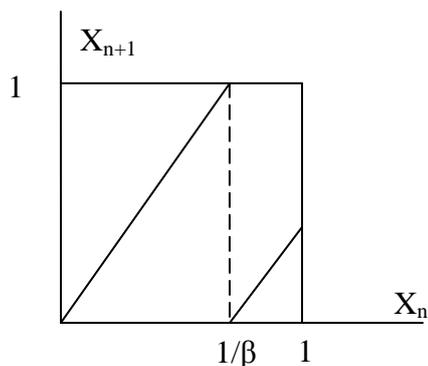
Задача о максимальном значении показателя Ляпунова для отображений с неполными ветвями в общем случае не решена, поэтому определено значение  $\Lambda$  для наиболее исследованного кусочно линейного отображения с неполными ветвями – отображения Реньи.

Отображение Реньи следует считать обобщением отображения двоичный сдвиг Бернулли на случай нецелочисленных значений параметра. Обычно отображение Реньи записывают в виде:

$$x_{n+1} = \{\beta x_n\}, \quad (13)$$

$\beta$  - параметр отображения, определяющий вид инвариантного распределения,  $\beta \in (1,2)$

Вид отображения показан на рисунке:



Значение показателя Ляпунова для отображения Реньи легко вычисляется в самом общем случае. Действительно, в силу соотношения (13) имеем:

$$\left| f'_{1,2}(x) \right| = \beta.$$

Тогда для показателя Ляпунова с учётом нормировки инвариантного распределения получаем:

$$\Lambda = \ln \beta \int_0^1 \tilde{\rho}(x) dx = \ln \beta$$

Поскольку  $\beta < 2$ , показатель Ляпунова для отображения Реньи, имеющего неполную ветвь, меньше, чем показатель Ляпунова для двоичного сдвига Бернулли.

Таким образом, среди всех перемешивающих отображений с полными ветвями максимальным значением показателя Ляпунова обладают те, для которых базовым является кусочно линейное отображение с одинаковыми модулями тангенса угла наклона линейных ветвей итерируемой функции, причём показатель Ляпунова не превосходит величины  $\ln g$ .

При сравнении скорости установления инвариантного распределения для отображений двоичный сдвиг Бернулли и tent – map установлено, что для второго отображения скорость установления выше, поскольку собственные функции ОФП в разложении начального распределения «вымирают» быстрее. Этот результат легко обобщить на случай  $g$  интервалов монотонности итерируемой функции: наибольшая скорость установления инвариантного распределения будет у пилообразного отображения с  $g$  интервалами монотонности (при этом  $g$  должно быть чётным). Именно такое отображение следует использовать при создании генератора случайных чисел и при моделировании случайных величин.

**В заключении** приводится перечень основных выводов, полученных в работе, и даны рекомендации по моделированию случайных величин.

## ВЫВОДЫ

В данной выпускной квалификационной работе определён вид одномерных хаотических отображений, имеющих максимальную скорость разбегания фазовых траекторий и, соответственно, максимальный показатель Ляпунова (внутри определённого класса одномерных отображений). Для этого выделен класс базовых отображений (отображений с равномерным инвари-

антным распределением) и получено соотношение, которому удовлетворяют итерируемые функции отображений этого класса. Данное соотношение стало ключевым – оно позволило представить показатель Ляпунова в виде функционала и исследовать данный функционал на максимум.

Результаты аналитических исследований таковы: среди всех отображений с полными ветвями, имеющих сопряжённое базовое отображение, максимальный показатель Ляпунова имеют те отображения, для которых итерируемая функция базового отображения кусочно линейная с равными по длине интервалами монотонности. При этом показатель Ляпунова тем больше, чем больше количество монотонных участков итерируемой функции.

Это позволили сформулировать рекомендации для численного моделирования случайных величин с заданным законом распределения. Чтобы получить последовательность значений случайной величины с наилучшими статистическими свойствами, при построении моделирующего отображения в качестве базового необходимо выбирать кусочно линейное с равными по длине интервалами монотонности и максимально возможным количеством этих интервалов.

Показано, что характер чередования линейных участков итерируемой функции с положительными и отрицательными тангенсами угла наклона также влияет на статистические свойства генерируемой последовательности, поскольку определяет значения собственных чисел соответствующего оператора Фробениуса – Перрона. При моделировании в качестве базовых предпочтительнее использовать пилообразные отображения.

### **Список использованных источников**

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
2. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

3. Г. М. Заславский, Н. А. Кириченко, «Динамический хаос»
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций. - М.: Физматлит, 2001. – 296 с.
5. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем.- Саратов. Издательство Саратовского ун-та 1999. 368 с.
6. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 318с.
7. Lasota A., Mackey M.C. Probabilistic properties of deterministic systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 360 с.
8. Lynch, Stephen. "Nonlinear discrete dynamical systems." Dynamical Systems with Applications using Maple. Birkhäuser Boston, 2010. 263-295.
9. Smale, Stephen, Morris W. Hirsch, and Robert L. Devaney. "Discrete dynamical systems." Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Vol. 60. Academic Press, 2003. 327-357.
10. Renyi A. ´ Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sc. Hungar. 1957. Vol. 8. P. 477.
11. Mori H., So B.-Ch., Ose T. Time-correlation functions of one-dimensional transformations // Progress of Theor. Phys. 1981. Vol. 66, № 4. P. 1266.
12. Li, Tien-Yien, and James A. Yorke. "Period three implies chaos." American mathematical monthly (1975): 985-992.
13. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
14. В.Ш. Бурд. Введение в динамику одномерных отображений. – Ярославль: Яргу,2006. – 104 с.
15. Кузнецов С. П.,. Динамический хаос (курс лекций) — М: Физматлит, 2001.

16. Lasota A., Yorke J.A. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1973. V. 186. P. 481–488.
17. Pianigiani G. Existence of invariant measures for piecewise continuous transformations // *Annals Polonici Mathematici.* 1981. V. XL. P. 39–45.
18. Gora P. Invariant densities for generalized b-maps // *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 2007. Vol. 27. P. 1583.
19. Голубенцев А.Ф., Аникин В.М. Инвариантные функциональные подпространства линейных эволюционных операторов хаотических отображений // *Изв. вузов – Прикладная нелинейная динамика.* 2005. № 1-2. С.3-17.
20. Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С. Собственные функции и числа оператора Перрона-Фробениуса кусочно-линейных хаотических отображений // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2007. Т. 15, № 2. С. 62-75.