МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники, колебаний и волн

Применение метода размерностей и теории подобия для решения физических задач

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 421 группы
Направления 03.03.03. радиофизика
Факультета нелинейных процессов
Агаревой Анастасии Александровны

Научный руководитель
доцент КЭКиВ, к.ф.-м.н. ___________________ Вдовина Г.М.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ___________________ Трубецков Д.И.

Саратов 2019 год

Введение. Целью данной работы является сбор, анализ и систематизация материала по теории размерностей и подобия. Рассмотренные далее примеры могут послужить для составления учебно-методического пособия, как для студентов первых курсов, так и для школьников и абитуриентов.

Актуальность и достоинства данного метода заключаются в том, что при решении задач можно быстро произвести оценку масштабов исследуемых явлений, получить функциональные зависимости, а также восстановить забытые формулы и осуществить проверку правильности решения. Но всегда следует помнить, что данный метод не позволяет определить численные значения постоянных безразмерных коэффициентов в уравнениях.

Работа разделена на несколько основных частей:

1. Теоретическая часть метода размерностей
2. Дополнение Хантли
3. П-теорема
4. Теория подобия
5. Безразмерная форма математических уравнений
6. Примеры решения фундаментальных задач с помощью метода размерностей
7. Примеры решения задач, с использование дополнения Хантли
8. Задачи теории колебаний
9. Задачи электроники
10. Задачи СВЧ-электроники

Основное содержание работы. Среди основных правил метода размерности можно выделить следующие: размерность произвольной физической величины может быть лишь произведением степеней размерностей величин, принятых за основные; размерности обеих частей равенства, отражающего некоторую физическую закономерность, должны быть одинаковыми. В рамках данной работы был решён ряд простых и сложных задач. В ходе решения были получены функциональные зависимости, отражающие описываемы процесс. Полученные результаты представлены в таблице:

Задача	**Полученная формула**
Период колебаний математического маятника	$T = const\sqrt{\frac{l}{g}}$
Период колебаний пружинного маятника	$T = const\sqrt{\frac{k}{m}}$
Вторая космическая скорость	$v = const\sqrt{g * R}$
Сильный точечный взрыв в атмосфере	$r = const\sqrt[5]{\frac{E * t^2}{\rho}}$
Движение шара в несжимаемой жидкости	$p = const * \rho v^2$ $F = const * \rho R^2 v^2$
Распространение волн в глубоководном резервуаре	$v = const\sqrt{g\lambda}$
Поверхностные гравитационные волны	$v = const\sqrt{gh}$
Звуковые волны в жидкости или газе	$v = const\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$
Длина свободного пробега молекулы в газе	$l = \frac{1}{na^2}$

Дальность полёта тела, брошенного под углом к горизонту

$$l = const * v_0 \sqrt{\frac{H}{g}}$$

Движение электрона в плоском конденсаторе

$$U = const * \frac{mv^2 d^2}{ql^2}$$

Массовый расход вязкой жидкости

$$m = const * p \frac{\rho r^4}{\eta}$$

Период колебаний арометра

$$T = const \sqrt{\frac{M}{Sg\rho}}$$

Почему небо голубое?

$$S = const \frac{Al^3}{r\lambda^2}$$

Задача Рэлея о колебаниях шарика на струне

$$\omega = const \sqrt{\frac{F}{Ml}}$$

Задача Рэлея о колебаниях сферической капли

$$\omega = const \sqrt{\frac{\sigma}{\rho * r^3}}$$

Помимо приведённых задач была решена задача о цилиндрическом диоде. В работе представлено три способа составления критериев подобия, остановился подробно на одном из них.

Получим формулы для вольтамперных характеристик цилиндрического диода с коаксиальным тонким катодом в виде нити и плоского диода.

Основные допущения: 1) около катода цилиндрического диода с радиусом анода r имеется достаточное количество электронов; 2) кроме упорядоченного движения под действием анодного напряжения V_a, электроны участвуют в хаотическом тепловом движении, которое характеризуется параметром $\theta = kT$, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура катода.

Учтем то, что эмиттером с очень большой эмиссионной способностью служит термоэлектронный катод, с которого можно получать токи высокой плотности. Тогда вблизи такого катода образуется область, заполненная электронами, создающими пространственный заряд большой плотности. Этот заряд может существенно изменять распределение электронов между электродами и влиять на количество электронов, покидающих катод. Электроны, вылетающие из термокатода, имеют максвелловское распределение скоростей с функцией распределения:

$$f_0(v) = \frac{j_e}{e}\frac{m}{kT} * e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (1)$$

Рассмотрим плоский диод с расстоянием D между катодом и анодом. Будем считать, что потенциальный минимум совмещен с катодом. Введем среднюю скорость электронов, с которой они покидают катод:

$$\acute{\omega} = \frac{\int_0^\infty v^2\, f_0(v)dv}{\int_0^\infty vf(v)dv} \quad (2)$$

где $f_0(v)$ – характеризует распределение скоростей

$$j = f\left(\frac{e}{m}, V_a, D, \acute{\omega}\right) \quad (3)$$

	e/m	V_a	D	$\acute{\omega}$	j
L	3/2	1/2	1	1	-1/2
M	-1/2	1/2	0	0	1/2
T	-1	-1	0	-1	-2

Выберем в качестве новых единиц с независимыми размерностями e/m, D, v_a. Выбранные новые единицы определяют характерные масштабы задачи: D – характерный масштаб длины, $\left[2(\frac{e}{m})V_a\right]^{1/2}$- характерный масштаб скорости. Мы можем поделить j и ώ на произведение e/m, D и v_a в соответствующих степенях, можно составить два критерия подобия:

$$\Pi = \frac{j}{\left(\frac{e}{m}\right)^{\alpha} V_a^{\beta} D^{\gamma}}, \qquad \Pi_1 = \frac{ώ}{\left(\frac{e}{m}\right)^{\alpha_1} V_a^{\beta_1} D^{\gamma_1}}$$

где α, β, γ, α_1, β_1, γ_1- безразмерные постоянные. Используя матрицу размерности и то, что критерии подобия - величины с нулевой размерностью, получаем следующие уравнения для показателей степеней:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \beta - \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 3/2 \\ \gamma = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \beta_1 + 2\gamma_1 = 2 \\ \beta_1 - \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Таким образом,

$$\Pi = \frac{jD^2}{\left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} V_a^{3/2}}, \qquad \Pi_1 = \frac{ώ}{\left(\frac{e}{m} V_a\right)^{1/2}} \qquad (4)$$

Применяя П-теорему, вместо (1) можно записать:

$$j = \frac{\left(\frac{e}{m}\right)^{1/2} V_a^{3/2}}{D^2} * f\left(\frac{ώ}{\left(\frac{e}{m} V_a\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \qquad (5)$$

Если теперь перейти к критериям подобия (4) и отбросить критерий $\pi_2 = \sqrt{\frac{\theta}{(\frac{e^2}{D})}}$ несущественный для анализируемой задачи, то можно вновь прийти к формуле (5), считая что $ώ$ вычислена при максвеловском распределении на катоде.

Кроме этого, была разобрана задача о лампе бегущей волны, в рамках которой было найдено выражение для электронного КПД.

Итак, рассмотрим движение нерелятивистского электронного пучка в поле бегущей волны, при этом пренебрежем обратным влиянием пучка на волну, а также силами пространственного заряда [6].

В качестве определяющих величин выберем следующие:x - продольная координата ($x = l$ - длина пространства взаимодействия), ω – частота поля, воздействующего на пучок, $v_ф$ - фазовая скорость электромагнитной волны, E^0 - амплитуда поля волны в начале пространства взаимодействия $x = 0$ (причём $E_x(x) = E^0\widetilde{f_1}(x)e^{j(\omega t-\beta_0 x)}$), t_1 - начальное время влёта электрона в пространство взаимодействия, V_0 - ускоряющее напряжение пучка, $v(x, t_1)$ – скорость электрона в присутствие ВЧ-поля, зависящая от пространственной координаты и момента влёта в пространство взаимодействия, η – удельный заряд электрона.

Заметим, что вместо E^0 в число определяющих переменных можно ввести значение амплитуды в любой точке пространства взаимодействия, например, при $x = l$. Более того, можно задать ВЧ-поле в виде $E_x(x) = E^0 f_1(x)e^{j(\omega t-\beta_e x)}$, где $\beta_e = {}^{\omega}/_{v_0}$ (v_0 - скорость электронов на входе пространства взаимодействия). Тогда, если считать функцию f_1 комплексной, можно исключить $v_ф$ из определяющих величин. Однако, присутствие $v_ф$ делает выкладки более наглядными и физичными, поэтому сохраним её среди определяющих величин. Введём безразмерную комбинацию ωt_1. Тогда вместо функции $v(x, t_1)$ можно определить безразмерную величину

$$\langle v^2\rangle_{\omega t_1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v^2 d(\omega t_1) \qquad (6)$$

-усреднённый по начальным фазам влёта электронов за один период ВЧ-поля квадрат скорости в фиксированной точке пространства. Учитывая соотношение (6), можно исключить из определяющих величин время t_1.

Связь между определяющими величинами можно записать в виде следующего функционального выражения:

$$v = f\left(x, \omega, v_ф, E^0, t_1, V_0, \eta\right) \qquad (7)$$

Составим матрицу размерности:

	x	ω	$v_ф$	E^0	V_0	v	η	t_1
L	*1*	*0*	*1*	*-1/2*	*1/2*	*1*	*3/2*	*0*
M	*0*	*0*	*0*	*1/2*	*1/2*	*0*	*-1/2*	*0*
T	*0*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*-1*	*1*

Следует помнить, что число независимых критериев подобия, которые можно составить из имеющихся определяющих величин, будет равно числу независимых решений системы однородных линейных уравнений, соответствующей матрице подобия. Причём число независимых решений рано рангу матрицы. Наибольший порядок, который могут иметь миноры выписанной матрицы размерности, не равные нулю, равны трём. Поэтому ранг матрицы равен трём, а значит число фундаментальных критериев подобия равно трём, а всего можно составить пять критериев подобия.

Для решения задачи с учётом вышесказанного выберем следующие новые первичные единицы: $[\omega] = [T]^{-1}, [v_ф] = [L] * [T]^{-1}, [V_0] = [L]^{3/2} * [M]^{1/2} * [T]^{-1}$. Используя уравнение (7), можно записать:

$$\frac{[v]}{[\omega]^{\alpha_v} * [v_ф]^{\beta_v} * [V_0]^{\gamma_v}} = \Phi \left\{ \begin{matrix} \dfrac{[x]}{[\omega]^{\alpha_x} * [v_ф]^{\beta_x} * [V_0]^{\gamma_x}}, \dfrac{[E^0]}{[\omega]^{\alpha_e} * [v_ф]^{\beta_e} * [V_0]^{\gamma_e}}, \dfrac{[t_1]}{[\omega]^{\alpha_t} * [v_ф]^{\beta_t} * [V_0]^{\gamma_t}}, \\ \dfrac{[\eta]}{[\omega]^{\alpha_\eta} * [v_ф]^{\beta_\eta} * [V_0]^{\gamma_\eta}} \end{matrix} \right\} \quad (8)$$

Используя матрицу размерности для первой безразмерной комбинации, имеем:

$$x\colon\ [L]^{-1-\beta_x-1\gamma_x/2} * [M]^{-1\gamma_x/2} * [T]^{\alpha_x+\beta_x+\gamma_x} = 1 \qquad (9)$$

Отсюда имеем три уравнения для определения коэффициентов $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x$:

$$\begin{cases} -1 - \beta_x - \dfrac{1\gamma_x}{2} = 0 \\ -\dfrac{1\gamma_x}{2} = 0 \\ \alpha_x + \beta_x + \gamma_x = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Отсюда находим $\alpha_x = -1, \beta_x = 1, \gamma_x = 0$. Тогда критерий подобия выражается комбинацией вида

$$\Pi_x = \frac{\omega x}{v_ф} \tag{11}$$

Аналогично находим остальные четыре критерия подобия:

$$\Pi_v = \frac{v}{v_ф}, \quad \Pi_{E^0} = \frac{E^0 v_ф}{\omega V_0}, \quad \Pi_{t_1} = \omega t_1, \quad \Pi_\eta = \frac{\eta V_0}{v_ф^2} \tag{12}$$

Учитывая, что по определению ${}^{\omega}/{}_{v_ф} = 2\pi\lambda_{зам}$ ($\lambda_{зам}$ - длина волны в замедляющей системе), и, производя тождественные для критериев подобия преобразования, получим систему критериев подобия (11) и (12) в следующем виде:

$$\Pi'_x = \frac{x}{\lambda_{зам}}, \quad \Pi'_v = \left(\frac{v}{v_ф}\right)^2, \quad \Pi'_{E_0} = \frac{E^0 \lambda_{зам}}{V_0}, \quad \Pi'_{t_1} = \omega t_1, \quad \Pi'_\eta = \frac{v_ф}{v} \tag{13}$$

В таком виде критерии подобия имеют вполне определённый физический смысл: Π'_x - текущая длина пространства взаимодействия в замедленных длинах волн, Π'_v - безразмерная кинетическая энергия, Π'_{E_0} - отношение ВЧ-напряжения к ускоряющему напряжению, Π'_{t_1} - начальная фаза влёта электронов пространство взаимодействия, Π'_η - параметр рассинхронизма электронов и волны.

Теперь стало ясно, в чём смысл введения новых основных единиц $\omega, v_ф, V_0$ - они являются характерными масштабами задачи : ${}^{\omega}/{}_{v_ф} = 2\pi\lambda_{зам}$ (определяет характерный масштаб длины), V_0 - масштаб напряжения и $\sqrt{2\eta V_0}$(масштаб скорости).

Будем полагать для простоты, что имеет место условие точного синхронизма $v_ф = v_0$, тогда на основании соотношений (7) и (13) справедливо записать

$$\frac{v^2}{v_0^2} = f_1\left(\frac{E^0 \lambda_{зам}}{V_0}, \omega t_1, \frac{x}{\lambda_{зам}}\right) \tag{14}$$

где f_1 - некоторая функция.

Очевидно, что $\lim_{E^0\to 0}\left({v^2}/{v_0^2}\right) = 1$, поэтому уравнение (14) справедливо переписать в виде

$$1 - \frac{v^2}{v_0^2} = f_2\left(\frac{E^0\lambda_{\text{зам}}}{V_0}, \omega t_1, \frac{x}{\lambda_{\text{зам}}}\right),$$

при этом $f_2\left(0, \omega t_1, \frac{x}{\lambda_{\text{зам}}}\right) = 0$. Усреднив полученное выражение по ωt_1, получим выражение для электронного КПД:

$$\eta_e = \langle 1 - \frac{v^2}{v_0^2}\rangle_{\omega t_1} = f_1\left(\frac{E^0\lambda_{\text{зам}}}{V_0}, \frac{x}{\lambda_{\text{зам}}}\right) \qquad (15)$$

Если предположить, что структура поля $E_x(x) = E^0\widetilde{f_1}(x)e^{j(\omega t - \beta_e x)}$ зафиксирована, тогда при $x = l$ имеем:

$$\eta_e = \langle 1 - \frac{v^2}{v_0^2}\rangle = f_1\left(\frac{E_x\lambda_{\text{зам}}}{V_0}, \frac{l}{\lambda_{\text{зам}}}\right) \qquad (16)$$

Величины ${E_x\lambda_{\text{зам}}}/{V_0} = \left({E_x\lambda}/{\sqrt{V_0}}\right) * \left({\sqrt{2\eta}}/{c}\right)$ и ${l}/{\lambda_{\text{зам}}} = \left({l}/{\lambda}\right) * \left({c}/{\sqrt{2\eta V_0}}\right)$

(λ – длина волны в свободном пространстве, c – скорость света) являются критериями подобия, поэтому для их постоянства необходимо:

1. Увеличивать ${l}/{\lambda} \sim \sqrt{V_0}$
2. Увеличивать $E_x\lambda \sim \sqrt{V_0}$.

Соотношение (15) можно получить сразу, если как указывалось выше, вместо v сразу ввести число определяющих величин $\langle v^2\rangle$.

Заключение. В ходе работы был проведён сбор и систематизация материала, посвященного методу размерностей и его применению для различных областей физики. Были решены различные задачи с помощью метода размерностей и теории подобия.

Собранный материал может послужить основой для составления учебного – методического пособия для школьников, абитуриентов и студентов младших курсов.

Список используемой литературы.

1. В.А. Фабрикант « О современной физике – учителю». Сборник. М., «Знание», 1975 176 с.
2. Д.И. Трубецков «Колебания, волны, электроны». Государственный учебно – научный центр «Колледж», Саратов 1993, 225 с.
3. L.P. Yarin « The Pi – Theorem» . Springer Hiedelberg Dordrechht London New York 2012
4. Ю.М. Брук, А.Л. Стасенко «Метод размерностей и качественные оценки физических величин» 2016, 36 с.
5. Л.И. Седов «Методы подобия и размерности в механике» М., «Наука»,1981 440 с.
6. Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов «Лекции по сверхвысокочастотной электронике дли физиков». В 2 т. Т.1.-М.:Физматлит,2003.-496 с.