

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Анализ динамики кольца связанных нелинейных осцилляторов с
различными типами нелокальной связи**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
физического факультета
Косенковой Анастасии Сергеевны

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор _____ В.С. Анищенко

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _____ В.С. Анищенко

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Самые различные природные и техногенные системы, образованные большим количеством тесно взаимосвязанных динамических подсистем, являются предметом исследований в нелинейной динамике и теории колебаний. В рамках данной области науки, такие системы называют ансамблями или сетями.

Считается, что нервные узлы (т.е. локальные сети нейронов, временно соединенные отдельными связями) связаны таким образом, что образуют Web-подобную структуру мозга. Влияние модификаций в связи (связанное с поражением головного мозга) непосредственно во время работы мозга изучалось с помощью простой модели динамики нейронной активности. Топологические изменения, вызванные узлами в связи также были изучены в нейронных сетях.

Немало работ в последнее время посвящено изучению синхронизации в нейросетевых моделях с глобальной или локальной топологией связей как в нормальной, так и в аномальной работе мозга. В реальных нейронных сетях связи являются разреженными, и механизмы взаимодействия элементов различных нейронных ансамблей характеризуются степенью случайности в топологии связей. Для сетей со случайными распределениями связей существует критический порог степени случайности в топологии связей, который характеризует степень синхронности колебаний элементов сети. Таким образом, если количество связей на узел увеличивается, случайные сети могут демонстрировать согласованную и синхронную динамику. Некоторые заболевания головного мозга, например, эпилепсия, являются результатом ненормальной и резкой синхронизации большого количества нейронных популяций. Эта синхронизация является основным признаком генерации и распространения эпилептической активности. Однако, несмотря на значительный прогресс в понимании физиологических процессов, лежащих в основе эпилептической активности, сетевые механизмы, определяющие производство, поддержание и распространение эпилептических расстройств, до сих пор мало изучены. [1]

На практике, при численном изучении сетей выбирают довольно простые модели, чтобы показать отдельные эффекты. Например, немало работ посвящено моделям кольца связанных элементов с нелокальной топологией связей [2 – 4]. Также недавно были предложены рефлексивная [5] и диагональная [6] топологии связи как простейшие модели топологии связей в головном мозге. Описание типов связей можно увидеть в Приложении.

Целью настоящей работы является исследование колец с различной динамикой парциального элемента при различной топологии связей. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- 1) Изучить научную литературу по теме исследования.
- 2) Сравнить динамику при различной топологии связей.
- 3) Выявить особенности поведения, связанные с топологией связей, и отделить их от особенностей поведения парциального элемента, используя несколько различных моделей в качестве подсистемы.

В **главе 1** рассматривается кольцо связанных логистических отображений, которые изначально были введены для описания динамики популяции в замкнутой среде. **Глава 2** посвящена кольцу связанных отображений Рулькова. Отдельное отображение может демонстрировать как спайковые, так и взрывные колебания. В **3 главе** исследуется кольцо связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо (ФХН). Модель ФХН может демонстрировать несколько основных режимов поведения, свойственных нейронам, что позволяет использовать её для численного моделирования сложных сетей.

1 Кольцо связанных логистических отображений

Рассмотрим кольцо из 1000 нелокально связанных логистических отображений.

Исследуемая модель записывается следующим образом:

$$x_i^{t+1} = \alpha x_i^t (1 - x_i^t) + \frac{\sigma}{B} \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} [x_j^t - x_i^t], \quad (1)$$

где σ – сила связи; B – количество связей в матрице связи σ_{ij} данного элемента.

Матрица связи σ_{ij} в случае нелокальной связи определяется системой:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i - R \leq j \leq i + R, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (2)$$

В случае отражающей связи матрица σ_{ij} задается:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } N - i - R \leq j \leq N - i + R, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (3)$$

В случае диагональной связи матрица связи определяется следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } N/2 + i - R \leq j \leq N/2 + i + R, \\ 1 & \text{if } i - R \leq j \leq i + R, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (4)$$

Параметр α задает динамику отдельного элемента. В рамках настоящей работы мы установим $\alpha = 3$. Здесь и далее для сравнения влияния топологии связей на динамику кольца мы будем полагать $R = R_n = R_r = 2R_d$.

Установим радиус связи $R = 440$. При увеличении силы связи до $\sigma = 0.7$ во всех трех случаях наблюдаются химерные состояния с разным количеством областей некогерентности, что продемонстрировано на Рис. 1.

При уменьшении силы связи происходит разрушение химерных состояний для всех трех случаев связи. На снимках мгновенных амплитуд (Рис. 2) продемонстрирован данный переход для диагональной связи. Численное моделирование показало, что наблюдаемые химерные состояния являются устойчивыми и наблюдаются для различных реализациях начальных условий.

В случае отражающей связи при $R = 120$ возможно наблюдение фазовой и амплитудной химер при изменении параметра. Наблюдаемый режим представляет собой гладкий профиль с некогерентными кластерами в местах разрыва. Такой режим сохраняется при уменьшении параметра силы связи σ в интервале $\sigma \in (0.001; 0.2)$.

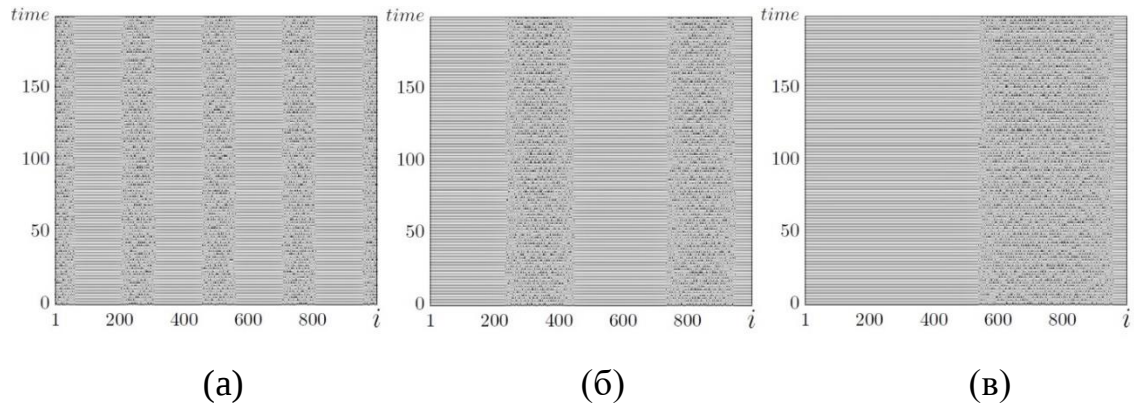


Рис. 1: Пространственно-временные диаграммы для химерных состояний с разным количеством областей некогерентности в зависимости от типа связи: диагональная связь (а); нелокальная связь (б) отражающая связь (в). Сила связи $\sigma = 0.7$, радиус связи $R = 440$, управляющий параметр $\alpha = 3$.

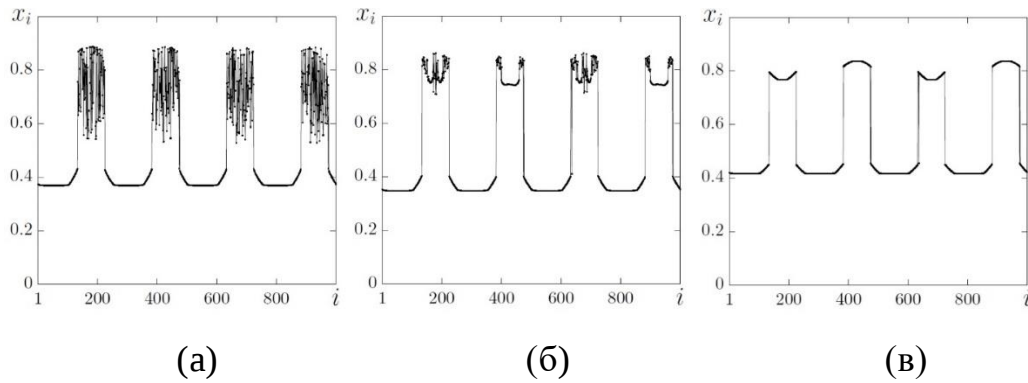


Рис. 2: Снимки мгновенных амплитуд для химерных состояний при уменьшении коэффициента связи в случае диагональной связи: $\sigma = 0.7$ (а); $\sigma = 0.5$ (б); $\sigma = 0.37$ (в). Параметр связи $R = 440$, управляющий параметр $\alpha = 3$.

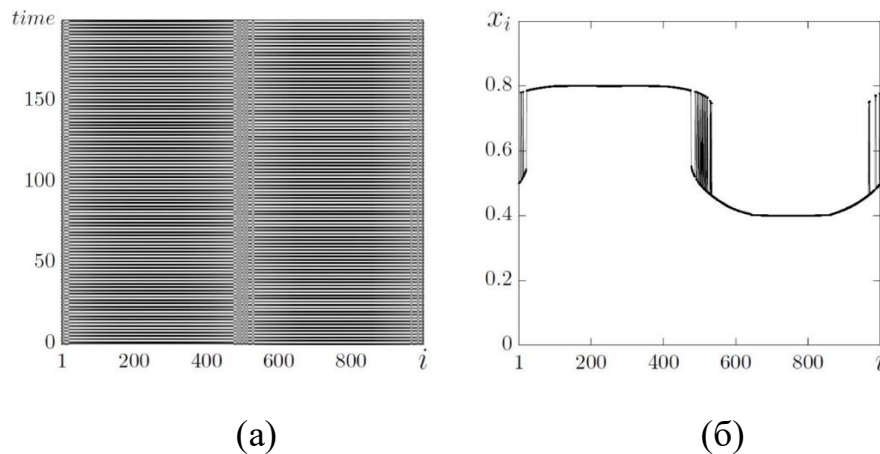


Рис. 3: Пространственно-временная диаграмма (а) и снимок мгновенных амплитуд (б) для химерной структуры при коэффициенте связи $\sigma = 0.2$ в случае отражающей связи. Параметр связи $R = 120$, управляющий параметр $\alpha = 3$.

2 Кольцо связанных отображений Рулькова

Рассмотрим кольцо связанных отображений (2) с периодическими граничными условиями $(x_{i+N} = x_i, y_{i+N} = y_i, i = 1, 2, \dots, N, N - \text{количество элементов в кольце})$:

$$\begin{cases} x_i^{t+1} = f_i(x_i^t, y_i^t), \\ y_i^{t+1} = g_i(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma_{ij}}{B_{ij}} \sum_{j=1}^N (g_j(x_i^t, y_j^t) - (g_i(x_i^t, y_i^t))), \end{cases} \quad (5)$$

где функция $f_i(x_i, y_i) = f(x, y)$ определяется как:

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha/(1-x) + y & \text{при } x \leq 0, \\ \alpha + y & \text{при } 0 < x < \alpha + y, \\ -1 & \text{при } x \geq \alpha + y, \end{cases} \quad (6)$$

а функция $g_i(x, y)$ задается следующим образом:

$$g_i(x, y) = y - \beta(x + 1 - \gamma). \quad (7)$$

Нелокальная связь определяется выражением (2), отражающая – (3), а диагональная – (4). Будем исследовать систему (5) при следующих значениях управляющих параметров отдельного отображения: $\alpha = 4, \beta = 0.001, \gamma = 0.1$. Будем изменять силу связи σ при фиксированном радиусе связи $R = 30$ для демонстрации режимов, возникающих в системе вследствие изменения силы связи для нелокального типа связи.

А. Десинхронизация при $\sigma = 0.005$

При достаточно маленькой силе связи ($\sigma = 0.005$) мы имеем некогерентные колебания.

В. Уединенные состояния при $\sigma = 0.1$.

С увеличением силы связи при $\sigma = 0.1$ меняется состояние системы. Вместо некогерентных колебаний при $\sigma = 0.005$ кольцо демонстрирует замороженные во времени структуры со случайным распределением амплитуд вдоль кольца между двумя уровнями.

С. Химерное состояние при $\sigma = 0.25$

При дальнейшем увеличении параметра σ уединенные состояния в исследуемой системе сменяются химерными состояниями. На Рис. 4,а показана пространственно-временная диаграмма для химерного состояния. Рассмотрим

временные реализации для нескольких элементов, находящихся в разных областях диаграммы: для элемента в области переключений синим цветом (Рис. 4,в), для элемента в области переключений желтым цветом (Рис. 4,г), для элемента в области колебаний синим цветом (Рис. 4,д) и для двух соседних элементов в области колебаний (Рис. 4,е, ж).

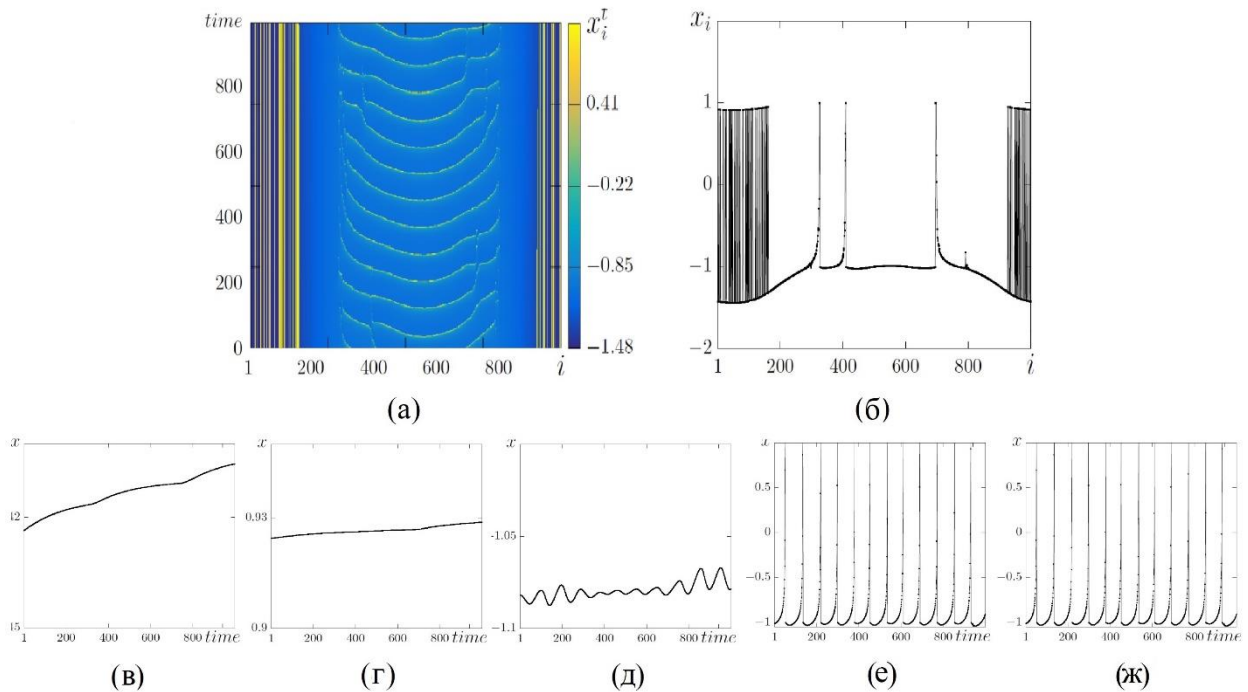


Рис. 4: Пространственно-временная диаграмма (а), снимок мгновенных амплитуд (б), временные реализации: для элемента с номером 1 (в), элемента с номером 111 (г), элемента с номером 251 (д), элементов с номерами 501 и 502 (е), (ж) при $\sigma = 0.25$.

Д. Бегущая волна при $\sigma = 0.43$.

При $\sigma = 0.43$ химера пропадает, и появляется бегущая волна. При дальнейшем увеличении σ можно наблюдать только бегущие или стоячие волны.

Е. Стоячая волна при $\sigma = 0.6$

При $\sigma = 0.6$ в системе образуются стоячие волны.

Результаты численного моделирования показали, что в случае диагональной и отражающей связей в системе наблюдаются те же режимы, что и при нелокальной связи. Отличается только конкретное значение силы связи σ , при которой наблюдается тот или иной режим.

3 Кольцо связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо

Исследуется модель ФитцХью-Нагумо (ФХН), записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_i = x_i + \frac{x_i^3}{3} - y_i + \frac{\sigma}{B} \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} [x_j - x_i], \\ \dot{y}_i = \gamma x_i - y_i - \beta. \end{cases} \quad (8)$$

Аналогично с логистическими отображениями определяется матрица связи для диагональной (4), нелокальной (2) и отражающей (3) связей. Зафиксируем управляющие параметры: $\gamma = 0.7$, $\beta = 0.001$, $\varepsilon = 0.2$, которым соответствует бистабильный режим в отдельном осцилляторе в отсутствии связи, и будем менять радиус и силу связи. Рассмотрим поведение системы для $\sigma \in [0; 1]$.

При маленькой силе связи и радиусе $R = 10$ система может находиться в одном из двух устойчивых состояний, то есть имеет место явление бистабильности. С увеличением силы связи количество переключений уменьшается. При $\sigma = 0.1$ может наблюдаться химерное состояние для всех трех типов связи. На Рис. 5 приведены пространственно-временные диаграммы для случаев различной топологии связи.

С увеличением параметра σ в случае диагональной связи получаем уединенные состояния или химеры, совмещенные с уединенными состояниями (Рис. 6,а, б). При $\sigma > 0.4$ получаем синхронный режим с периодическими колебаниями отдельных элементов (Рис. 6,в).

При уменьшении силы связи с $\sigma = 0.39$ и сохранении начальных условий, при некотором значении параметра силы связи, химерные состояния перестают существовать, наблюдается явление полной синхронизации.

При изменении радиуса до $R = 30$ связи существенных изменений не произошло. При маленьком значении силы связи существуют химерные состояния с разным числом некогерентных участков в зависимости от типа связи. Далее образуются уединенные состояния, затем следует полная синхронизация для всех рассматриваемых типов связи.

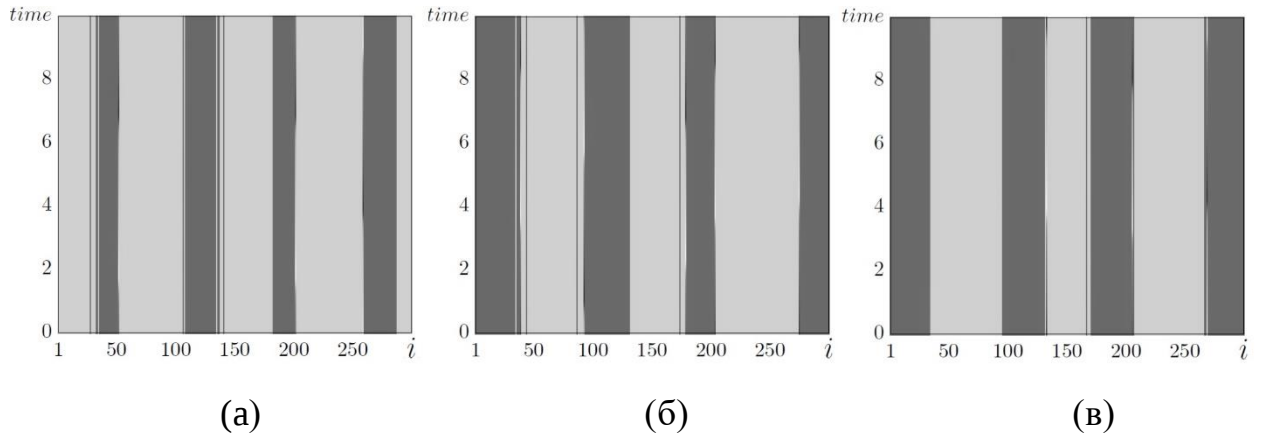


Рис. 5: Пространственно-временные диаграммы для химерных состояний с разным количеством областей некогерентности в зависимости от типа связи: диагональная связь (а); нелокальная связь (б); отражающая связь (в). Сила связи $\sigma = 0.1$, радиус связи $R = 10$.

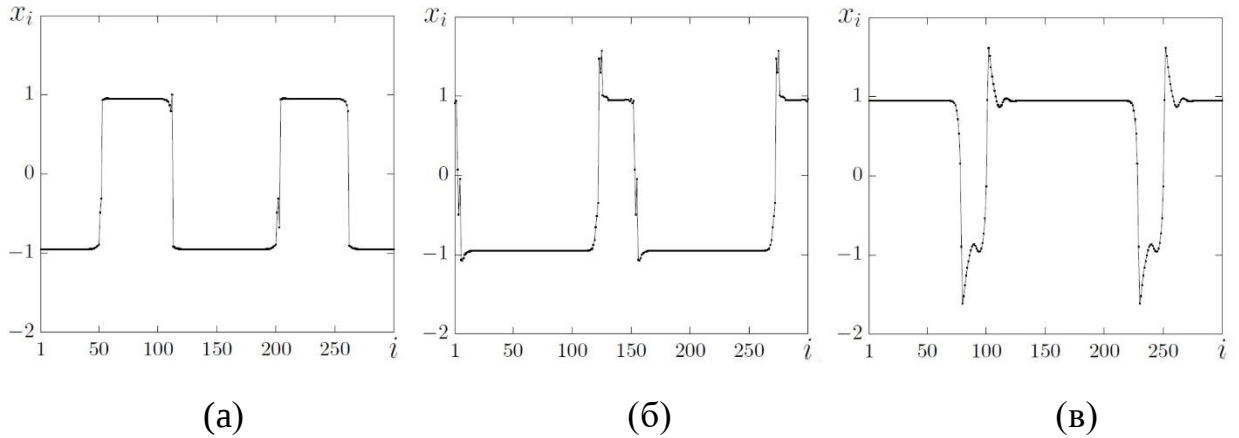


Рис. 6: Снимки мгновенных амплитуд системы при увеличении коэффициента связи в случае диагональной связи: $\sigma = 0.2$ (а); $\sigma = 0.38$ (б); $\sigma = 0.6$ (в). Параметр связи $R = 10$.

Для нелокальной и отражающей типов связи в области полной синхронизации по параметру σ есть участок, где появляются колебания ($\sigma \in [0.37; 0.39]$). Они совмещают в себе уединенные и химерные состояния. Для нелокальной связи мгновенные амплитуды и пространственные диаграммы показаны на Рис. 7. Для отражающей связи пространственно-временные диаграммы приведены на Рис 8.

При большом радиусе связи ($R = 90$) поведение системы изменяется, относительно предыдущих вариантов. С увеличением силы связи система переходит в режим полной синхронизации через уединенные состояния. Для диагональной и отражающей связях получаем синхронизацию, начиная с $\sigma = 0.1$, для нелокальной связи – $\sigma = 0.12$.

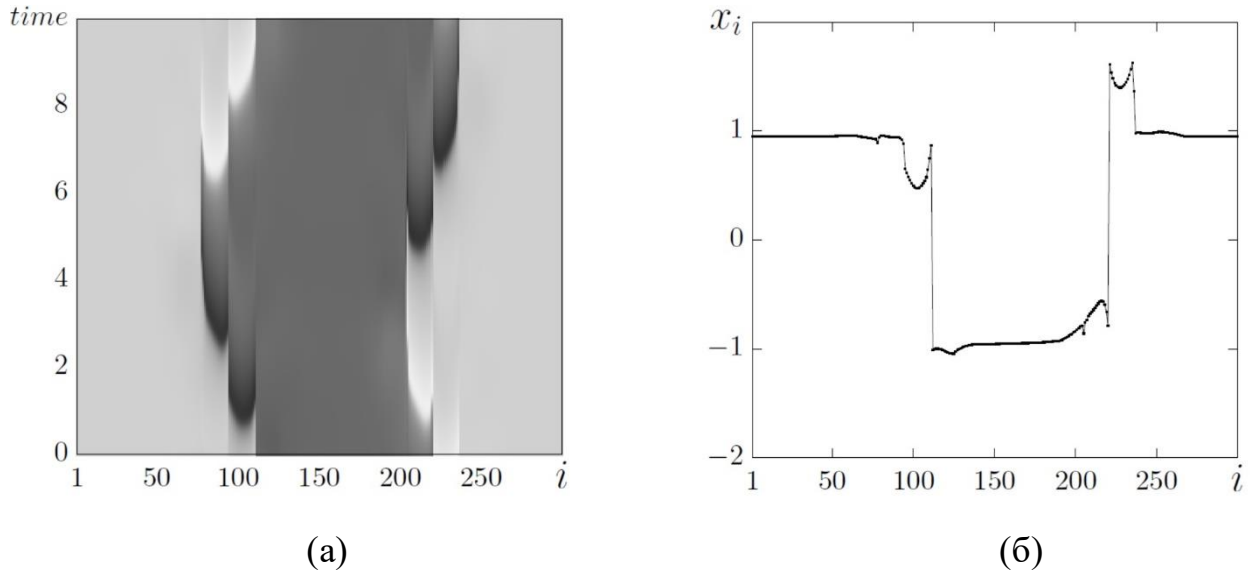


Рис. 7: Снимок мгновенных амплитуд (а) и пространственно-временная диаграмма (б) для химерной структуры при коэффициенте связи $\sigma = 0.38$ в случае нелокальной связи. Параметр связи $R = 30$.

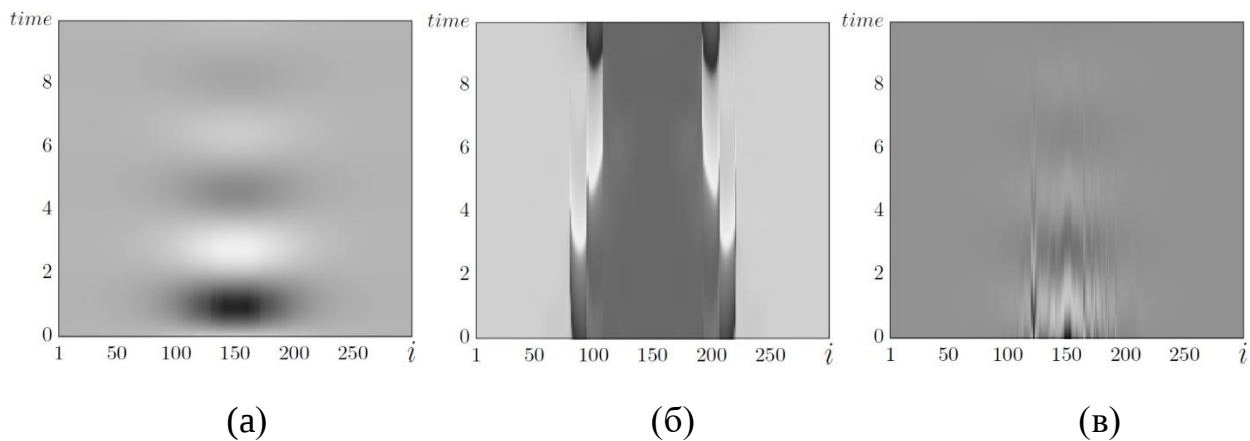


Рис. 8: Пространственно-временные диаграммы системы при увеличении коэффициента связи в случае отражающей связи: $\sigma = 0.372$ (а); $\sigma = 0.376$ (б); $\sigma = 0.38$ (в). Параметр связи $R = 30$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были рассмотрены кольца динамических систем с разными видами подсистем и топологией связей. С помощью численных экспериментов было установлено, что на динамику кольца оказывают влияние и тип парциального элемента, и топология связей. Так, в случае логистических отображений, тип и радиус связи определяют количество областей некогерентности. Уменьшение радиуса нелокальной, отражающей или диагональной связей приводит к увеличению количества областей некогерентности. В свою очередь, при одном и том же количестве связей, наблюдается разное количество областей некогерентности в случае различных топологий этих связей. Кроме того, топология связей влияет на тип наблюдаемых химерных структур. Например, в случае рассмотренной здесь диффузионной связи, фазовые и амплитудные химеры в кольце логистических отображений наблюдались только в случае отражающей связи. Сравнение результатов численного моделирования кольца связанных отображений Рутькова показало, что для некоторых элементов топология связи может не оказывать существенного влияния на наблюдаемые режимы колебаний ансамбля. Также в работе было рассмотрено кольцо связанных потоковых осцилляторов ФитцХью-Нагумо, каждый элемент которого был взят в бистабильном режиме. Также как и в случае логистических отображений, кольцо связанных осцилляторов с отражающей связью дает режим колебаний, отличный от тех, что наблюдаются в случае диагональной и нелокальной связями. Отсюда можно сделать вывод, что особый тип симметрии отражающей связи может вносить свои особенности в поведение ансамбля. Все наблюдаемые структуры являются устойчивыми в том смысле, что существуют в течение достаточно большого времени, и наблюдаются при различных реализациях начальных условий. В зависимости от начальных условий могут проявляться различные режимы поведения при одних и тех же параметрах системы. То есть, система мультистабильна. Проявление гистерезиса говорит о зависимости колебаний системы от текущего состояния и ее предыстории.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics // Physics Reports. 2006. Vol. 424. Pp. 175 – 308.
- 2 Семенова Н. И., Анищенко В. С. Переход «когерентность – некогерентность» с образованием химерных состояний в одномерном ансамбле // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 3. С. 295–309.
- 3 Kholuianova I. A., Bogomolov S. A., Anishchenko V. S. Synchronization of Chimera States in Ensembles of Nonlocally Coupled Cubic Maps // Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 103–111.
- 4 Максименко В.А., Горемыко М.В. и др. Возбуждение и подавление химерных состояний в многослойной сети осцилляторов с нелокальной связью // Известия Академии Наук. Сер. Физическая. 2017. Т. 81. №1. С. 121-124.
- 5 Tsigkri-DeSmedt, N.D., Hizanidis, J. et al. Chimeras in Leaky Integrate-and-Fire Neural Networks: Effects of Reflecting Connectivities // Eur. Phys. J. B. 2017. Vol. 90, № 7. P. 139.
- 6 Tsigkri-DeSmedt, N.D., Koulirakis, I. et al. Synchronization patterns in LIF Neuron Networks: Merging Nonlocal and Diagonal Connectivity // Eur. Phys. J. B. 2018. Vol. 91, №12. P. 305.