

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Динамика осциллятора Ван дер Поля при изменении функции внешнего
воздействия, описывающей зависимость амплитуды импульсов от
динамической переменной**

МАГИСТЕРСКАЯ РАБОТА

студента 2 курса 214 группы

направления 03.04.01 Прикладная математика и физика

факультета нелинейных процессов

Голоколенова Александра Владимировича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

Д.В. Савин

Зав. кафедрой нелинейной физики
к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

Е.Н. Бегинин

Саратов 2019 г.

Введение

Известно, что динамика консервативных и диссипативных нелинейных систем довольно сильно различается. Например, различны закономерности, наблюдающиеся при переходе к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода – структура пространства параметров в окрестности критической точки характеризуется различными скейлинговыми константами [1, 2]. В диссипативных системах справедлив закон Фейгенбаума, а консервативные системы подчиняются закону с другой скейлинговой константой: $\delta_H = 8.7210972\dots$. Точка, к которой сходится последовательность бифуркаций удвоения периода, с точки зрения динамических систем общего вида является точкой коразмерности 2 и обычно называется гамильтоновской точкой, или точкой Н-типа. В силу невозможности полного исключения диссипации в любой реально функционирующей системе, физическая реализация системы со строго консервативной динамикой представляется невозможной. Так, например, известно, что появление в изначально консервативной системе даже малых постоянных потерь энергии приводит к тому, что при приближении системы к критической точке перехода к хаосу динамика такой системы начинает подчиняться закономерностям, характерным для диссипативных систем [3]. В связи с этим исследование динамики систем, полученных из консервативных путем добавления в них малых диссипативных возмущений, вызывает определённый интерес с точки зрения как математики (см., например, монографию [4]), так и физики – в частности, радиофизики, теории колебаний и нелинейной динамики. В этой области можно выделить несколько крупных направлений.

Одно из них связано с изучением критического поведения на границе хаоса. Поскольку, как отмечалось выше, в случае наличия в системе хотя бы малой постоянной диссипации реализация характерного для консервативных систем типа критического поведения на границе хаоса невозможна, невозможно и его наблюдение в физически реализуемых системах такого класса. Если всё же задаться целью сконструировать нелинейную систему с

гамильтоновским критическим поведением, допускающую физическую реализацию, естественным будет обращение к классу систем с переменным уровнем диссипации. Идея при этом состоит в том, чтобы определённым образом «компенсировать» потери энергии специальным образом подобранным внешним воздействием [5]. Так, например, была сконструирована система на базе осциллятора Ван дер Поля под внешним импульсным воздействием, зависимость амплитуды которого от динамической переменной описывается квадратичным полиномом вида $F(x)=1-\lambda x^2/2$ [6]. Для такой системы, в частности, было показано существование в приближенной дискретной модели такой системы гамильтоновской критической точки [7, 8].

Другим важным направлением исследований динамики систем с малым уровнем диссипации является изучение сильной мультистабильности, возникающей в таких системах при приближении уровня диссипации к нулю. Сосуществование большого числа низкопериодических аттракторов было впервые показано для довольно простой слабодиссипативной модели – т.н. «отображения ротора» [9]. К настоящему моменту существует множество работ, посвящённых изучению мультистабильности и закономерностей сосуществования аттракторов в различных нелинейных системах с малой диссипацией, как модельных, так и имеющих физическую мотивацию (см., например, [10-20]). В то же время следует отметить, что во всех перечисленных работах речь идёт о динамике систем, полученных добавлением постоянной (т.е. не зависящей от динамических переменных системы) диссипации в консервативные модели, удовлетворяющие условию КАМ-теоремы [21]. Логичным развитием этого направления исследований является распространение рассмотрения на системы, консервативная версия которых является с точки зрения КАМ-теоремы вырожденной. Одной из наиболее простых и известных моделей такого рода является т.н. система-генератор «стохастической паутины», предложенная Заславским [22]. Эта

система может быть записана в виде консервативного линейного осциллятора под внешним импульсным периодическим воздействием, зависимость амплитуды которого от обобщённой координаты осциллятора представляет собой гармоническую функцию. Динамика такой системы в слабо диссипативном случае рассматривалась ранее как для случая введения линейной малой диссипации [23], так и при добавлении в систему малой диссипации «автоколебательного» типа, являющейся не постоянной величиной, а коэффициентом при производной, зависящим от квадрата динамической переменной $(\gamma - \mu x^2)\dot{x}$ [24, 25]. В последнем случае исследуемая система фактически представляет собой находящийся под внешним импульсным воздействием осциллятор Ван дер Поля с малыми значениями параметров, отвечающих за линейную и нелинейную диссипацию.

Таким образом, можно заметить, что одна и та же модель – осциллятор Ван дер Поля под периодическим импульсным воздействием переменной амплитуды – способна демонстрировать феномены, относящиеся к различным направлениям исследований, при выборе зависимости амплитуды внешнего воздействия от обобщённой координаты осциллятора в виде квадратичной либо гармонической функции. В связи с этим кажется интересным рассмотреть динамику моделей, занимающих «промежуточное» положение между двумя этими случаями. Для этой цели можно, например, рассматривать модели, получаемые при выборе гармонической функции в виде косинуса и разложении её в ряд Тейлора в окрестности нуля – самой простой из них, очевидно, будет как раз модель с квадратичной функцией амплитуды. В этом случае можно получить «иерархию» моделей с функциями амплитуды импульсного воздействия в виде полиномов чётных степеней и проследить за эволюцией устройства фазового пространства и пространства параметров таких систем при изменении порядка разложения.

Цель работы. Целью данной работы является исследование изменений динамики автоколебательной системы с периодическим внешним

воздействием при переходе от системы, являющейся в консервативном пределе генератором стохастической паутины, к системе, для которой было показано наличие критической точки Н-типа, при изменении вида функции, описывающей это воздействие.

При выполнении работы решались следующие **задачи**: анализ устройства пространства параметров и фазового пространства осциллятора Ван дер Поля с малыми значениями параметров, отвечающих за линейную и нелинейную диссипацию, при изменении вида функции, описывающей зависимость амплитуды внешних импульсов от динамической переменной.

Научная новизна. Ранее, как уже говорилось, проводились исследования плоскости параметров аналогичной системы с функцией внешнего воздействия квадратичного вида [8] и фазового пространства диссипативной версии системы – генератора стохастической паутины [25]. В настоящей работе, рассматриваются промежуточные модели, полученные при разложении косинуса в ряд до 2 и 4 степени, позволяющие осуществить переход от одной системы к другой.

Структура работы. В разделе 1 описывается исследуемая система и рассматривается устройство её пространства параметров при вариации функции внешнего воздействия, в разделе 2 приводятся результаты исследования фазового пространства.

1. Исследуемая система и устройство её пространства параметров

Следуя работе [8], будем рассматривать модель вида

$$\ddot{x} - (\gamma - \mu x^2)\dot{x} + \omega_0 x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(x)\delta(t - nT) \quad (1)$$

Здесь γ и μ – параметры линейной и нелинейной диссипации соответственно, при этом отрицательные значения γ соответствуют положительной линейной диссипации, т.е. наличию в автономной системе устойчивой неподвижной точки с координатами (0;0). Частота внешнего импульсного воздействия $2\pi/T$

в 4 раза больше собственной частоты автономной системы ω_0 . Для упрощения исследований для системы (1) можно, решая ее в промежутках между импульсами методом медленно меняющихся амплитуд, получить дискретное отображение (2)

$$x_{n+1} = B \frac{F(x_n) + y_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (F(x_n) + y)^2]}}, \quad y_{n+1} = -B \frac{x_n}{\sqrt{1 + C[x_n^2 + (F(x_n) + y)^2]}}, \quad (2)$$

где параметр C определяет нелинейную диссипацию, $B < 1$ соответствует положительной линейной диссипации, $B > 1$ – отрицательной.

В настоящей работе исследование динамики системы (1) проводилось для трех видов функций внешнего воздействия, а именно $F(x) = \lambda \cos x$ и полиномов, представляющих собой в разложение косинуса в ряд Тейлора вблизи нуля: $F(x) = \lambda (1 - x^2/2)$ и $F(x) = \lambda (1 - x^2/2 + x^4/24)$. При численном моделировании производилось решение автономного уравнения в промежутках между импульсами методом Рунге-Кутты 4 порядка с шагом, составлявшим 0.01 периода внешнего воздействия. В случае выбора квадратичной функции амплитуды система перенормировкой переменных и параметров сводится к изученной в [6–8], и следует ожидать качественного совпадения структуры пространства параметров.

Будем рассматривать динамику системы на плоскости (λ, γ) для потоковой системы (1) и (λ, B) для отображения (2), зафиксировав параметр нелинейной диссипации. На рис. 1 приведена структура плоскости параметров для систем с различными функциями внешнего воздействия. На картах присутствуют области периодической, хаотической и, в окрестности линии $\lambda = 0$ в области $\gamma > 0$ ($B > 1$) – квазипериодической динамики, в области квазипериодики находятся языки синхронизации. Также можно видеть различные сценарии перехода к хаосу: через разрушение квазипериодической динамики и, соответственно, через каскад бифуркаций удвоения периода внутри языков синхронизации в области $\gamma > 0$ ($B > 1$) и через каскад бифуркаций удвоения периода при увеличении параметра λ в области

$\gamma < 0$. При этом для функции $F(x) = \lambda(1 - x^2/2)$ (рис. 1 а, б), области хаотической динамики, возникшие через эти сценарии, на карте разделены. На границе между ними находится критическая точка Н-типа (рис. 1 б), которую можно найти как предел последовательности точек, в которых заканчиваются линии бифуркаций удвоения периода (или, говоря иначе, их терминальных точек). Непосредственно для данной системы положение критической точки не определялось, но, поскольку, как уже говорилось выше, рассматриваемая система эквивалентна с точностью до замены переменных системе, рассмотренной в [6–8], о наличии критической точки Н-типа в отображении можно говорить с уверенностью. Рассмотрим теперь следующий вид функции внешнего воздействия: $F(x) = \lambda(1 - x^2/2 + x^4/24)$. На рис. 1 в, г при сравнении с рис. 1 а, б, видно, как трансформируется плоскость параметров: происходит расширение хаотической и квазипериодической областей и сужение языков синхронизации вдоль оси λ . Разделённые ранее области хаоса, возникшего двумя разными путями, теперь оказываются соединены. В частности, видно, что область предполагаемого местонахождения критической точки Н-типа, находившаяся ранее на границе между двумя этими хаотическими областями и областью разбегания траекторий на бесконечность, теперь находится просто на границе общей области с хаотической динамикой. Часть языков синхронизации теперь связана с окнами периодичности в области хаоса, возникшего из каскада бифуркаций удвоения периода. В случае выбора функции внешнего воздействия $\cos x$ область разбегания на бесконечность исчезает полностью, а также заметно усложняется форма языков синхронизации при больших значениях γ . С уменьшением значения параметра нелинейной диссипации μ , структура плоскости параметров сохраняется, однако наблюдается уменьшение размера хаотической и квазипериодической областей и языков синхронизации.

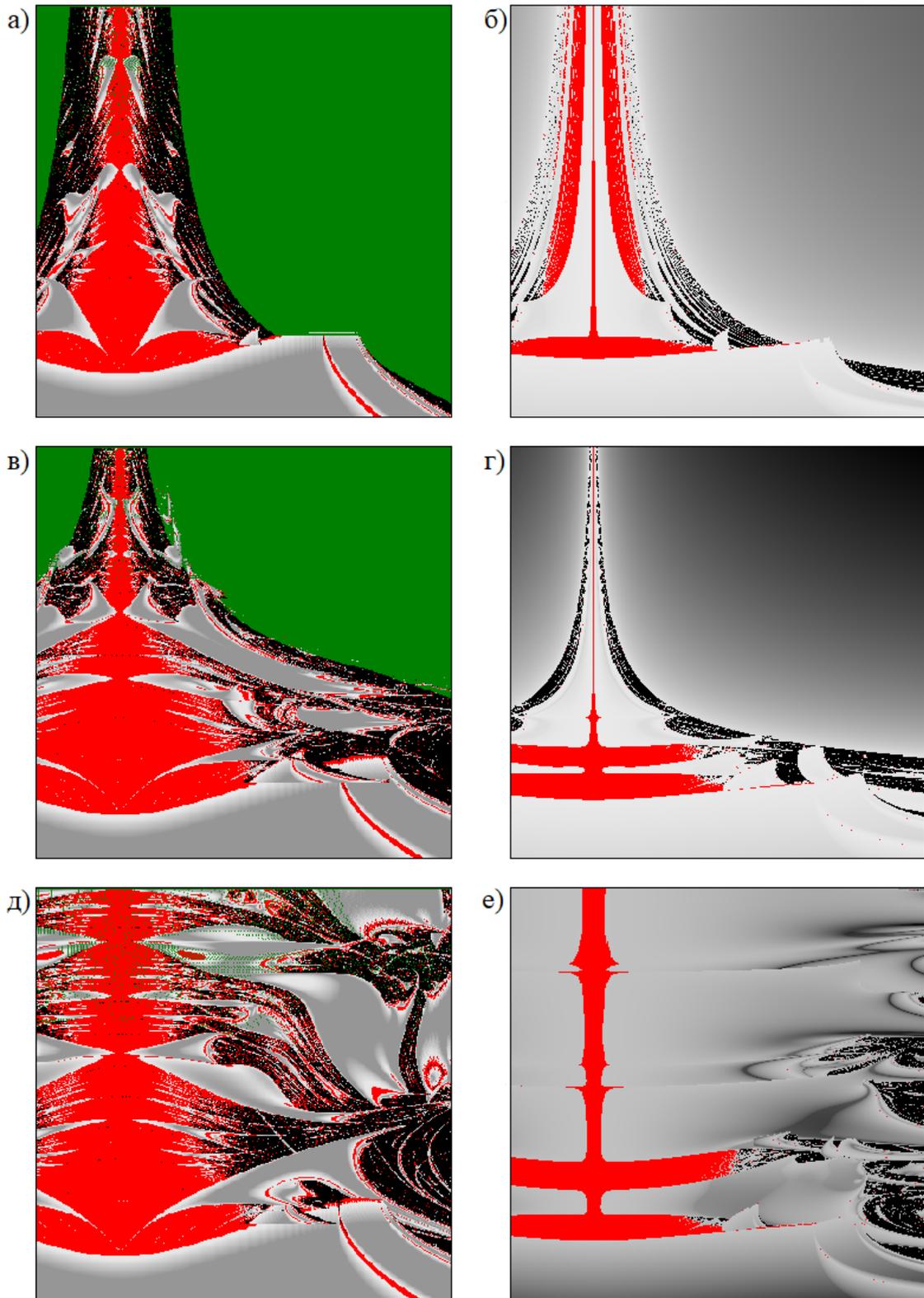


Рис. 1. Карты ляпуновских показателей для систем (1) и (2) для а, б — $F(x)=\lambda(1-x^2/2)$, в, г — $F(x)=\lambda(1-x^2/2+x^4/24)$, д, е — $F(x)=\lambda\cos x$ в координатах (λ, γ) для а), в), д), (λ, B) для б), г), е) в диапазоне $(-1;4)$ по оси абсцисс, $(-0.5; 4)$ по оси ординат. Цвета на картах ляпуновских показателей соответствуют различным режимам: оттенками серого показана область, соответствующая периодическому режиму, красным показан квазипериодический режим, черным — хаотический, зеленым — область убегания траекторий на бесконечность. $\mu=0.5$, $C=0.1$, $\omega=4$.

2. Устройство фазового пространства

2.1 Фазовое пространство потоковой системы

Как говорилось ранее, фазовый портрет в предельном консервативном случае при выборе функции $F(x)=\lambda \cos x$ представляет собой стохастическую паутину [24, 25]. Для нас представляет интерес исследование устройства фазового пространства потоковой системы (1), в частности, его трансформация при переходе от предельного консервативного случая с функцией внешнего воздействия вида $F(x)=\lambda \cos x$, к степенным полиномам.

Исследуем устройство фазового пространства при различных значениях параметра μ . На рис. 2 приведен набор фазовых портретов для последовательно уменьшающихся значений μ при фиксированных значениях остальных параметров, которые выбраны соответствующими квазипериодической области на картах динамических режимов. При больших значениях μ фазовые портреты для всех трех функций выглядят практически одинаково (рис. 2 а–в), однако с уменьшением μ они «накапливают» различия, и общий вид фазовых портретов усложняется. В частности, в результате последовательности седло-узловых бифуркаций появляются устойчивые неподвижные точки, сосуществующие с расположенным в окрестности начала координат «основным» аттрактором. На рис. 3 б, г, е приведены увеличенные фрагменты фазовых портретов (рис. 3 а, в, д), иллюстрирующие более детально структуру фазового пространства в окрестности неподвижных точек. Так, на них хорошо видны объекты, траектории к которым притягиваются вдоль устойчивого направления и отдаляются вдоль неустойчивого (на рисунке они показаны стрелками) – седловые точки, по появлению которых можем судить о том, что произошла седло-узловая бифуркация. В случае с $F(x)=\lambda \cos x$, можно ожидать, что в диссипативном случае количество седло-узловых бифуркаций будет увеличиваться по мере приближения к консервативному пределу, т.е. уменьшения значения параметра диссипации. Так, на рис. 3 д представлен фазовый портрет для системы с функцией внешнего воздействия вида

$F(x)=\lambda \cos x$ в случае, близком к консервативному.

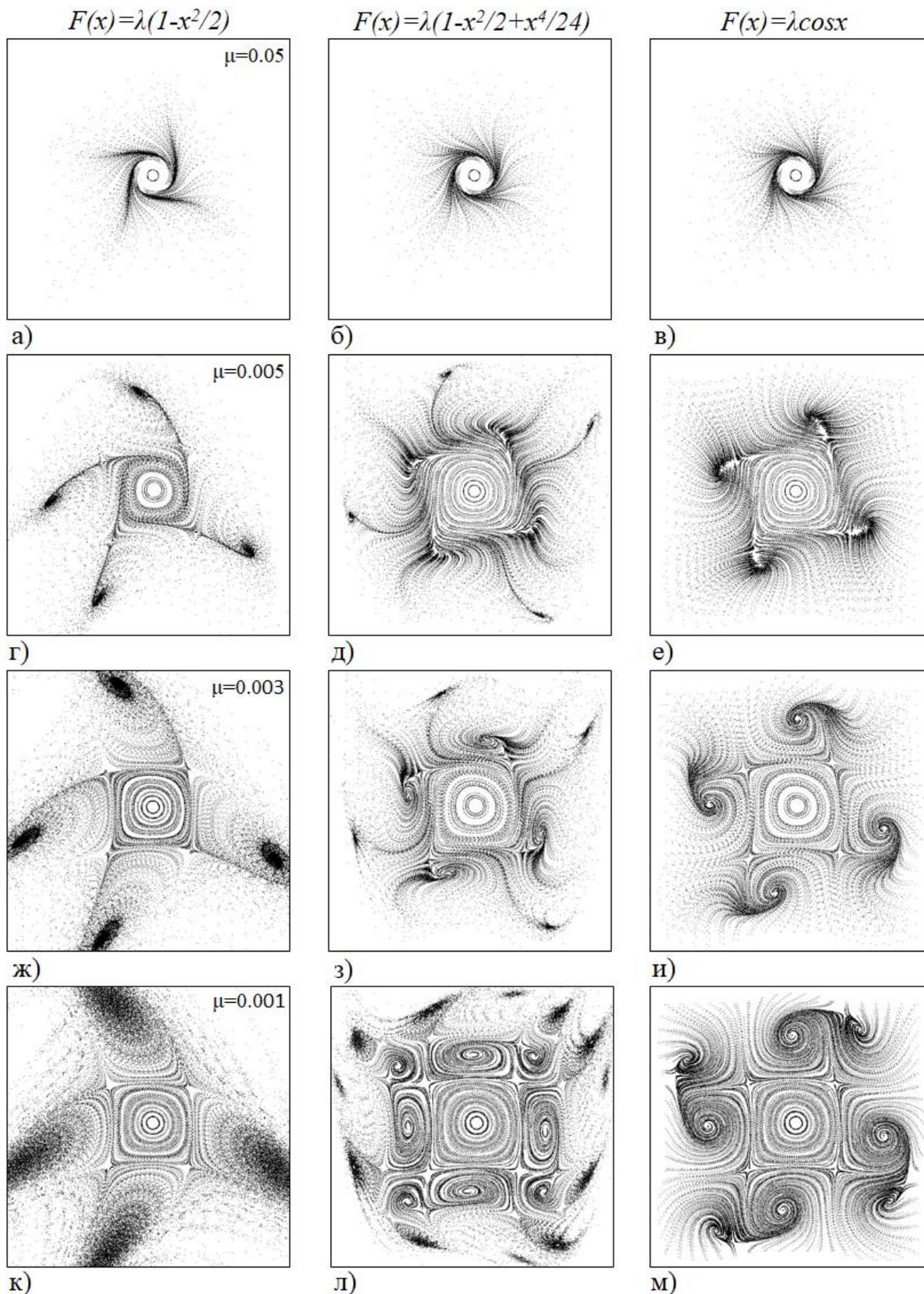


Рис. 2. Фазовые портреты для системы (1). Столбцы с рисунками соответствуют разным функциям внешнего воздействия, строки — разным параметрам нелинейной диссипации μ . $\gamma=0.001$, $\lambda=0.3$. Для рисунков а-о по осям отложены координаты x , \dot{x} в диапазоне $(-5;5)$.

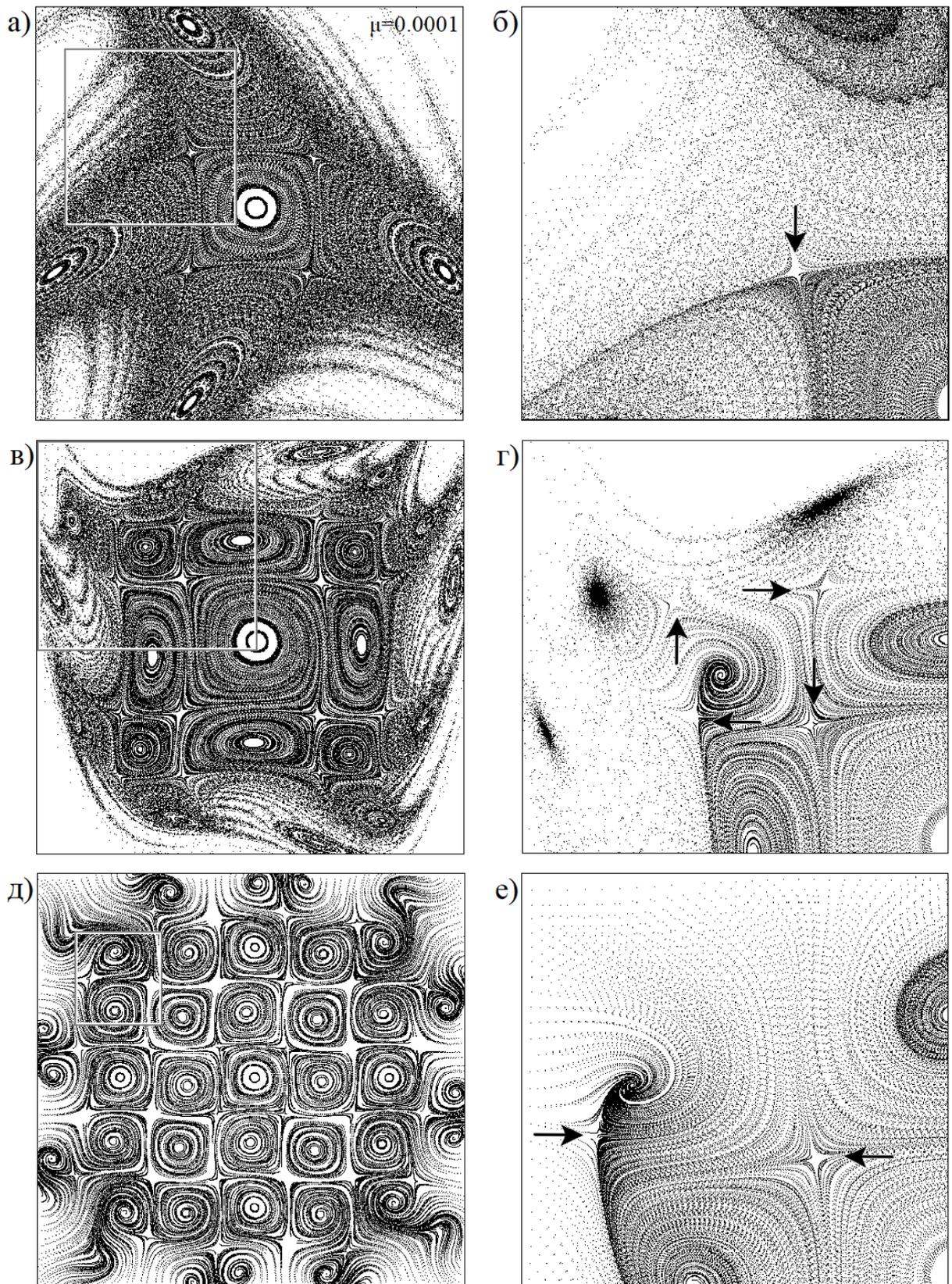


Рис. 3. Рис. б, г, е – увеличенные участки фазовой плоскости, соответствующие рис. а, в, д, для системы (1) с функциями внешнего воздействия $F(x)=\lambda(1-x^2/2)$, $F(x)=\lambda(1-x^2/2+x^4/24)$, $F(x)=\lambda \cos x$ соответственно.

Количество неподвижных точек в этом случае, как можно видеть, довольно велико, а структура фазового пространства закономерно похожа на

стохастическую паутину. При переходе к разложению функции $F(x)$ в ряд Тейлора количество седло-узловых бифуркаций уменьшается с понижением порядка разложения в ряд. Так, для $F(x)=\lambda(1-x^2/2+x^4/24)$ с уменьшением μ новые седло-узловые бифуркации перестают происходить, и при достижении определенного значения μ структура фазового пространства перестает существенно меняться (рис. 2 л, 3 в). В случае же с $F(x)=\lambda(1-x^2/2)$ происходит всего одна седло-узловая бифуркация, приводящая к появлению одного устойчивого цикла периода 4 (рис. 2 г, 3 а).

Для более детального изучения структуры фазового пространства также были построены устойчивые и неустойчивые многообразия точек, которые мы по результатам визуального анализа структуры фазового портрета определили как седловые (рис. 3 б, г, е). Для этого брались наборы начальных условий в окрестности одного из седел (на рис. 4 а, в, д показано стрелкой), после чего система итерировалась в прямом и обратном времени. В результате были получены трансверсально пересекающиеся многообразия, проходящие через 4 неподвижные точки (рис. 4 б, г, е), что позволяет сделать вывод о наличии седлового цикла периода 4.

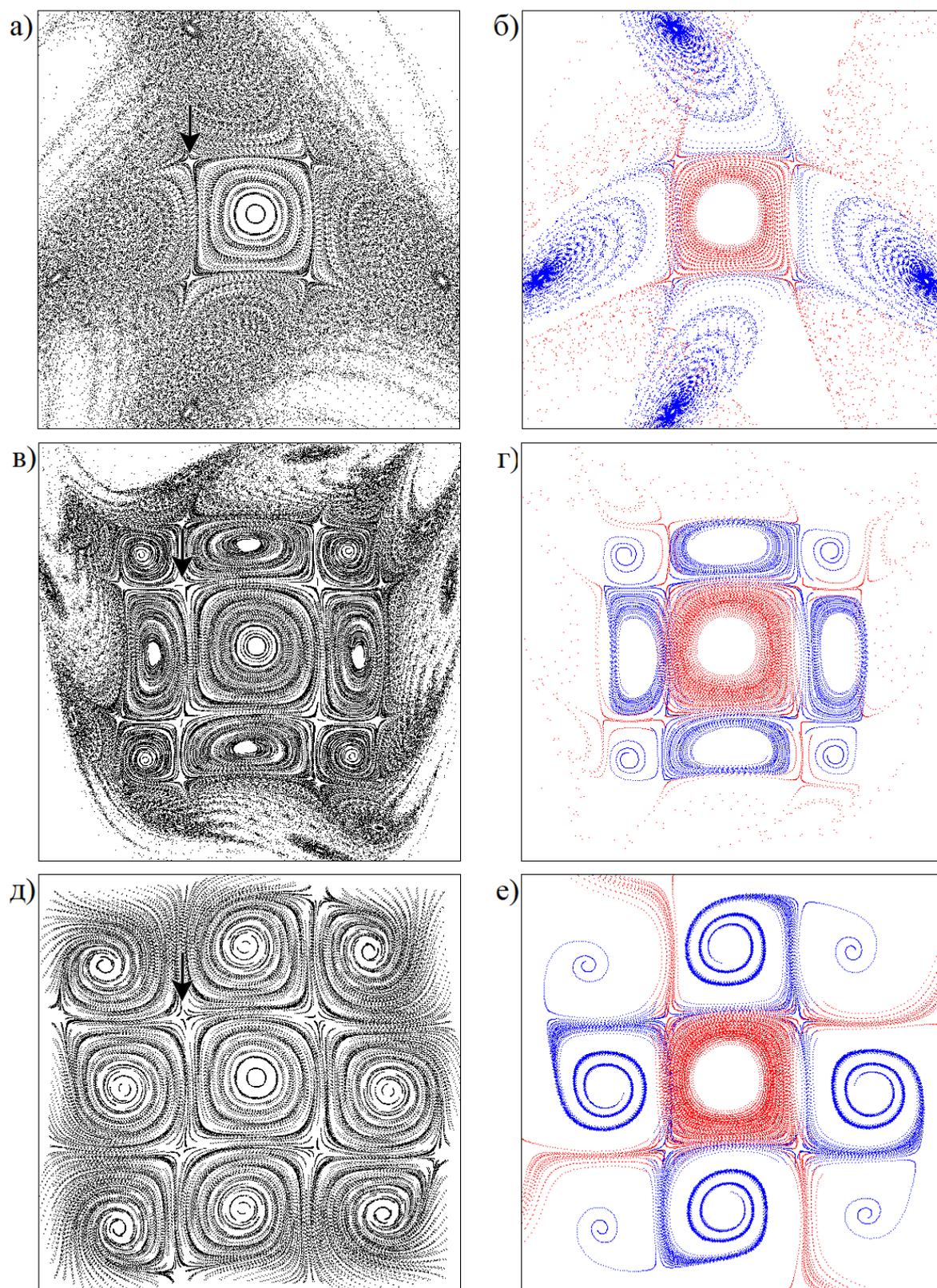


Рис. 4. а, б — фазовый портрет и многообразие для системы (1) с $F(x)=\lambda(1-x^2/2)$, в, г — фазовый портрет и многообразие для системы (1) с $F(x)=\lambda(1-x^2/2+x^4/24)$, д, е — фазовый портрет и многообразие для системы (1) с $F(x)=\lambda \cos x$ с многообразия для четырех различных седловых циклов, наложенные друг на друга. $\mu=0.0005$, $\lambda=0.3$, $\gamma=0.001$. Красным показаны устойчивые многообразия, синим — неустойчивые. По осям отложены координаты x, \dot{x} в диапазоне $(-5;5)$.

2.2 Фазовое пространство дискретного отображения

Для того чтобы анализировать бифуркации не только визуально, а иметь еще более строгий критерий для анализа, перейдем к дискретному отображению (2). Его, например, можно исследовать с помощью программы Content [26]. Эта программа, в частности, позволяет численно проверять выполнение условий бифуркаций, а также получать линии бифуркации в пространстве параметров.

После выбора начальных условий вблизи найденных устойчивых точек, используем их как стартовые в программе Content, находим точные координаты неподвижных точек и для каждой из них строим кривые на плоскостях (c, x) , (c, y) , представляющие собой зависимость координаты неподвижной точки от параметра c . На рис. 5 представлен фазовый портрет для отображения (2) с функцией внешнего воздействия вида $F(x)=\lambda(1-x^2/2+x^4/24)$, на котором отмечено точное расположение устойчивых точек и седел на фазовой плоскости. На рис. 6 представлены несколько кривых, начальные условия для которых брались вблизи неподвижных точек (рис. 5). После анализа изображений кривых для всех неподвижных точек, оказалось, что для некоторых точек кривые совпадают, из чего можно сделать вывод, что эти неподвижные точки связаны через систему седло-узловых бифуркаций в группы: группы по 4 (точки 13-16), по 3 (точки 1-8, 17-20) и по 2 (9-12). Отметим также, что для каждой кривой наблюдается зеркальная симметрия. Например, на рис. 6 в, г ее можно наблюдать между кривыми на плоскостях (c, x) и (c, y) относительно осей c и x .

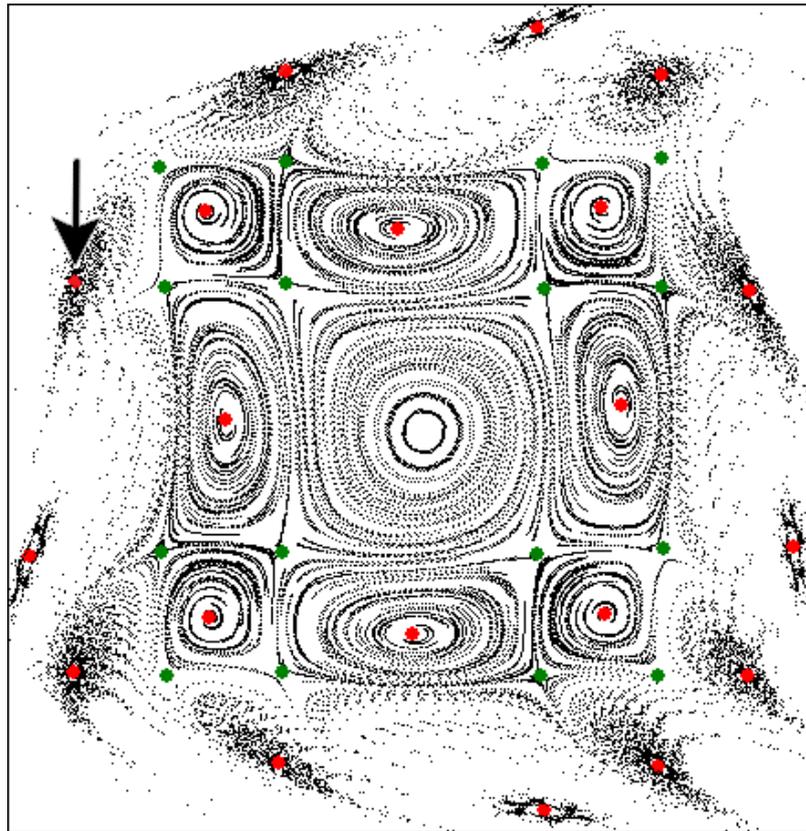


Рис. 5. Фазовый портрет для системы (2) для функции внешнего воздействия вида $F(x)=\lambda(1-x^2/2+x^4/24)$. Красным на фазовом портрете отмечены устойчивые точки, зеленым – седла. По осям отложены координаты x, \dot{x} в диапазоне $(-5;5)$, $C=0.002$.

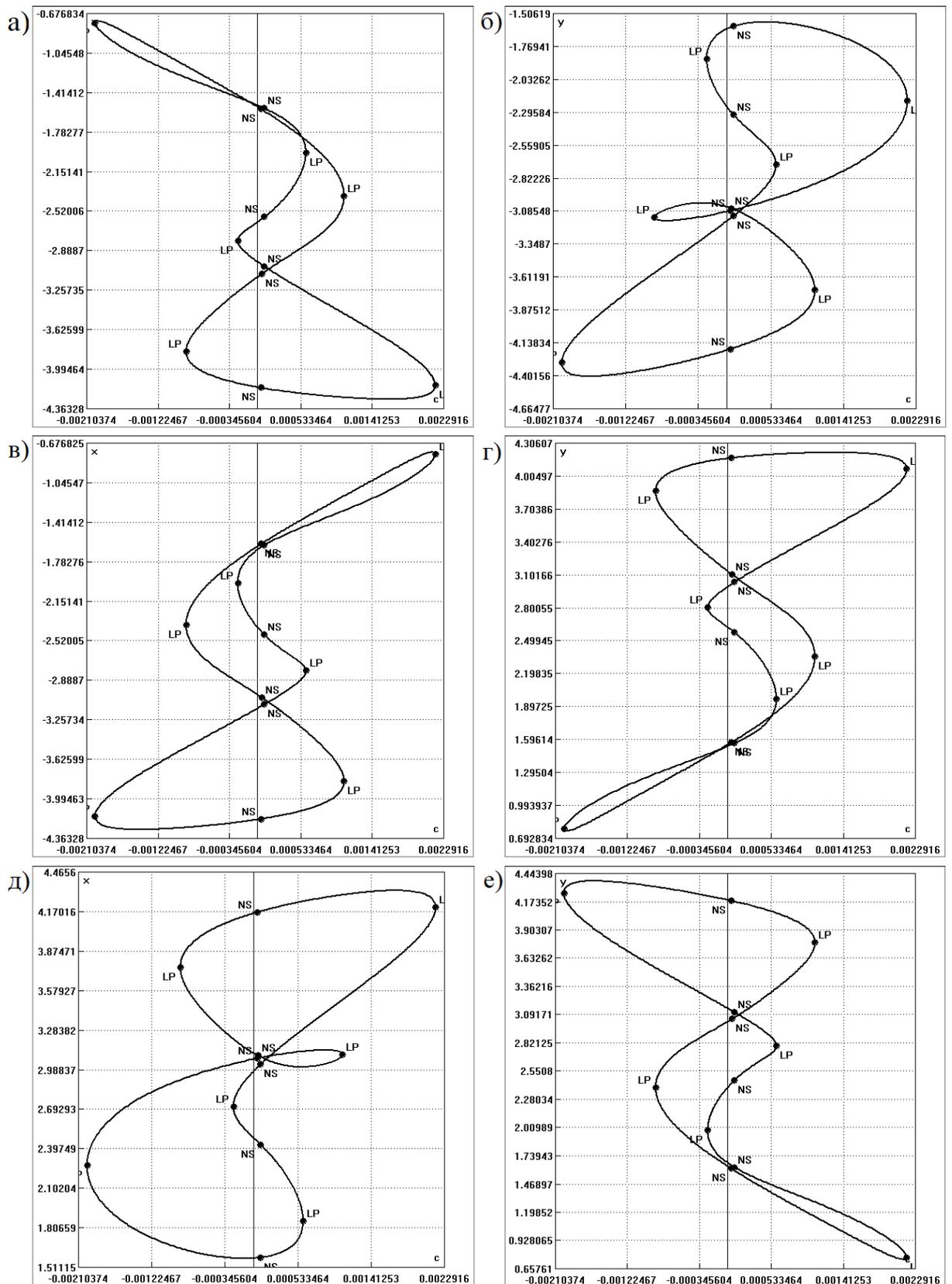


Рис. 6. Кривые полученные в программе Content для системы (2) с функции внешнего воздействия вида $F(x)=\lambda(1-x^2/2+x^4/24)$. Аббревиатуры LP и NS соответствуют седло-узловой бифуркации и бифуркации Неймарка-Сакера соответственно. $B=1.001$, $\lambda=0.3$.

Заключение

В данной работе проведено исследование динамики, находящейся под внешним импульсным воздействием автоколебательной системы с малым уровнем диссипации. Функция, описывающая зависимость амплитуды внешнего воздействия от динамической переменной, изменялась таким образом, чтобы осуществить переход от системы, для которой ранее [6-8] было показано наличие критического поведения гамильтоновского типа, к системе, демонстрирующей в консервативном пределе стохастическую паутину. Были построены карты динамических режимов и карты ляпуновских показателей при различных значениях нелинейной диссипации. При усложнении функции как для исходной потоковой системы, так и для приближенного дискретного отображения, происходит расширение областей хаотической динамики и квазипериодики на плоскости параметров. В результате область, в которой предполагается наличие критической точки Н-типа, оказывается внутри хаотической области – в отличие от ранее исследованного предельного случая, когда критическая точка Н-типа располагалась на границе двух областей хаотической динамики, возникших разными путями.

Структура фазового пространства при значениях параметра нелинейной диссипации, не являющихся малыми, практически не зависит от функции внешнего воздействия. С уменьшением значения этого параметра общий вид фазового пространства усложняется – в результате последовательности седло-узловых бифуркаций рождаются сосуществующие с основным периодические устойчивые циклы. При этом для полиномиальных функций амплитуды внешнего воздействия число бифуркаций ограничено, и при достижении определенного уровня нелинейной диссипации вид фазового пространства перестает меняться. Более высокой степени полинома при этом соответствует большее количество седло-узловых бифуркаций. В случае же выбора функции $F(x)=\lambda \cos x$, соответствующей наличию в консервативном пределе

стохастической паутины, с уменьшением параметра нелинейной диссипации число бифуркаций растет, по-видимому, неограниченно.

С помощью программы Content было проведено исследование дискретного отображения (2). Были определены координаты устойчивых точек и седел на фазовой плоскости, а также определены пороговые значения параметра нелинейной диссипации C для седло-узловых бифуркаций. Четкой закономерности между появлением бифуркаций и значениями параметра C не выявлено.

Список литературы

1. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М: Мир, 1990, 240 с.
2. *Райхл Л.Е.* Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах. М.: ИКИ; Ижевск: РХД, 2008, 756 с.
3. *Zisook A.B.* Universal effects of dissipation in two-dimensional mappings. // *Physical Review A*, 1982, 24, № 3, pp. 1640–1642
4. *Морозов А.Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Серия современная математика. М.–Ижевск: РХД, 2005, 424 с.
5. *Kuznetsov S.P., Kuznetsov A.P., Sataev I.R.* Multiparameter Critical Situations, Universality and Scaling in Two-Dimensional Period-Doubling Maps. // *Journal of Statistical Physics*, 2005, 121, № 5-6, pp. 697–748.
6. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Савин А.В., Савин Д.В.* Автоколебательная система с компенсируемой диссипацией: динамика дискретной модели. // *Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика*, 2008, 16, № 5, сс. 127–138.
7. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Савин А.В., Савин Д.В.* О возможности реализации в автоколебательной системе с внешним периодическим воздействием универсального поведения, характерного для перехода к

хаосу через удвоения периода в консервативных системах. // Письма в ЖТФ, 2008, 34, вып. 22, сс. 72–80.

8. *Savin D.V., Savin A.V., Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Feudel U.* The self-oscillating system with compensated dissipation – the dynamics of the approximate discrete map. *Dynamical Systems: An International Journal*, 27, 2012, 117-129.
9. *Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A.* Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors. // *Physical Review E*, 1996, 54, № 1, pp. 71–81.
10. *Feudel U., Grebogi C., Poon L., Yorke J.A.* Dynamical properties of a simple mechanical system with a large number of coexisting periodic attractors. // *Chaos, Solitons & Fractals*, 1998, 9, pp. 171–180.
11. *Blazejczyk-Okolewska B., Kapitaniak T.* Coexisting attractors of impact oscillator. // *Chaos, Solitons & Fractals*, 1998, 9, pp. 1439–1443.
12. *Feudel U., Grebogi C.* Why are chaotic attractors rare in multistable systems? // *Physical Review Letters*, 2003, 91, № 13, 134102.
13. *de Freitas A.S.T., Viana R.L., Grebogi C.* Multistability, basin boundary structure, and chaotic behavior in a suspension bridge model. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14, № 3, pp. 927–950.
14. *Rech P., Beims M., Gallas J.* Basin size evolution between dissipative and conservative limits. // *Physical Review E*, 2005, 71, № 1, 017202.
15. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* О природе явления буферности в слабо диссипативных системах. // *Теоретическая и математическая физика*, 2006, 146, № 3, сс. 447–466.

16. Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В. Отображение Икеды: от диссипативного к консервативному случаю. // Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика, 2006, 14, № 2, сс. 94–106.
17. Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В. Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды. // Письма в ЖТФ, 2007, 33, вып. 3, сс. 57–63.
18. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. On Some Properties of Nearly Conservative Dynamics of Ikeda Map. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2007, 10, № 4, pp. 393–400.
19. Feudel U. Complex dynamics in multistable systems. // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2008, 18, № 6, pp. 1607–1626.
20. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Savin D.V. On some properties of nearly conservative dynamics of Ikeda map and its relation with the conservative case. // Physica A, 2008, 387, № 7, pp. 1464–1474.
21. Мозер Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости. М.–Ижевск: РХД, 2001, 448 с.
22. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984, 272 с.
23. Савин А.В., Савин Д.В. Структура бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов слабо-диссипативного "отображения - паутины". // Нелинейный Мир, 2010, 8, №2, сс. 70-71.
24. Фельк Е.В. Влияние слабой нелинейной диссипации на структуры типа «стохастическая паутина». // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2013, 21, № 3, сс. 72-79.

25. *Felk E.V., Kuznetsov A.P., Savin A.V.* Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation. // *Physica A*, 2014, 410, pp. 561–572.
26. Kuznetsov, Yu. A. CONTENT: A Multiplatform Environment for Analyzing Dynamical Systems / Y. A. Kuznetsov and V. V. Levitin // *Dynamical Systems Laboratory, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1997*; available from <http://www.math.uu.nl/people/kuznet/CONTENT>