МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ И СИНХРОННОГО ПОВЕДЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки ____2____ курса _____214_____ группы

направления 03.04.01 Прикладные математика и физика

факультета нелинейных процессов

Плотниковой Анастасии Дмитриевны

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ________________ О.И. Москаленко

Зав. кафедрой нелинейной физики
к.ф.-м.н., доцент __________________ Е.Н. Бегинин

Саратов 2019 г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из наиболее интересных типов хаотической синхронизации является обобщенная синхронизация. Это явление может возникать между различными по своей природе осцилляторами, в том числе с разной размерностью фазового пространства. Индикатором установления обобщенной синхронизации является наличие функциональной зависимости (функционала) между состояниями взаимодействующих систем [1,2].

Для исследования синхронных режимов в радиофизических системах одними из самых универсальных и эффективных являются резонансные автогенераторы СВЧ-диапазона с запаздывающей обратной связью на основе многорезонаторных клистронов, отличающиеся высоким уровнем мощности и КПД, что делает их наиболее перспективными для практического применения. Изучению сложной динамики таких приборов посвящен ряд работ, например, [3-6].

Также тесным образом связан данный режим в системах с запаздыванием со сферой скрытой передачи информации [7,8]. Изначально в качестве генераторов передающего и принимающего устройств в схемах скрытой коммуникации использовались системы с низкой размерностью фазового пространства, характеризующиеся одним положительным показателем Ляпунова, однако, вскоре стало понятно, что такие системы не обеспечивают нужную степень конфиденциальности передачи данных. Одним из способов решения данной проблемы является замена низкоразмерных генераторов на системы с запаздыванием, так как за счет вариации управляющих параметров можно добиваться различного количества положительных показателей Ляпунова в этих системах.

Мощным инструментом для изучения динамики автономных и связанных систем является расчет спектра показателей Ляпунова, который дает более полную информацию о природе режимов, наблюдаемых в поведении системы. Он же является тем самым подходом, который позволяет определить пороговое значение установления синхронного режима в неавтономных и связанных системах. Так, например, известно, что определить порог возникновения обобщенной синхронизации возможно по моменту перехода одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений [9,10].

Важно отметить, что системы с запаздыванием характеризуются бесконечномерным фазовым пространством, а спектр показателей Ляпунова таких систем содержит бесконечное число ляпуновских показателей. Традиционные методы расчета показателей Ляпунова в данном случае перестают работать, что требует разработки и использования специальных подходов и алгоритмов. В настоящее время известно несколько методов расчета показателей Ляпунова для систем с запаздыванием. Например, в работах [11-13] описывались численные подходы к расчету показателей Ляпунова применительно к изучению автономной динамики систем (например, определения различных динамических режимов: от периодической автомодуляции до гиперхаоса). В работе [14] описана численная схема расчета спектра показателей Ляпунова для распределенных систем с запаздыванием, основанная на модификации метода Бенеттина с помощью искусственной дискретизации системы. В этих работах основной уклон делался на изучение поведения показателей Ляпунова при больших значениях времени запаздывания. Более того, неавтономная динамика подобных систем при помощи расчета показателей Ляпунова, как правило, не исследовалась. Разработка нового метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием позволит расширить класс систем, в которых возможно диагностировать различные режимы колебаний, в том числе наличие обобщенной хаотической синхронизации.

Объект исследования – две модели однонаправленно связанных систем, широко распространенных в сфере скрытой передачи информации и в области радиофизики, а именно два генератора с запаздыванием с квадратичной нелинейностью и связанные уравнения Маккея-Гласса.

Предмет исследования – режим обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием.

Цель магистерской работы – изучение особенностей режима обобщенной синхронизации на примере двух однонаправленно связанных систем с запаздыванием различной природы с помощью расчета спектра показателей Ляпунова.

В соответствии с поставленной целью определены основные задачи исследования:

- разработать метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием;
- апробировать данный метод на примере радиотехнического генератора с запаздыванием и уравнения кроветворения Маккея-Гласса;
- исследовать режим обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием, упомянутых выше;
- выявить особенности режима обобщенной синхронизации при изменении управляющих параметров, соответствующих разному количеству положительных показателей Ляпунова в автономном случае;
- сопоставить полученные результаты с результатами метода вспомогательной системы для проверки их корректности;
- исследовать вопрос о влиянии величины времени запаздывания на порог возникновения режима обобщенной синхронизации.

Структура и объем работы. Магистерская работа содержит 45 страниц текста, включая 12 рисунков, 2 таблицы и 48 использованных источников литературы.

Научная новизна магистерской работы:

1.Разработан и апробирован метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием.

2. Выявлены особенности обобщенной синхронизации, присущие системам с запаздыванием.

3. Получена зависимость значения параметра связи, отвечающего за установление режима обобщенной синхронизации, от величины времени запаздывания. Установлена общая закономерность для исследуемых систем в виде увеличения и дальнейшего насыщения порога обобщенной синхронизации.

Научная значимость.

Результаты данного исследования носят фундаментальный характер и вносят свой вклад в область исследований обобщенной синхронизации. Важное прикладное значение имеет предложенный метод расчета спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием, а также потенциальная возможность применения полученных результатов в задачах скрытой передачи информации.

Личный вклад. Исследование режима обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных системах с запаздыванием проведено автором лично. Задачи исследования были сформулированы научным руководителем работы – д.ф.-м.н., профессором Москаленко О.И. Разработка и апробация метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием проводилась совместно с научным руководителем и д.ф.-м.н., профессором Короновским А.А.

Апробация результатов и публикации.

Результаты, изложенные в магистерской работе, опубликованы в центральных рецензируемых научных журналах, входящих в системы цитирования Web of Science, Scopus и РИНЦ [15,16]. Полученные результаты представлялись на всероссийских и региональных научных конференциях, в том числе на 18 научной школе «Нелинейные Волны - 2018», ННГУ и ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2018 (опубликованы материалы в сборнике «Тезисы докладов молодых ученых»); Научной конференции «Presentic academic achievements to the world», СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2018 (3 место); школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2018», СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2018 (опубликованы тезисы в сборнике докладов научной конференции); 14 Всероссийской научной школе молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН и СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2019 (опубликованы материалы в сборнике тезисов «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»); 17 Всероссийской школе-семинаре «Физика и применение микроволн» им. А.П. Сухорукова, МГУ, Москва, 2019 (лучший доклад в секции «Нелинейная динамика», опубликованы материалы школы в сборнике трудов конференции «Волны-2019»), а также Студенческих конференциях факультета нелинейных процессов, СГУ им. Н.Г.Чернышевского, Саратов, 2018 и 2019 (1 и 2 место соответственно, опубликованы тезисы в сборниках «Научные исследования студентов Саратовского государственного университета 2018/2019»).

Материалы магистерской работы использовались при выполнении гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (проект № МК-531.2018.2).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы магистерской работы, сформулирована цель и задачи работы.

В **первой главе** магистерской работы представлен краткий обзор существующих типов хаотической синхронизации, а также приведено более детальное описание обобщенной синхронизации и методов ее диагностики: метода ближайших соседей [17], метода вспомогательной системы [18] и метода расчета условных показателей Ляпунова [9,10].

Во **второй главе** описан алгоритм разработанного метода расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием. Основными рассматриваемыми величинами являются состояние системы и ортонормированный набор возмущений этого состояния. Каждое возмущение соответствует одному из показателей в спектре показателей Ляпунова. При изучении одномерных систем (которые как раз и рассматриваются в данной магистерской работе) это скалярные переменные, определенные на интервале времени с длительностью, равной времени запаздывания, при этом верхняя граница интервала совпадает с текущим моментом времени. В начальный момент времени необходимо выбрать возмущения таким образом, чтобы они были ортогональными и с единичной нормой. Первое, что необходимо сделать для нахождения показателей Ляпунова, – это численно решить систему уравнений, описывающих динамику системы, на достаточном интервале времени. Таким образом станет известной эволюция во времени опорного состояния, относительно которого рассматривается набор возмущений. Одновременно осуществляется расчет эволюции набора возмущений опорного состояния системы, для чего численно интегрируется линеаризованное уравнение эволюции для каждого возмущения опорного состояния.

Далее отслеживается эволюция всех рассматриваемых величин. Через равные промежутки времени вновь осуществляется ортогонализация Грама-Шмидта возмущений опорного состояния и для каждого возмущения вычисляется слагаемое ляпуновской суммы

$$S_i(M\Gamma) = \sum_{k=0}^{M} ln\|\tilde{x}(\zeta)\|, \zeta \in (k\Gamma - \tau, k\Gamma), \quad (1)$$

где $\tilde{x}(\zeta)$ – ортогонализованное возмущение опорного состояния на -ом шаге процедуры, M – число шагов, τ – время запаздывания, Γ– интервал времени между применением процедур ортогонализации и нормировки, $\Gamma > \tau$. Наконец, для получения единичной нормы всех возмущений осуществляется перенормировка. Данная последовательность процедур повторяется многократно (M раз) и на каждом шаге считаются суммы по векторам возмущения до перенормировки, но после ортогонализации.

После многочисленных повторов всех описанных выше операций процедуру вычислений спектра значений показателей Ляпунова

$$\Lambda_i = \lim_{M \to \infty} \frac{S_i(M\Gamma)}{M\Gamma} \tag{2}$$

для систем с запаздыванием можно завершить.

В итоге набор возмущений опорного состояния системы оказывается упорядоченным по величине соответствующих им показателей Ляпунова: первое возмущение соответствует самому старшему показателю Ляпунова, второе – второму по старшинству показателю и т.д. Следовательно, для получения желаемого количества показателей Ляпунова в спектре необходимо задать такое же количество возмущений. В случае увеличения числа изучаемых показателей, необходимо следить за тем, чтобы шаг дискретизации по времени был меньше отношения времени запаздывания к числу рассматриваемых показателей Ляпунова.

Разработанный метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием был апробирован на генераторе с запаздыванием вида [19]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + kf\big(x(t-\tau)\big), \tag{2}$$

где $x(t)$ и $x(t-\tau)$ – характеризуют поведение системы в момент времени t и (t-τ) (применительно к генератору с запаздывающей обратной связью могут означать напряжения на входе и выходе линии задержки, соответственно); τ – время запаздывания; $f(x) = a - x^2$ – нелинейная функция с параметром нелинейности a, $0 < a < 2$; k – управляющий параметр.

В качестве второго примера было рассмотрено уравнение Маккея-Гласса [2]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \frac{x(t-\tau)}{1+x^n(t-\tau)} - \gamma x(t), \tag{3}$$

где $x(t)$ – число клеток (эритроцитов) в момент времени t, τ – время запаздывания, n, β, γ – управляющие параметры (n – целое число).

Было установлено, что предложенный алгоритм позволяет получить значения старших показателей Ляпунова в спектре (в ходе выполнения работ рассчитывалось до 14 старших показателей), которые полностью соотносятся с динамическими режимами, реализующимися в системе. Работоспособность метода была подтверждена с помощью бифуркационного анализа исследуемых систем.

В **третьей главе** обсуждается вопрос об установлении режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + k_1 f\big(x_1(t-\tau)\big),\\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + k_2 f\big(x_2(t-\tau)\big) + k_3(f(x_1(t-\tau)) - f(x_2(t-\tau)))\end{gathered} \quad (4)$$

где k_1и k_2 – параметры, относящиеся к первому (ведущему) и второму (ведомому) генераторам, соответственно, k_3 – параметр связи где k_1и k_2 – параметры, относящиеся к первому (ведущему) и второму (ведомому) генераторам, соответственно, k_3 – параметр связи.

Аналогичное исследование проведено для системы двух связанных уравнений Маккея-Гласса:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = f\big(x_1(t-\tau)\big) - k_1 x_1(t)\\ \dot{x}_2(t) = f\big(x_2(t-\tau)\big) - k_2 x_2(t) + k_3\big(x_1(t) - x_2(t)\big).\end{gathered} \quad (5)$$

Для различных комбинаций управляющих параметров, отвечающих за разное количество положительных показателей Ляпунова в автономном случае, построен спектр показателей Ляпунова связанных систем. Критерием установления данного режима выступает переход старшего показателя, отвечающего за ведомую систему, в область отрицательных значений. Вне зависимости от выбора системы, а также от степени хаотичности, в исследуемых моделях наблюдается обобщенная синхронизация, меняется лишь пороговое значение параметра связи. Наибольшее значение силы связи требуется в случае, когда ведущая система с мѐньшим числом положительных показателей Ляпунова воздействует на ведомую систему с бо̀льшим количеством. Также обнаружены дополнительные области «провала» старшего условного показателя в область отрицательных значений в системе связанных генераторов с запаздыванием. Для уточнения результатов был применен метод вспомогательной системы, согласно которому, если между идентичными ведомой и вспомогательной системами (но с разными начальными условиями) устанавливается эквивалентность состояний, то в паре ведущей-ведомой систем наступает обобщенная синхронизация. Результатом применения данного метода выступили графики зависимости среднего расстояния между состояниями ведомой и вспомогательной систем от параметра связи. Из сопоставления полученных результатов с результатами расчета спектра показателей Ляпунова был сделан вывод о том, что режим обобщенной синхронизации детектируется при одних и тех же величинах параметра связи.

Исследована зависимость порогового значения параметра связи, соответствующего установлению режима обобщенной синхронизации, от величины времени запаздывания в системах (4) и (5). Результаты получены для различных комбинаций управляющих параметров, указывающих на количество положительных показателей Ляпунова в «автономных» системах. Из сопоставленных зависимостей между собой был сделан вывод о том, что пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению обобщенной синхронизации, сначала увеличивается с ростом времени запаздывания, а затем достигает насыщения. Следует особо подчеркнуть, что для каждой комбинации параметров этот уровень насыщения оказывается различным. Также стоит отметить увеличение количества положительных показателей Ляпунова в исследуемых системах с увеличением τ.

В **Заключении** подведены итоги магистерской работы и сформулированы основные выводы:

- Разработан метод для расчета спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием.
- Для апробации метода в качестве модельных систем рассмотрены генератор с запаздыванием и уравнение Маккея-Гласса. Для обеих

систем построены бифуркационные диаграммы и спектры показателей Ляпунова в зависимости от одного из управляющих параметров. Показано, что полученные результаты находятся в хорошем соответствии друг с другом.

- Для различных комбинаций управляющих параметров, отвечающих за разное количество положительных показателей Ляпунова в автономном случае, был построен спектр показателей Ляпунова связанных систем. Установлен последовательный переход условных показателей, отвечающих за ведомую систему, в область отрицательных значений, что соответствует режиму обобщенной синхронизации.
- Для уточнения данных был использован метод вспомогательной системы. Были получены сопоставимые результаты при применении обоих алгоритмов.
- Показано, что режим обобщенной синхронизации наступает раньше в более «простых» системах с меньшим количеством положительных показателей Ляпунова.
- Наибольшее значение силы связи требуется в случае связанных генераторов, когда ведущая система с м**е**ньшим числом положительных показателей (в автономном случае) воздействует на ведомую систему с б**о**льшим количеством.
- Установлено, что с фиксированными управляющими параметрами в системе связанных уравнений, при изменении времени запаздывания порог режима обобщенной синхронизации увеличивается и достигает насыщения, в то время как количество положительных показателей Ляпунова растет.

Список использованных источников

1. Rulkov, N.F. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems / N.F.Rulkov, M.M.Sushchik, L.S.Tsimring, H.D.I.Abarbanel. // Phys. Rev. E. – 1995. – V.51, №2. – P. 980 – 994.

2. Koronovskii, A.A. Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization / A.A.Koronovskii, O.I.Moskalenko, A.E. Hramov. // Phys. Rev. E. – 2011. – V. 84, № 3. – P. 037201.

3. Дмитриев, Б. С. Теоретическое и экспериментальное исследование хаотических колебаний клистронного автогенератора с запаздыванием / Б.С.Дмитриев, Ю.Д.Жарков, Н.М.Рыскин, А.М.Шигаев. // Радиотехника и электроника. - 2001. - Т. 46, №5. - С. 604 – 610.

4. Дмитриев, Б.С. Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью / Б.С.Дмитриев, Ю.Д.Жарков, Д.В.Клокотов, Н.М.Рыскин. // ЖТФ. - 2003. - Т. 73,№7. - С. 105 – 110.

5. Shigaev, A.M. Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal / A.M.Shigaev, B.S.Dmitriev, Yu.D.Zharkov, N.M.Ryskin. // IEEE Transactions On Electron Devices. - 2005. - V. 52, № 5. - P. 790 – 797.

6. Стародубов, А.В. Явление обобщенной синхронизации в клистронных генераторах хаоса с запаздывающей обратной связью (эксперимент и численное моделирование) / А.В.Стародубов, А.А.Короновский, А.Е.Храмов, Ю.Д.Жарков, Б.С.Дмитриев, В.Н.Скороходов. // Известия РАН. Серия Физическая. - 2008. - Т. 72, № 1. - С. 148 - 152.

7. Короновский, А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации / А.А.Короновский, О.И.Москаленко, А.Е.Храмов. // Успехи физических наук. - 2009. - Т.179, №12. - С. 1281 – 1310.

8. Mensour, B. Synchronization of delay-differential equations with application

to private communication / B.Mensour, A.Longtin. // Phys. Lett. A. - 1998. - V.244. - P.59 - 70.

9. Moskalenko, O.I. Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks / O.I.Moskalenko, A.A.Koronovskii, A.E.Hramov, S.Boccaletti. // Phys. Rev. E. – 2012. – V.86, №3. – 036216.

10. Pyragas, K. Conditional Lyapunov exponents from time series / K.Pyragas. // Phys. Rev. E. - 1997. - V. 56,№ 5. - P. 5183-5188.

11. Балякин, А.А. Вычисление спектра показателей Ляпунова для распределенных систем радиофизической природы / А.А.Балякин, Е.В.Блохина. // Известие вузов «ПНД». – 2008. – Т.16, №.2. – С. 87 – 110.

12. Farmer, J.D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system / J.D.Farmer.// Physica D. - 1982. - V. 4, №3. – 366 p.

13. Cenys, A. Coupled VHF delay line chaos generators / A.Cenys, A.Tamasevicius, G.Mykolaitis, S.Blumeliene. // Proceedings of the first international workshop on the noise radar technology: NRTW-2002 (Yalta, 18-20 September). – Ukraine, 2002. - P. 136.

14. Балякин, А.А. Особенности расчета спектров показателей Ляпунова в распределенных автоколебательных системах с запаздывающей обратной связью / А.А.Балякин, Н.М Рыскин. // Изв. Вуз. «ПНД». - 2007. - Т. 15, № 6. - С. 3- 21.

15. Колоскова, А.Д. Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием / А.Д.Колоскова, О.И.Москаленко, А.А.Короновский. // Письма в ЖТФ. - 2018. - Т. 44, №9. - С. 19–25.

16. Плотникова, А.Д. Особенности обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием / А.Д.Плотникова, О.И.Москаленко. // Письма в ЖТФ. – 2019. – Т.45, №11. – С.31-33.

17. Rulkov, N.F. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems / N.F.Rulkov, M.M.Sushchik, L.S.Tsimring, H.D.I.Abarbanel. // Phys. Rev. E. – 1995. – V.51, №2. – P. 980 – 994.

18. Abarbanel, H.D.I. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach / H.D.I.Abarbanel, N.F.Rulkov, M.Sushchik. // Phys. Rev. E. - 1996. - V. 53, № 5. - P. 4528–4535.

19. Пономаренко, В.И. Выделение информационной компоненты хаотического сигнала системы с запаздыванием / В.И.Пономаренко, М.Д. Прохоров. // Письма в журнал технической физики. - 2002. - Т. 28, № 16. - С. 37-44.

20. Mackey, M.C. Oscillation and chaos in physiological control systems / M.C.Mackey, L. Glass. // Science. - 1977. - V. 197 - P. 287 - 289.