

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники, колебаний и волн

Сети нелинейных элементов со сложной топологией связи

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 225 группы
направления 03.04.03 Радиофизика
Факультета нелинейных процессов
Кудрявцевой Екатерины Валерьевны

Научный руководитель
проф., д-р физ.-мат. наук

А. А. Короновский

Заведующий кафедрой
член-корр. РАН, д.ф.-м.н.,
профессор

Д. И. Трубецков

Саратов 2019

Введение. В последние годы был выстроен новый подход к изучению сложных систем с точки зрения рассмотрения их как сетевых структур. Данный метод способен описать реальные химические, биологические, социальные, технические системы [1-4]. Все эти системы имеют сложную структуру, состоящую из большого количества взаимосвязанных частей. В таких сетях узлы представляют собой динамические части, а линии, соединяющие эти узлы, отражают связь между ними.

Наряду с основной теорией сетей изучаются и различные процессы в сетевых структурах. Одно из них – синхронизация. Под синхронизацией понимается установление каких-либо соотношений между основными характеристиками системы. Большой интерес представляют собой системы с множеством взаимосвязанных элементов [5-8]. Как правило, каждый элемент сети представляют в качестве фазового осциллятора. Для рассмотрения явления синхронизации в настоящей работе использовалась сеть фазовых осцилляторов Курамото.

Целью данной работы является изучение теории комплексных сетей, моделирование матриц связи, а также изучение явления синхронизации в сетях связанных осцилляторов на примере модели Курамото.

Данная работа направлена на изучение теории комплексных сетей. В первой главе «Основные сведения теории комплексных сетей» вводятся основные понятия, необходимые для общего понимания теории сетей. В той же главе приводится описание основных видов сетей, таких как масштабно-инвариантные, случайные сети и сети малого мира; здесь же представлены основные характеристики каждой топологии связи. Во второй главе «Моделирование сетей» показаны методы моделирования матриц связи для трех видов сетей (моделирование проводилось для $N = 1000$ элементов). В третьей главе «Синхронизация осцилляторов в комплексных сетях» рассмотрено явление синхронизации впервые на примере сети из $N=500$

связанных осцилляторов Курамото, найдены критические параметры, при которых система осцилляторов выходит из синхронизма, а также установлен характер выхода сети из синхронизма.

Основное содержание работы. В первой главе магистерской работы представлены основные сведения теории комплексных сетей. Показаны способы графического и математического представления сети. Введены основные понятия теории комплексных сетей. Далее в этой же главе приводится классификация сетей: сети могут быть дискретные и взвешенные; направленные и симметричные. После этого вводится классификация сетей в зависимости от распределения узлов по степеням – сети делятся на: случайные, сети малого мира и масштабно-инвариантные сети [2].

Во второй главе показаны методы, позволяющие построить сеть с конкретной топологией связи. В первом разделе второй главы описан алгоритм, с помощью которого можно получить случайную сеть. Построение матрицы связи проводилось следующим образом:

- задается вероятность p ($0 < p < 1$);
- генерируется случайное число в промежутке от 0 до 1;
- в случае если сгенерированное случайное число попадает в промежуток $(0; p)$, в матрицу связи ставится «1» (т.е. осцилляторы сети взаимосвязаны), в противном случае – «0» (осцилляторы не связаны).

После построения матрицы размером 1000×1000 для каждого узла была рассчитана степень узла (степень узла i равна $q_i = \sum_j a_{ij}$), а затем по ним было построено распределение узлов по числу связей. Согласно [9], распределение элементов сети по степени узла в случайной сети хорошо аппроксимируется распределением Пуассона. Результаты численного эксперимента показывают, что при значении $p = 0.6$ распределение, полученное при соответствующих значениях управляющих параметров, не

совпадает с распределением Пуассона, поскольку оно справедливо для малых значений вероятности p . При уменьшении значения вероятности до $p = 0.006$, кривая, построенная по результатам численного моделирования, совпадает с теоретическим распределением Пуассона ($P = e^{-np} * \frac{(np)^k}{k!}$, где $p = 0.006$ – заданная вероятность, $N = 1000$ – число элементов матрицы) (рис.1).

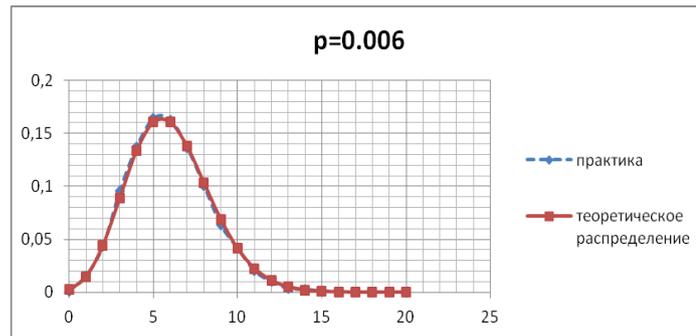


Рис. 1: Распределение элементов сети по степени узла при значении вероятности $p = 0.006$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что случайная Пуассоновская сеть может быть построена только в случае малых значений вероятностей, а при увеличении значения вероятности изменяется аппроксимирующая формула.

Во втором разделе второй главы представлен алгоритм, позволяющий построить сеть со свойствами малого мира. Построение матрицы связи для сети малого мира начинается с формирования кольца из N элементов, в котором каждый элемент связан с $2K$ своими ближайшими «соседями» – по K с каждой стороны.

Затем необходимо «перепривязать» элементы по следующему алгоритму:

- последовательным перебором элементов находим первую его связь (единицу на пересечении строки и столбца);

- задается вероятность p ($0 < p < 1$);
- генерируется случайное число в промежутке от 0 до 1;
- в случае, если сгенерированное случайное число попадает в промежуток $(0;p)$, то переходим к следующему этапу – осуществляем перебор связи, в противном случае – переходим к следующей связи текущего элемента;
- перебор связи заключается в том, что текущая связь обрывается (в матрице связности на месте «1» ставится «0»), затем генерируется случайное число в промежутке от 0 до N – так выбирается новый узел, с которым будет связан текущий элемент. После выбора нового узла необходимо поставить «1» в матрицу связи на пересечении текущего и нового узлов.

Процедура замены связей называется рандомизацией. Нельзя забывать о свойстве симметрии матрицы связности – матрица должна быть симметричной относительно главной диагонали. Для того чтобы исключить совпадение нового, случайно выбранного, узла с элементом главной диагонали, следует ввести дополнительный цикл, в котором случайное число будет генерироваться до тех пор, пока оно не станет отличным от диагонального элемента.

В третьем разделе второй главы приведен алгоритм формирования масштабно-инвариантной сети. Согласно [10] построение матрицы связи для масштабно-инвариантной сети начинается с m_0 изолированных узлов. В каждый момент времени $t = 1, 2, 3, \dots, N - m_0$ в сеть добавляется новый узел с $m \leq m_0$ связями, присоединяемыми в сеть. Вероятность того, что новая связь соединит узел j с существующим узлом i прямо пропорциональна степени узла i :

$$P_{j \rightarrow i} = \frac{k_i}{\sum_l k_l}. \quad (1)$$

Так как новый узел имеет m связей, в момент времени t в сети будет $N = m_0 + t$ узлов и $K = mt$ связей.

Проследим логику образования сети на примере с $m = 3$.

Построение сети производится следующим образом:

- заполняем матрицу связи $m_0 \times m_0$ единицами (элементы на главной диагонали – нулевые) для m_0 начальных узлов;
- рассчитываем веса узлов k_i ;
- находим суммарное количество связей $\sum_l k_l$ для всей сети на текущем шаге;
- «делим» единичный отрезок (т.к. максимальная вероятность присоединения – 1) на m частей, длина каждой из которых равна
$$P_{j \rightarrow i} = \frac{k_i}{\sum_l k_l};$$
- генерируем случайное число в промежутке от 0 до 1;
- смотрим, в какой промежуток единичного отрезка попадает сгенерированное число;
- ставим «1» в матрицу связи на место пересечения текущего узла с элементом, порядковый номер которого соответствует выпавшему промежутку.

Моделирование проводилось для $m = 5, m = 10, m = 15, m = 20, m = 30$ – то есть, для разного количества связей у узла, добавляемого в сеть на новой итерации. Согласно [10], распределение узлов по числу связей в масштабно-инвариантной сети должно подчиняться степенному закону $P(k) \sim k^{-\gamma}$ с показателем степени $2 < \gamma < 3$. Результаты численного моделирования соответствуют этим значениям. На рис.2 построены распределения элементов сети по степени узлов, а также аппроксимирующие прямые в логарифмическом масштабе. Аппроксимация проводилась формулой $P(k) = a \times k^{-b}$.

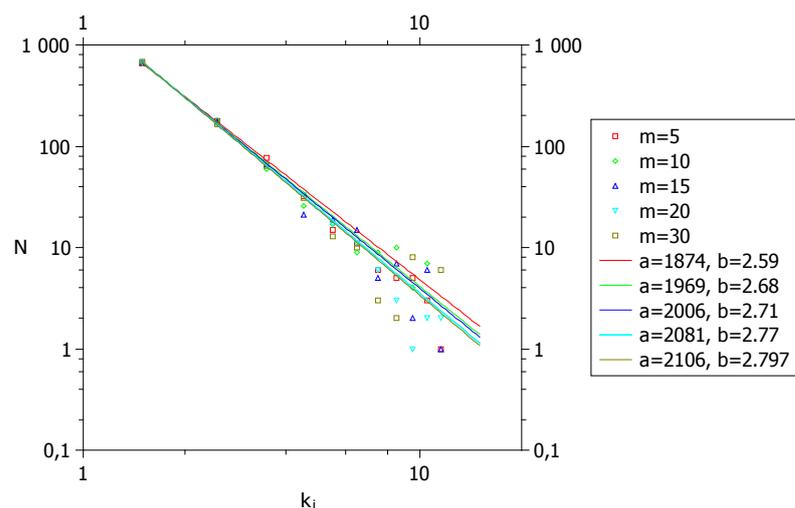


Рис. 2: Распределения элементов сети по степени узлов (маркеры) и аналитические зависимости (сплошные линии), соответствующие этим распределениям. На графике оси в логарифмическом масштабе

В третьей главе рассмотрено явление синхронизации в сети фазовых осцилляторов Курамото. Синхронизация – фундаментальное нелинейное явление природы, представляющее собой одно из наиболее интересных активно изучаемых явлений [11-21]. Переходы в синхронное состояние могут быть резкими – взрывная синхронизация – или непрерывными. Модель Курамото – это система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad (2)$$

где ω_i – внутренняя частота i – ого осциллятора, определяемая как

$$\omega_i = -\Omega + \frac{\Omega}{N} (2i - 1), \quad (3)$$

где $\Omega = 0.5, i = 1, \dots, N$, $\varepsilon = \frac{\lambda}{N}$ – амплитуда взаимодействия (λ – интенсивность соединения), a_{ij} – матрица связи, отображающая влияние взаимодействующих элементов, N – количество осцилляторов сети. Вид матрицы связи зависит от того, какую топологию сети необходимо смоделировать. Она может быть сформирована по алгоритмам, описанным в предыдущей главе. В представленной выпускной квалификационной работе рассматривается случайная сеть. Для качественного описания явления

синхронизации в сети осцилляторов Курамото использовалось приближение общего поля. При условии $\dot{\varphi} = 0$ получим уравнение, характеризующее динамику синхронного i -ого осциллятора.

$$0 = \omega_i + \frac{\lambda r}{N} k_i \sin(\varphi - \varphi_i), \quad (4)$$

где r ($0 < r < 1$) – средняя амплитуда, характеризующая когерентность осцилляторов (параметр порядка): в синхронном случае $r = 0$, φ – фаза общего поля. Произведем замену $\frac{\lambda}{N} = \frac{1}{\sigma}$ и получим

$$0 = \omega_i + \frac{1}{\sigma} K_i \sin(\varphi - \varphi_i). \quad (5)$$

Проанализируем полученное уравнение. Большие значения параметра связи λ обеспечивают синхронную динамику i -ого осциллятора. С уменьшением параметра связи λ величина σ , наоборот, увеличивается, при этом частота ω_i и степень узла k_i не зависят от параметра связи λ и являются константами, и, соответственно, поддержание выполнения соотношения (5), описывающего синхронную динамику рассматриваемого осциллятора, возможно только за счет увеличения значения синуса. Однако синус ограничен значениями $\sin(\varphi - \varphi_i) = \pm 1$. Значит, когда значение синуса в выражении (5) достигает единицы, дальнейший рост параметра σ уже не может быть компенсирован и соотношение (5) перестает выполняться, что свидетельствует о разрушении синхронного режима и выходе i -ого осциллятора из синхронизма. Тогда условие $\sin(\varphi - \varphi_i) = \pm 1$ является критерием разрушения синхронного состояния для рассматриваемого осциллятора, а соотношение (5), в свою очередь, может быть записано в виде

$$\omega_i = \pm \frac{1}{\sigma_{ci}} k_i, \quad (6)$$

где σ_{ci} – критическое значение параметра, соответствующее моменту выхода i -ого осциллятора из синхронизма. Таким образом, нанеся все осцилляторы на плоскость (ω, k) можно легко установить, какой из осцилляторов первым выйдет из синхронизма (это будет осциллятор, у которого величина σ_c будет наименьшей, и соответственно, на плоскости (ω, k) ему будет соответствовать точка, которой первой коснется прямая $k = \pm\sigma\omega$ при увеличении параметра σ), а также найти значение параметра σ , соответствующее началу разрушения синхронного состояния сети взаимодействующих осцилляторов Курамото. В этой же главе описан алгоритм, согласно которому можно найти границу синхронизации – параметры σ_c и λ_c , а также показано, как по количеству оставшихся в сети синхронных осцилляторов N_0 определить, наблюдается ли в системе взрывная синхронизация ($N_0 \ll N$) или же осцилляторы выходят из синхронизма последовательно ($N_0 \sim N$).

При численном моделировании случайной сети осцилляторов Курамото было получено, что для такой сети наблюдается лавинообразный выход всех осцилляторов из синхронного состояния при $\sigma = 998.6$ (что для рассматриваемой сети, состоящей из $N = 500$ осцилляторов, соответствует критическому значению параметра связи $\lambda_c = 0.001$), что подтверждает явление взрывной синхронизации и дает ему понятное физическое объяснение.

Заключение. Поводя итог своей работе, хочется еще раз подчеркнуть важность сетевого подхода. Исследователи, изучающие сложные биологические, химические, социальные, технические и многие другие системы, приходят к выводу о том, что знаний свойств отдельных элементов сети (нейроны, гены, банки и т.п.) оказывается недостаточно для полного понимания динамики сложных систем в целом. Необходимо учитывать

взаимодействие, а также характер взаимодействия отдельных составляющих всей сети.

В настоящей работе были изучены основные понятия теории сложных сетей, рассмотрены три типа сетей: случайные сети, сети малого мира и масштабно-инвариантные сети, а также их основные характеристики и способы их построения. В работе были описаны алгоритмы формирования матриц связи для всех трех топологий. После формирования матриц связи было рассмотрено явление взрывной синхронизации на основе сети связанных фазовых осцилляторов Курамото. Выбранная модель достаточно проста для понимания и моделирования, поэтому она и стала основой для изучения синхронизации. В работе продемонстрирован алгоритм нахождения критических параметров, соответствующих выходу системы из синхронного режима, а также показаны найденные значения параметров для заданной системы из $N = 500$ осцилляторов.

Стоит заметить, что исследование явления синхронизации сети осцилляторов является модельной задачей, которая может быть распространена на системы из разных областей науки. Поэтому исследование таких моделей и их поведения – актуальная проблема, решение которой может послужить толчком к освоению новых методов управления и подавления коллективной динамики элементов сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харитонов Е. В. ГРАФЫ И СЕТИ: Учебное пособие для студентов экономических специальностей. – Ульяновск: УлГТУ, (2006) 92
- [2] Евин И. А. Введение в теорию сложных сетей. Компьютерные исследования и моделирование, т.2, № 2 (2010) 121-171
- [3] Домнин Л. Н. Элементы теории графов: учеб. пособие Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та (2007) 144
- [4] Albert R., Barabasi A.-L. Statistical mechanics of complex networks. University of Notre Dame, Review of Modern Physics, 74, 47 (2002) 47-97
- [5] Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера (2003)
- [6] Gonzalez-Miranda J. M. Synchronization and Control of Chaos, Imperial College Press (2004) 108-196
- [7] Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Development, Springer (2002)
- [8] Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V. Synchronization: from simple to complex. Springer (2009)
- [9] Кузюрин М. М., Берновский Н. Н. Случайные графы, модели и генераторы безмасштабных графов. Труды Института системного программирования РАН. 22 (2012) 419-434
- [10] Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. Physics Reports 424, 4 (2006) 175-308
- [11] Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, (1981)

- [12] Кузнецов Ю. И., Мигулин И. И., Минакова И. И., Сильнов Б. А. Синхронизация хаотических автоколебаний. Доклады академии наук СССР т. 275, №6, (1984) 1388-1391
- [13] Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах. Изв. вузов. Радиофизика т. 29 (1986) 1050-1060
- [14] Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D. E. Chaotic synchronization, applications to living systems. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, 42 (2002)
- [15] Сухман С. М., Бернов А. В. Синхронизация в телекоммуникационных системах. Анализ инженерных решений. Эко-Трендз (2002)
- [16] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е., и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований (2004) 416
- [17] Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера (2003)
- [18] Gonzalez-Miranda J. M. Synchronization and Control of Chaos, Imperial College Press (2004) 108-196
- [19] Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V. Synchronization: from simple to complex. Springer (2009)
- [20] Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций: учебник-монография. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект» (2009) 312
- [21] Короновский А. А., Москаленко О. И., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Храмов А. Е. Синхронизация хаоса: фундаментальные подходы и практические приложения. Саратов: Издательство Саратовского Университета (2015) 384