

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники, колебаний и волн

**Обобщенная хаотическая синхронизация в системах,  
характеризующихся двумя положительными показателями Ляпунова**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 225 группы  
направления 03.04.03 «Радиофизика»  
факультета нелинейных процессов  
Ханадеева Владислава Андреевича

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

О.И. Москаленко

Заведующий кафедрой  
электроники, колебаний и волн  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

Д.И. Трубецков

Саратов 2019 г.

## Введение

Исследование синхронизации нелинейных хаотических систем в настоящее время является актуальным направлением радиофизики [1]. Режимы хаотической синхронизации были обнаружены в системах различной природы: физических, биологических, химических. Благодаря широкой распространённости данного явления в настоящее время уже были найдены как теоретические, так и практические применения различных типов хаотической синхронизации, например, в биологических и физиологических задачах, при скрытой передаче информации с помощью хаотических сигналов, при управлении системами сверхвысокочастотной электроники и т.п. Несмотря на большой интерес к явлению хаотической синхронизации и существование достаточно большого количества статей по данной теме, говорить о том, что явление хаотической синхронизации в нелинейных системах полностью изучено, пока еще явно рано.

На данный момент известны такие типы синхронизации, как фазовая синхронизация [1], полная синхронизация [2], обобщённая синхронизация [3] и др. Каждый из типов синхронной хаотической динамики имеет свои особенности и способы диагностики, при этом также рассматривается возможность взаимосвязи этих типов синхронизации. Одним из наиболее интересных и наименее изученных типов хаотической синхронизации является режим обобщенной синхронизации, который изначально был обнаружен только для однонаправленно связанных систем, а в дальнейшем это явление было распространено на взаимно связанные системы и сети связанных нелинейных элементов.

В настоящее время явление обобщенной синхронизации исследовано достаточно полно для хаотических систем с достаточно простой топологией аттрактора, например, систем Ресслера с аттрактором ленточного типа, характеризующихся в автономном режиме только одним положительным показателем Ляпунова. Значительно меньшее количество работ направлено на

исследование этого режима в системах, характеризующихся сложной (двухлистной) структурой аттрактора, например, как у системы Лоренца, а работ, направленных на изучение этого режима в системах с несколькими положительными показателями Ляпунова вообще практически не существует.

Целью настоящей магистерской работы является изучение режима обобщенной синхронизации в связанных системах со сложной топологией аттрактора, характеризующихся несколькими положительными показателями Ляпунова, а также исследование перемежающегося поведения, имеющего место на границе этого режима.

Магистерская работа состоит из введения, трех глав и заключения. Первая глава называется «Теория обобщенной синхронизации и методы её диагностики». Вторая глава называется «Диагностика обобщенной синхронизации в системах с несколькими положительными показателями Ляпунова». Третья глава называется «Перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации».

Магистерская работа содержит 34 страницы текста, включая 12 рисунков, 36 использованных источников литературы.

По материалам магистерской работы опубликовано 2 статьи [4,5] в центральных рецензируемых отечественных журналах, входящих в перечень ВАК для опубликования материалов кандидатских и докторских диссертаций, включенных в международные системы цитирования Web of Science и Scopus. Материалы магистерской работы были представлены на 7 конференциях (XVIII Научной школе «Нелинейные волны – 2018», 8 и 9-ой научно-практических конференциях «Presenting Academic Achievements to the World», Студенческих конференциях факультета нелинейных процессов (2018, 2019), XIII Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», XVII Всероссийской школе-семинаре «Физика и применение микроволн» имени профессора А.П. Сухорукова) и опубликованы в тезисах докладов [6–9].

Материалы магистерской работы использовались при выполнении гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (проект № МК-531.2018.2).

### **Основное содержание работы**

*В первой главе* изложена теория обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах, а также рассмотрены различные методы диагностики этого режима.

Существует две категории систем, в которых наблюдается режим обобщенной синхронизации. К первой категории относятся однонаправленно связанные системы. Вторая категория включает в себя взаимно связанные системы. Изначально понятие обобщенной синхронизации было определено для однонаправленно связанных систем, состоящих из связанных ведущего  $\vec{x}(t)$  и ведомого  $\vec{y}(t)$  осцилляторов. Для данных систем режим обобщенной синхронизации означает, что после завершения переходного процесса между состояниями взаимодействующих систем устанавливается функциональное соотношение:

$$\vec{y}(t) = \varphi[\vec{x}(t)]. \quad (1)$$

Для случая взаимной связи уравнение (1) необходимо расширить, чтобы учесть общее действие систем друг на друга. Уравнение (1) для случая взаимной связи выглядит следующим образом:

$$\varphi[\vec{x}(t), \vec{y}(t)] = 0. \quad (2)$$

Известно несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации, среди которых можно выделить вычисление спектра показателей Ляпунова, метод ближайших соседей и метод вспомогательной системы.

Метод вспомогательной системы является простым и удобным способом диагностики режима обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью. Однако, он не может быть применен к системам с взаимным типом связи. Как было показано в [10], известные попытки

обобщения этого метода на случай взаимной связи приводят к некорректным результатам. Поэтому для взаимно связанных систем возможными способами диагностики режима обобщенной синхронизации являются расчет спектра показателей Ляпунова и метод ближайших соседей.

Показатели Ляпунова находят широкое применение при изучении синхронного поведения однонаправленно и взаимно связанных хаотических систем. Так, критерием наступления режима обобщенной синхронизации является переход второго по старшинству показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Для однонаправленно связанных систем достаточно рассчитать показатели Ляпунова только для ведомой системы (так как поведение ведущей системы не зависит от динамики ведомой системы) и диагностировать возникновение синхронного режима по моменту перехода старшего так называемого условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений.

Одним из принципиальных недостатков метода ближайших соседей является невозможность точного определения порогового значения установления синхронного режима. Метод позволяет установить лишь факт наличия/отсутствия режима обобщенной синхронизации, а следовательно, используется, как правило, для подтверждения работоспособности других методов и подходов, например, при расчете спектра показателей Ляпунова.

*Во второй главе* представлены результаты исследования обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных системах, способных находиться в режиме гиперхаоса, предложены методы диагностики данного режима.

Рассмотрим систему двух взаимно связанных осцилляторов Чена [11] со сложной топологией аттрактора:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1) + ey_1z_1, & \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + ey_2z_2, \\
\dot{y}_1 &= cx_1 - dx_1z_1 + y_1 + u_1, & \dot{y}_2 &= cx_2 - dx_2z_2 + y_2 + u_2, \\
\dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1, & \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2, \\
\dot{u}_1 &= -k_1y_1 + \varepsilon(x_2 - x_1), & \dot{u}_2 &= -k_2y_2 + \varepsilon(x_1 - x_2),
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $a = 35$ ,  $b = 4.9$ ,  $c = 25$ ,  $d = 5$ ,  $e = 35$ ,  $k_1 = 110$ ,  $k_2 = 190$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – параметр связи. Значения управляющих параметров в этой системе выбраны таким образом, чтобы первая система находилась в режиме гиперхаоса, а вторая – в хаотическом режиме. На рисунке 1 представлена зависимость шести старших показателей Ляпунова от параметра связи. Видно, что режим обобщенной синхронизации наступает при  $\varepsilon = 105$ .

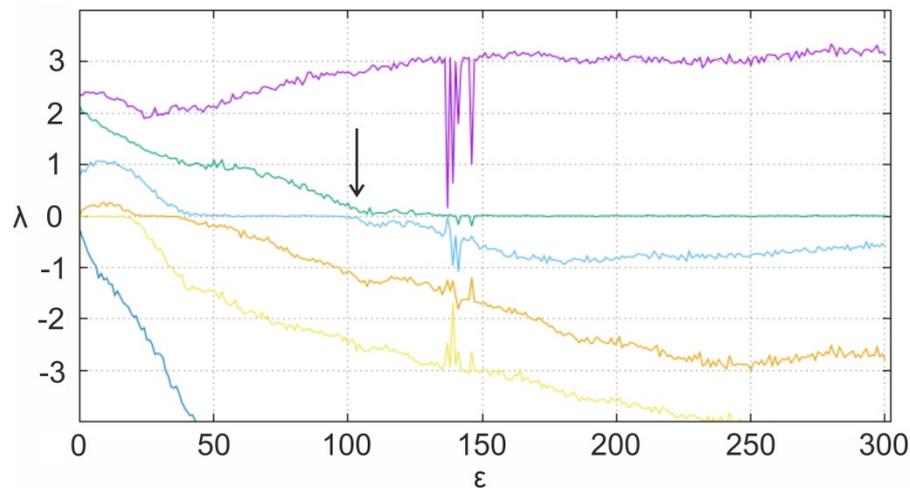


Рисунок 1 – Зависимости 6 старших показателей Ляпунова для системы (3) от параметра связи  $\varepsilon$ .

На рисунке 2 представлены результаты применения метода ближайших соседей к системе (3) при значении параметра связи  $\varepsilon = 250$ . Видно, что образы ближайших соседей в фазовом пространстве второй системы оказываются разбросанными достаточно сильно по аттрактору (см. рисунок 2b). Таким образом, из-за сложной топологии хаотических аттракторов, метод ближайших соседей оказывается неработоспособным методом диагностики режима обобщенной синхронизации и его необходимо усовершенствовать. Было предложено использовать метод фазовых трубок [12].

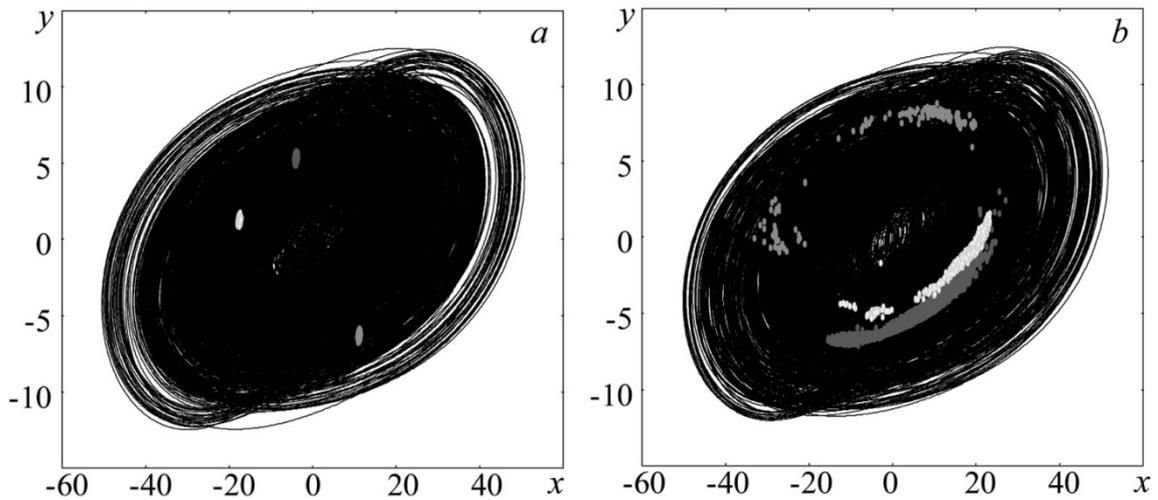


Рисунок 2 – Фазовые портреты первой (a) и второй (b) взаимодействующих осцилляторов Чена

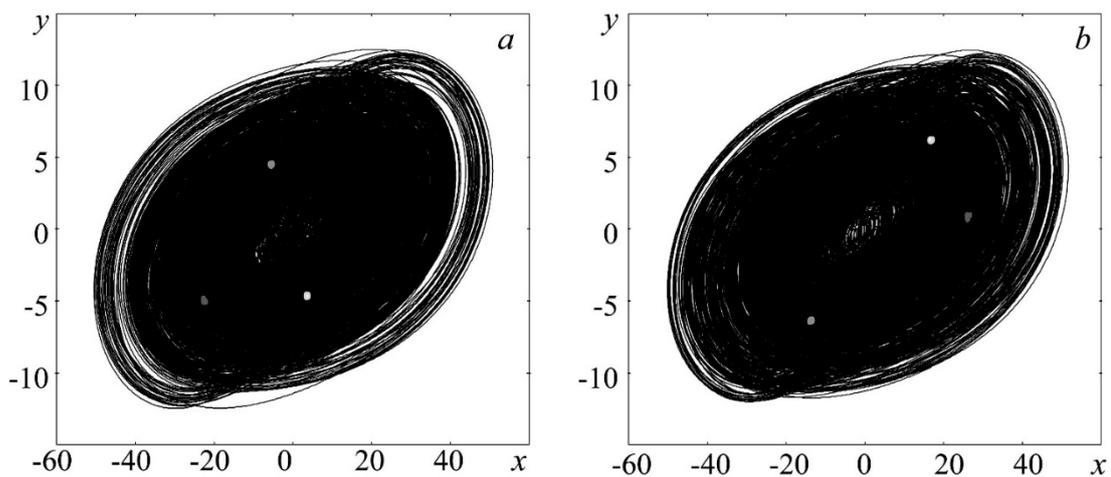


Рисунок 3 – Результаты применения метода фазовых трубок к осцилляторам Чена

На рисунке 3 приведены результаты применения метода фазовых трубок к исследуемой системе. Длина фазовой трубки выбрана равной  $\tau = 0.03$ . Видно, что даже при малой длине фазовой трубки образы ближайших соседей оказываются локализованными в ограниченных областях аттрактора, а размеры этих областей оказываются сопоставимыми с размерами областей, занимаемыми ближайшими соседями в фазовом пространстве первой системы.

Полученные результаты свидетельствуют о применимости метода фазовых трубок для диагностики режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией хаотических аттракторов.

Следующая рассмотренная система, состоящая из двух взаимосвязанных трехмерных отображений Эно [13], записывается следующими разностными уравнениями:

$$\begin{cases} X_{1,2}(n+1) = Y_{1,2}(n), \\ Y_{1,2}(n+1) = Z_{1,2}(n+1) + \varepsilon((M1_{2,1} + M2 * Y_{2,1}(n) + BX_{2,1}(n) - Z_{2,1}(n)^2) - \\ -(M1_{1,2} + M2Y_{1,2}(n) + BX_{1,2}(n) - Z_{1,2}(n)^2) \\ Z_{1,2}(n+1) = M1_{1,2} + M2Y_{1,2}(n) + BX_{1,2}(n) - Z_{1,2}(n)^2 \end{cases} \quad (4)$$

где  $X_{1,2}, Y_{1,2}, Z_{1,2}$  – векторы состояний взаимодействующих систем (индексы 1 и 2 относятся к первой и второй системам, соответственно),  $B, M1_{1,2}, M2$  – управляющие параметры,  $\varepsilon$  – сила связи.

Спектр показателей Ляпунова для системы (4) представлен на рисунке 4. Когда оба показателя Ляпунова становятся отрицательными, то есть, при  $\varepsilon > 0.12$ , в системе диагностируется режим обобщенной синхронизации.

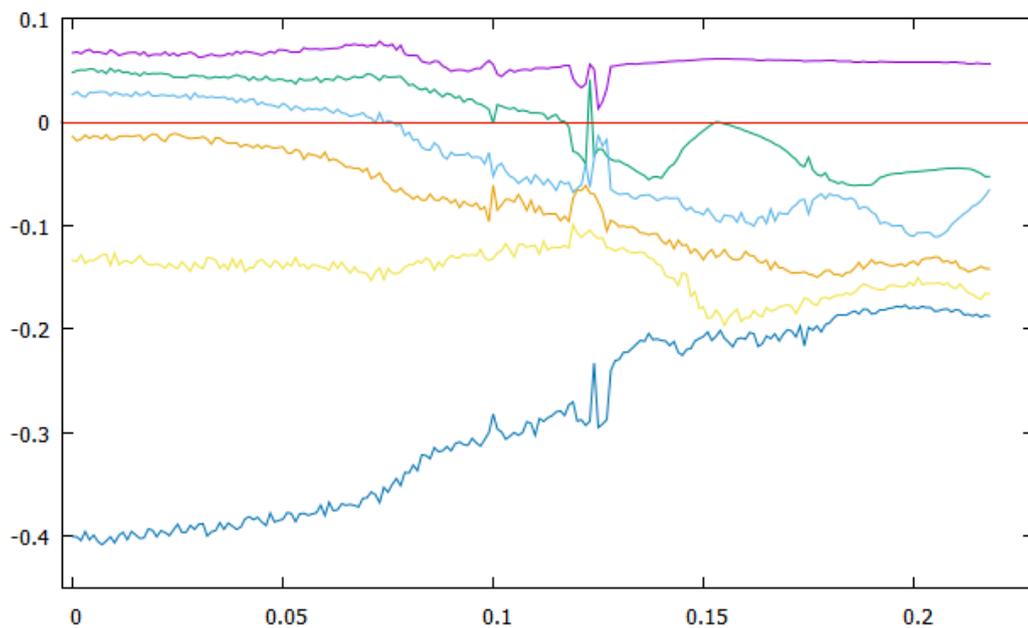


Рисунок 4 – Спектр показателей Ляпунова  $\lambda(\varepsilon)$  для системы (4)

Теперь сравним полученные данные с методом фазовых трубок. На рисунке 5 представлены фазовые портреты взаимодействующих систем при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.05$ , что соответствует асинхронному режиму. В соответствии с методом фазовых трубок были выбраны три опорные точки и их траектории в первой системе. Длина предыстории фазовой трубки выбрана равной  $K = 10$ . Образы ближайших соседей, как и ожидалось, оказываются рассредоточены по аттрактору второй системы, что означает отсутствие синхронного режима.

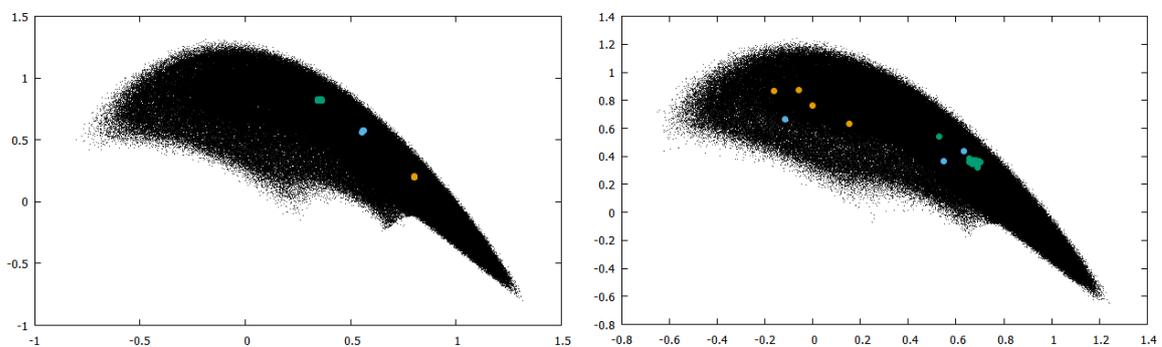


Рисунок 5 – Аттракторы первого (слева) и второго (справа) системы (4) в плоскости  $(X, Y)$  при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.05$

Переходя к границе наступления обобщенной синхронизации  $\varepsilon = 0.08$  с помощью метода фазовых трубок можно пронаблюдать перемежающееся поведение, представленное на рисунке 6.

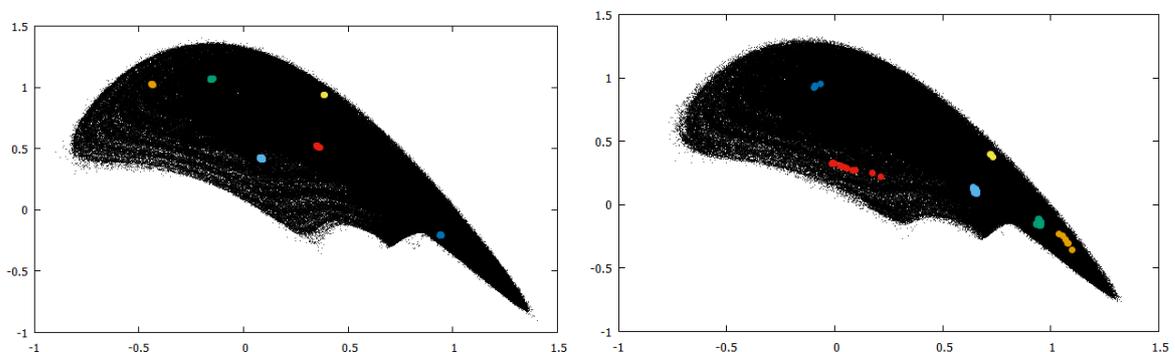


Рисунок 6 - Аттракторы первого (слева) и второго (справа) системы (4) в плоскости  $(X, Y)$  при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.08$

Таким образом, и в потоковых системах, и в дискретных отображениях, способных находится в режиме гиперхаоса возможно диагностировать режим обобщенной синхронизации при помощи расчета спектра показателей Ляпунова и метода фазовых трубок.

*В третьей главе* рассматривается перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации в системе взаимно связанных осцилляторов Чена. Исследуемая система по-прежнему описывается системой дифференциальных уравнений (3). Ниже границы обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение, характеризующееся наличием коротких интервалов времени, в течение которых фазовые траектории взаимодействующих систем находятся на различных листах хаотического аттрактора, в то время как большую часть времени состояния взаимодействующих систем оказываются практически полностью синхронизованными. Моменты времени, соответствующие расхождению фазовых траекторий, относятся к турбулентным фазам поведения, а интервалы синхронного поведения – к ламинарным фазам.

Выяснено что, возникновение перемежаемости вблизи границы обобщенной синхронизации в системе (3) связано с асинхронным перескоком изображающих точек взаимодействующих систем на разные листы хаотических аттракторов связанных осцилляторов.

В работе [14] было установлено, что в режиме индуцированной шумом перемежаемости распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону

$$p(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), \quad (5)$$

где  $T$  – средняя длительность ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров, а зависимость средней длительности ламинарных

фаз от параметра надкритичности подчиняется экспоненциальной закономерности

$$T = K \exp(\alpha \varepsilon), \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  – параметр надкритичности (в данном случае параметр связи),  $K$  и  $\alpha$  – некоторые положительные константы. Можно предположить, что аналогичные закономерности будут иметь место вблизи границы обобщенной синхронизации в исследуемой системе.

На рисунке 7а приведены распределения длительностей ламинарных фаз, полученные численно для системы (3) при различных значениях параметра связи, а также их теоретические аппроксимации закономерностью (5) (параметры аппроксимаций указаны в подрисуночной подписи). Видно хорошее соответствие численно полученных данных и теоретических закономерностей.

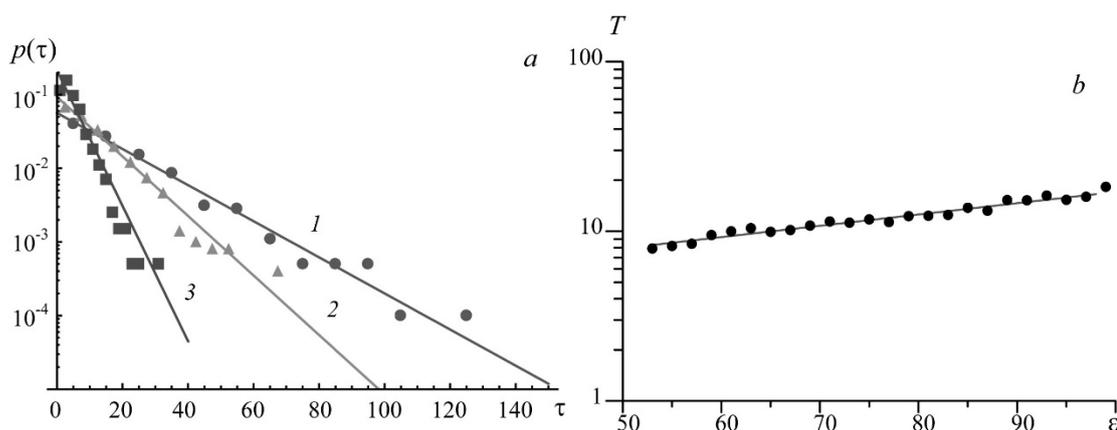


Рисунок 7 – Распределения длительностей ламинарных фаз (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз (b) от параметра связи  $\varepsilon$ . Параметры аппроксимации выбраны следующими: (а) 1 –  $\varepsilon = 100$ ,  $T = 17.72$ , 2 –  $\varepsilon = 70$ ,  $T = 10.75$ , 3 –  $\varepsilon = 50$ ,  $T = 4.73$ ; (b)  $K = 3.68$ ,  $\alpha = 0.0153$

Таким образом, в рассмотренном случае наблюдается хорошее соответствие данных теории и численного моделирования, что говорит о применимости теории индуцированной шумом перемежаемости для широкого

класса динамических систем, характеризующихся двулистной структурой хаотического аттрактора.

### **Заключение**

В ходе данной магистерской работы была изложена основная теория режима обобщенной синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных системах. Представлены такие методы диагностики режима обобщенной синхронизации как метод вспомогательной системы, метод расчета спектра показателей Ляпунова и метод ближайших соседей, описаны принципы их работы, а также преимущества и недостатки.

Далее в работе были рассмотрены две системы, характеризующиеся двумя положительными показателями Ляпунова: осциллятор Чена и отображение Эно. На основе этих систем сконструированы взаимно связанные осцилляторы Чена и взаимно связанные отображения Эно, причем связь между ними была подобрана таким образом, чтобы при увеличении параметра связи обе системы демонстрировали переход к режиму обобщенной синхронизации. Исследования обобщенной синхронизации в данных системах производилась с помощью расчета спектра показателей Ляпунова и метода фазовых трубок. В ходе работы была показана неработоспособность метода ближайших соседей в случае систем со сложной топологией аттрактора и, как следствие, необходимость использования метода фазовых трубок, который является модификацией метода ближайших соседей. Помимо этого в системе взаимно связанных отображений Эно было продемонстрировано наличие перемежающегося поведения.

В дальнейшем было подробно рассмотрено перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных осцилляторах Чена. Было выяснено, что возникновение перемежающегося поведения в данном случае обусловлено перескоком изображающих точек взаимодействующих систем на разные листы хаотических аттракторов связанных осцилляторов. Также были рассчитаны статистические

характеристики, из которых стало ясно, что средняя длительность ламинарных фаз и распределения длительности ламинарных фаз подчиняются экспоненциальным законам.

#### **Список использованных источников**

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация Фундаментальное нелинейное явление. Техносфера, 2003. 496 с.
2. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization of chaotic systems // *Chaos An Interdiscip. J. Nonlinear Sci.* 2015. Т. 25, № 9. С. 97611.
3. Rulkov N.F. и др. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Т. 51, № 2. С. 980–994.
4. Москаленко О.И., Ханадеев В.А., Короновский А.А. Метод диагностики обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией хаотического аттрактора // *Журнал технической физики.* 2018. Т. 44, № 19. С. 87–95.
5. Москаленко О.И., Короновский А.А., Ханадеев В.А. Перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора // *Журнал технической физики.* 2019. Т. 89, № 3. С. 338–341.
6. Ханадеев В.А. Обобщенная хаотическая синхронизация // *Представляем научные достижения миру. Естественные науки: материалы VII международной научной конференции молодых ученых «Presenting Academic Achievements to the world».* Саратов: Изд-во «Техно-Декор», 2017. С. 53–58.
7. Ханадеев В.А., Короновский А.А., Москаленко О.И. Обобщенная синхронизация в хаотических системах, характеризующихся двумя положительными показателями Ляпунова // *Нелинейные волны. XVIII*

- научная школа. Тезисы докладов молодых ученых., 2018. С. 198–200.
8. Ханадеев В.А., Короновский А.А., Москаленко О.И. Обобщенная синхронизации в системах с двумя положительными показателями ляпунова // «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: сборник трудов Н25 XIII Всерос. конф. молодых ученых. Саратов: Издательство “Техно-Декор”, 2018. С. 373–374.
  9. Ханадеев В.А., Москаленко О.И., Короновский А.А. Механизмы возникновения перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора // СБОРНИК ТРУДОВ XVII Всероссийской школы-семинара «Физика и применение микроволн» имени профессора А.П. Сухорукова секция 7 НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА. г. Можайск, Московская область, 2019. С. 30–32.
  10. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Inapplicability of an auxiliary-system approach to chaotic oscillators with mutual-type coupling and complex networks // Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 2013. T. 87. С. 064901.
  11. Chen Z. и др. A novel hyperchaos system only with one equilibrium // Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys. 2007. T. 360, № 6. С. 696–701.
  12. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization // Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 2011. T. 84. С. 037201.
  13. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // Нелинейная динам. 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
  14. Moskalenko O.I. и др. Characteristics of noise-induced intermittency // Chaos, Solitons and Fractals. 2018. T. 117. С. 269–275.