

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Моделирование популяционной динамики методами клеточных автоматов

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 241 группы

направления 03.04.03 Радиофизика

физического факультета

Александрова Юрия Сергеевича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор

А.В. Шабунин

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Саратов 2019

Введение

Темой научной работы является моделирование популяционной динамики методами клеточных автоматов.

Моделирование происходит по двум основным методам:

I) Метод среднего поля.

Следуя этому методу, строится система ОДУ, определяющая закон изменения особей каждого типа, с условием того, что все особи в популяции распределены равномерно и случайно вне зависимости от их типа.

II) Метод решёток клеточных автоматов (РКА)

Клеточный автомат - система с конечным числом состояний, переключения между которыми происходят дискретно во времени по заданному закону. [3]

Клеточные автоматы объединяются в решётки, которые обладают колебательными свойствами динамических систем. Данные свойства позволяют оценивать реальные системы с их сильной неоднородностью в распределение заражённых.

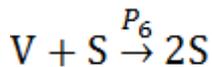
Предметом исследования работы является популяционная динамика.

Целью работы является разработка программного комплекса для проведения численных исследований модели SIRS методом вероятностного клеточного автомата, построение динамической модели SIRS и ее анализ, а также исследование динамики SIRS модели клеточного автомата и сопоставление ее с поведением динамической модели.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Исследуемая SIRS модель

Одним из вариантов для рассмотрения инфекционных заболеваний является модификация SIR модели под названием SIRS. Именно эта модель будет использоваться в дальнейшем в этой работе. Основное отличие этой модели в том, что в ней предполагается, что особи получившие иммунитет через некоторое время теряют его и возвращаются к здоровому состоянию, подверженному заражению.



где S,I,R,V – состояния особи, а $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ – вероятности перехода из одного состояния в другой, которые могут изменяться от 0 до 1.

Решётка клеточных автоматов

Клеточные автоматы в работе следуют следующим принципам: рассмотренные выше реакции SIRS модели моделируются при помощи квадратной решётки вероятностных клеточных автоматов, определяемой матрицей M размера NxN. Положение клетки автомата определяется с помощью индексов i(номер строки) и j(номер столбца). Каждая из этих клеток имеет граничащих с ними соседей. Для неграничных случаев число соседей составляет 4: (i,j+1),(i,j-1),(i+1,j),(i-1,j). На границах решётки число соседей сокращается до 3х на ребрах или 2х по углам. Каждая клетка может принимать одно из существующих состояний {S,I,R,V}, где состояния S,I,R – это типы

состояния особи, а V – вакантное состояние клетки, т.е. отсутствие в ней особи. Общее число клеток задаёт вместимость популяции L^2 . Клетки могут взаимодействовать друг с другом в дискретном времени $t=0,1,2,3,4\dots T$.

Перед началом взаимодействия решётке задаётся начальное состояние, т.е. все клетки решётки случайным образом в заданной концентрации принимают одно из состояний $\{S,I,R,V\}$. Состояние клетки меняется в соответствии с отображением последования:

$$M(t+1)=F(M(t)) \quad (3)$$

где F - функция, имитирующая реакции системы SIRS.

Для рассматриваемой SIRS модели взаимодействие происходит следующим образом: из решётки случайным образом выбирается клетка и в соответствии с её индексами и индексами её соседей происходят следующие преобразования:

- 1) Если состояние выбранной клетки равно S , а состояние случайно выбранного соседа равно I , то исходная клетка преобразовывается в состояние I с вероятностью $P1$.
- 2) Если состояние выбранной клетки равно I , то исходная клетка преобразовывается в состояние R с вероятностью $P2$.
- 3) Если состояние выбранной клетки равно R , то исходная клетка преобразовывается в состояние S с вероятностью $P3$.

Эти преобразования описывают SIRS модель. Также в следующих преобразованиях учитываются процессы рождения и смерти:

- 1) Если состояние выбранной клетки равно S или R , то исходная клетка преобразовывается в состояние V с вероятностью $P4$.
- 2) Если состояние выбранной клетки равно I , то исходная клетка преобразовывается в состояние V с вероятностью $P4+P5$.
- 3) Если состояние выбранной клетки равно V , а состояние случайно выбранного соседа равно S , то исходная клетка преобразовывается в состояние S с вероятностью $P6$.

Данные преобразования выполняются L^2 раз на каждом шаге дискретного времени t , вычисляя значения элементов решётки на следующем шаге $t+1$.

Полученная матрица $M(t)$ – временная эволюция решётки клеточных автоматов. Так как отображение (3) не детерминировано, эта эволюция является случайным процессом. Но при $L \rightarrow \infty$ средние концентрации состояний решётки будут представлять собой детерминированные значения, подобно переменным динамической системы.

Исследование модели методом среднего поля

Моделирование методом среднего поля без учёта влияния на систему процессов рождаемости и смерти.

Выразим систему ОДУ, описывающую изменение численности особей различного типа (S,I,R). Для этого необходимо, пользуясь системой (1) записать изменение величин $(\Delta S, \Delta I, \Delta R)$ за Δt :

$$\begin{aligned}\Delta S &= -\frac{S}{N} \frac{I}{N} N P_1 \Delta t + \frac{R}{N} N P_3 \Delta t \\ \Delta I &= \frac{S}{N} \frac{I}{N} P_1 N \Delta t - P_2 \frac{I}{N} N \Delta t \\ \Delta R &= P_2 \frac{I}{N} N \Delta t - P_3 \frac{R}{N} N \Delta t\end{aligned}\tag{4}$$

Для удобства заменим $\frac{S}{N}, \frac{I}{N}, \frac{R}{N}$ на s, i, r , где s, i, r – концентрации, которые могут изменяться в пределах от 0 до 1. Затем поделим (4) на $N \Delta t$ и получим:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S}{N \Delta t} &= -s i P_1 + r P_3 \\ \frac{\Delta I}{N \Delta t} &= s i P_1 - i P_2 \\ \frac{\Delta R}{N \Delta t} &= i P_2 - r P_3\end{aligned}\tag{5}$$

Получается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -s i P_1 + r P_3 \\ \dot{i} &= s i P_1 - i P_2 \\ \dot{r} &= i P_2 - r P_3\end{aligned}\tag{6}$$

Пусть c – суммарная концентрация $s, i, r (c=s+i+r=1=const)$, тогда можно сократить число уравнений с 3х до 2х, выразив одну из концентраций через c :

$$\dot{s} = -siP_1 + P_3(c - s - i)$$

$$\dot{i} = siP_1 - iP_2 \tag{7}$$

В итоге получилась систему дифференциальных уравнений (8), которая описывает изменение концентрации со временем. Эту систему можно использовать для исследования процессов без учёта неоднородности и хаотичности.

Моделирование методом среднего поля с учётом влияния на систему процессов рождаемости и смерти.

Используем систему (1) для рассмотрения влияния на систему процессов рождаемости и смерти.

Найдём систему ОДУ:

$$\dot{s} = -siP_1 + rP_3 - sP_4 + s(1 - s - i - r)P_6$$

$$\dot{i} = siP_1 - iP_2 - i(P_4 + P_5) \tag{9}$$

$$\dot{r} = iP_2 - rP_3 - rP_4$$

После численного интегрирования полученной системы, был построен график (рис.3), из которого видно, что при вводе в систему параметров смертности и рождаемости в системе появляется новый режим: затухающие колебания. Из-за того, что данная система построена методом среднего поля, т.е. предполагая, что все особи распределены равномерно и случайно вне зависимости от их типа, колебания в этой системе затухающие, а фазовый портрет представляет собой устойчивый фокус, так как не учитывают неоднородность в распределении особей.

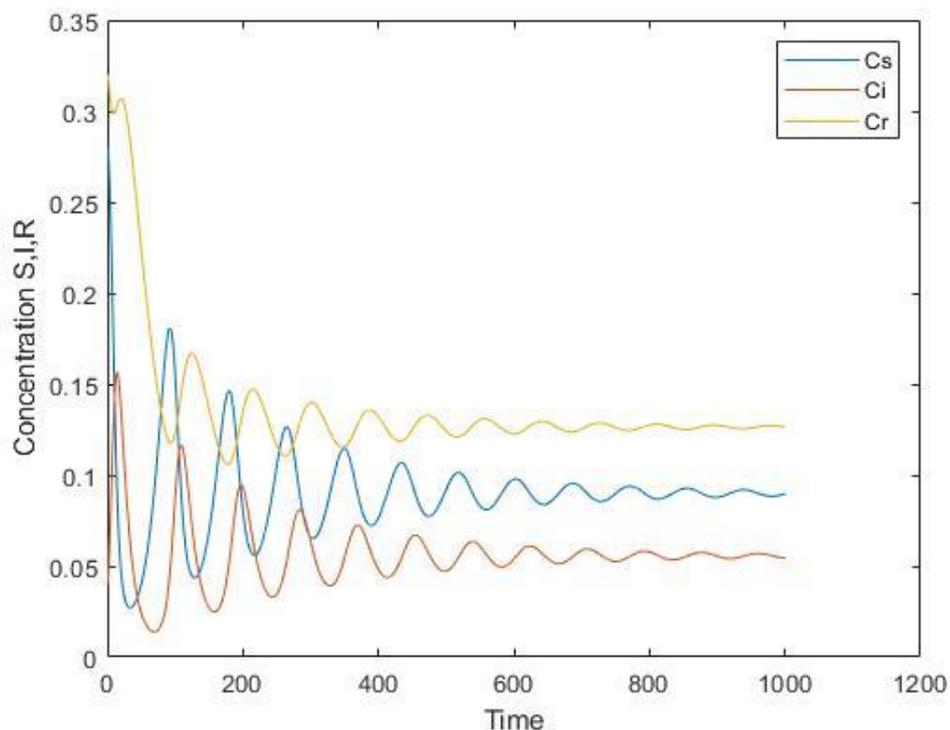


Рисунок 3. Затухающие колебания при $P_1=1, P_2=0.05, P_3=0.002, P_4=0.02, P_5=0.02, P_6=0.1$.

Исследование модели методом клеточных автоматов

На языке Си была разработана программа, которая моделирует популяционную динамику инфекционных заболеваний методом клеточных автоматов. Моделируемая модель усложнялась постепенно: сначала была построена и проанализирована модель без учёта смертности и рождаемости, затем эти параметры были учтены.

3.2.1. Моделирование методом клеточных автоматов без учёта влияния на систему процессов рождаемости и смерти.

В разработанной программе создаётся решётка клеточных автоматов размером $N \times N$, заполненная S и I типами объектов. Далее эти объекты начинают взаимодействовать друг с другом по законам, указанным в системе (1).

Объекты взаимодействуют между собой по определённой схеме в течение заданного времени, после этого подсчитываются общее количество всех типов. По полученным данным находятся концентрации и строятся зависимости концентрации от времени (рис.4).

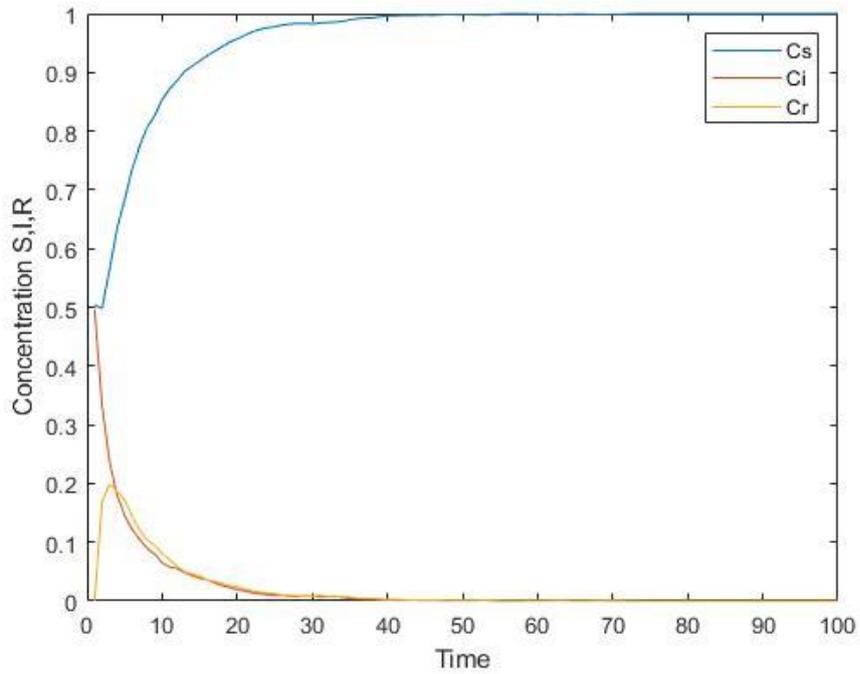


Рисунок 4. Режим полного выздоровления при значении параметров $P_1=0.5$, $P_2=0.5$, $P_3=0.2$.

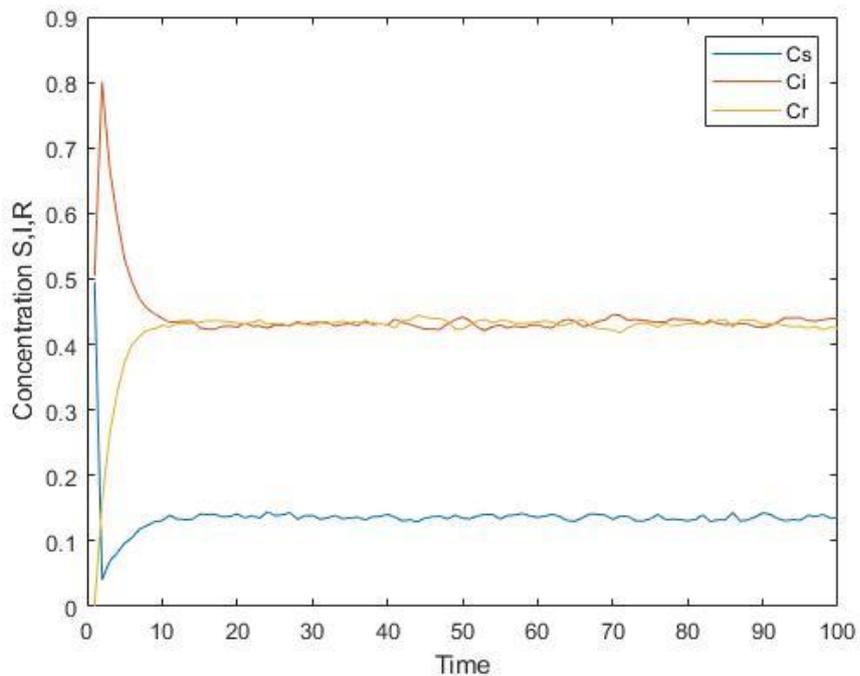


Рисунок 5. Режим выхода на ненулевое значение при значении параметров $P_1=0.9$, $P_2=0.2$, $P_3=0.2$.

Из полученных графиков видно, что концентрации со временем стремятся к какому то определённом значению. Существует два основных состояния - это полное выздоровление всех объектов (рис.5), т.е. концентрация I стремится к нулю, а концентрация S стремится к максимуму, а второе состояние – выход концентраций S и I на какие то ненулевые значения (рис.5).

Эти данные подтверждают результаты, полученные с помощью метода средних полей.

3.2.2. Моделирование методом клеточных автоматов с учётом влияния на систему процессов рождаемости и смерти

Для учёта смертности и рождаемости модифицируем систему (1). Для этого добавим в рассматриваемую систему ещё одну систему (2). Главной особенностью системы с учётом рождаемости и смертности является в ней наличие незатухающих самоподдерживающихся колебаний (рис.6).

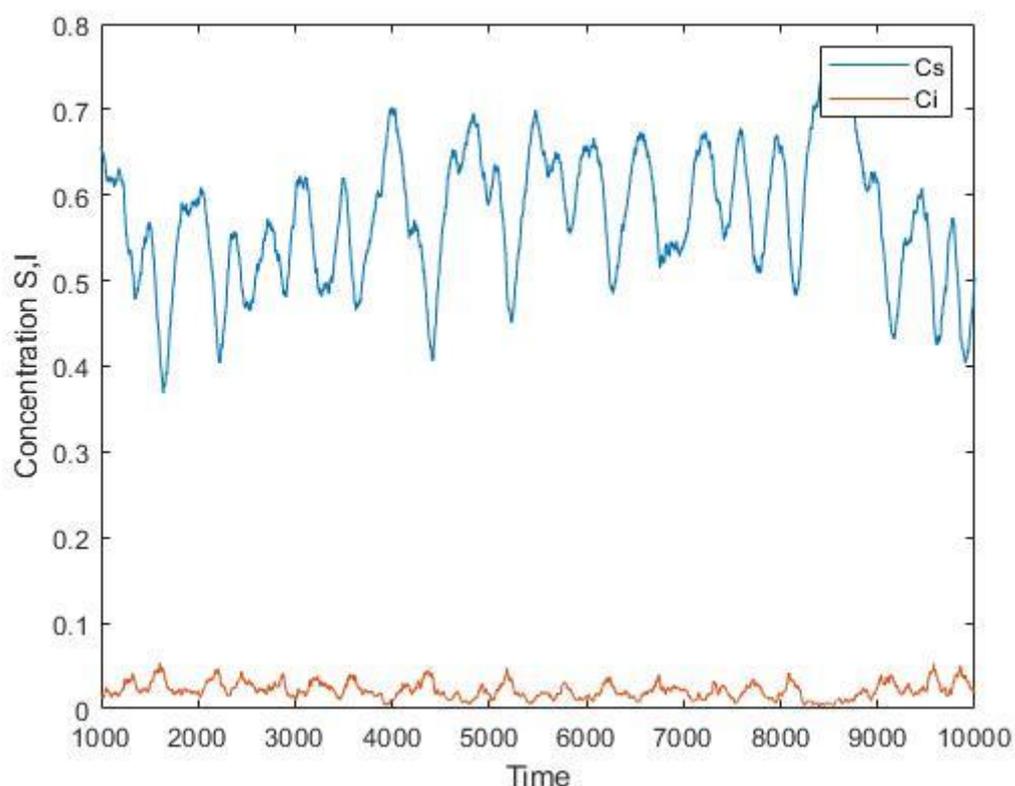


Рисунок 6. Самоподдерживающиеся колебания при $P_1=1, P_2=0.05, P_3=0.002, P_4=0.02, P_5=0.02, P_6=0.1$.

Из графика видно, что колебания подвержены зашумлению. Это можно объяснить тем, что исследование проводится методом вероятностных клеточных автоматов, а значит, в системе всегда будут присутствовать флуктуации.

3.2.3. Области параметров системы, при которых наблюдаются колебательные процессы.

При изменении параметров системы можно найти область, в которой возникают колебания. Исследуем систему (1) с учётом (2) на предмет наличия колебаний. Исследование велось при фиксированных параметрах системы: $P_1=1$, $P_2=0.05$, $P_3=0.002$, $P_4=0.02$, $P_5=0.02$, $P_6=0.1$. Учитывая суммарную концентрацию, параметр P_3 был строго зафиксирован и не был учтён в исследовании. Параметр P_3 был выбран так, как он оказывает наименьшее влияние на область колебаний.

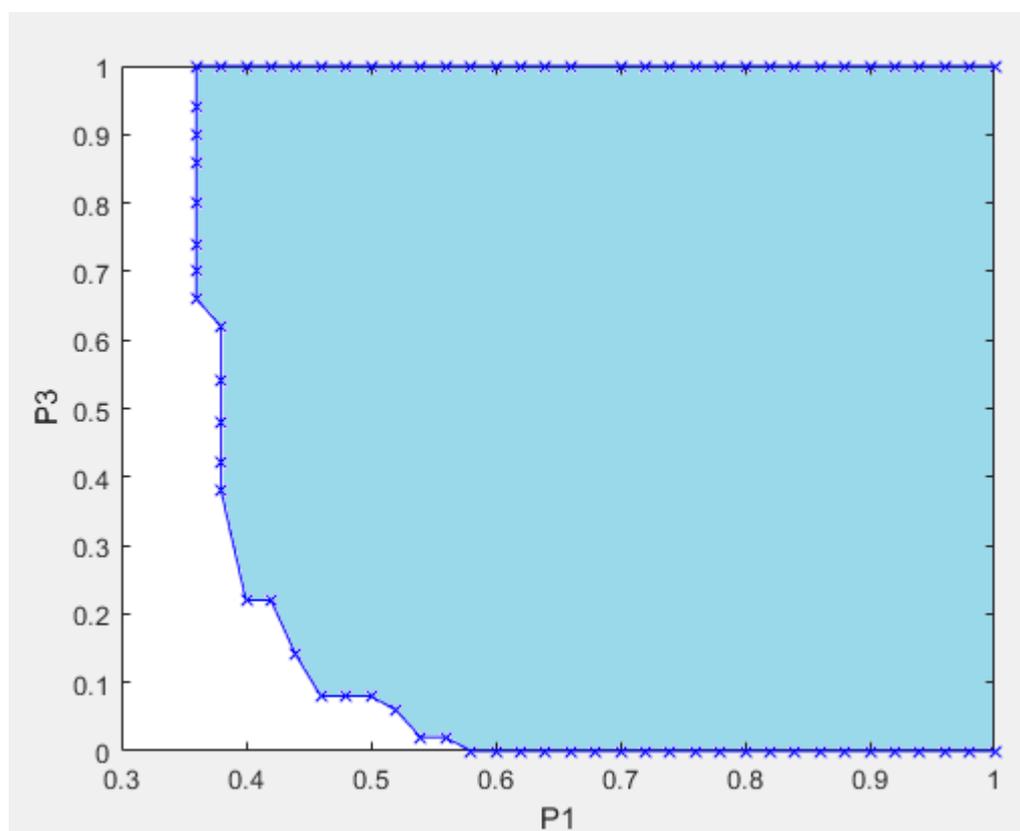


Рисунок 7. Область параметров P_1P_3 , при которых наблюдаются колебания.

На рисунке 7 граница параметров P_1P_3 близка к гиперболической. Сам рисунок приведён в пример того, что параметр P_3 оказывает наименьшее влияние на систему, так как колебания существуют на всей протяжённости параметра от 0 до 1. Значение параметра P_1 колеблется от 0.38 до 1.

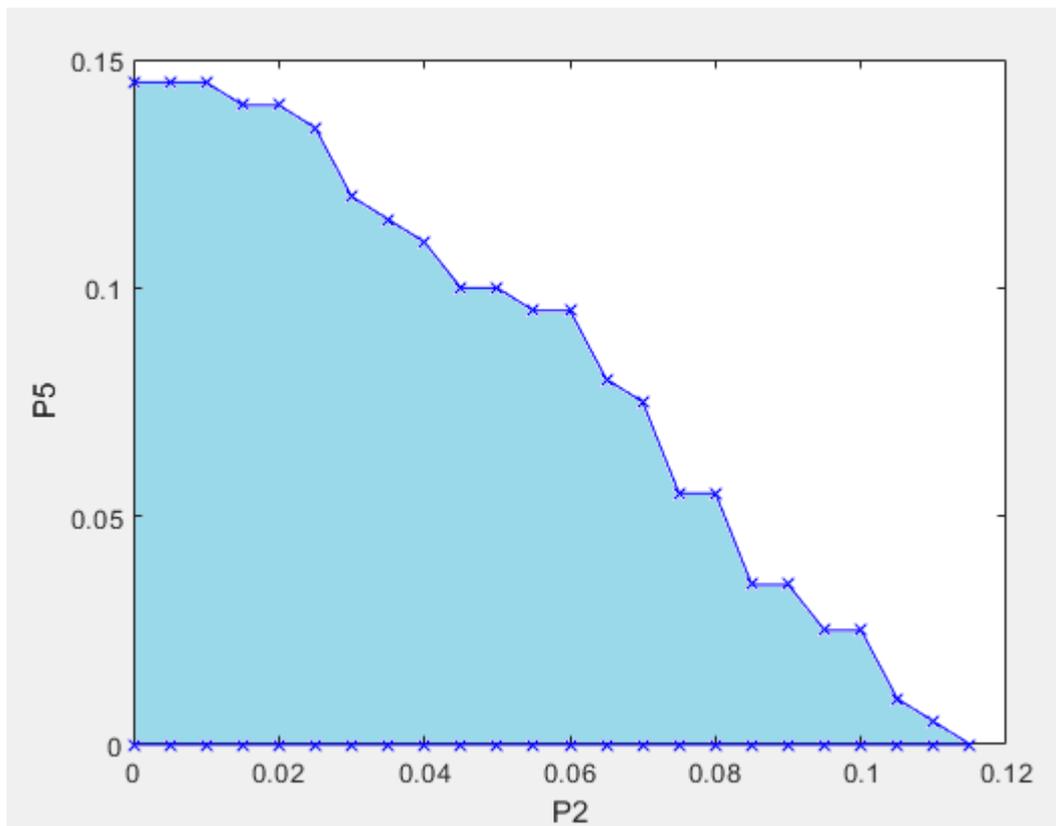


Рисунок 8. Область параметров P_2P_5 , при которых наблюдаются колебания.

На рисунке 8 граница, как и в большинстве случаев, близка к линейной.

Значение параметра P_2 колеблется от 0 до 0.11, а значение параметра P_5 0 до 0.14.

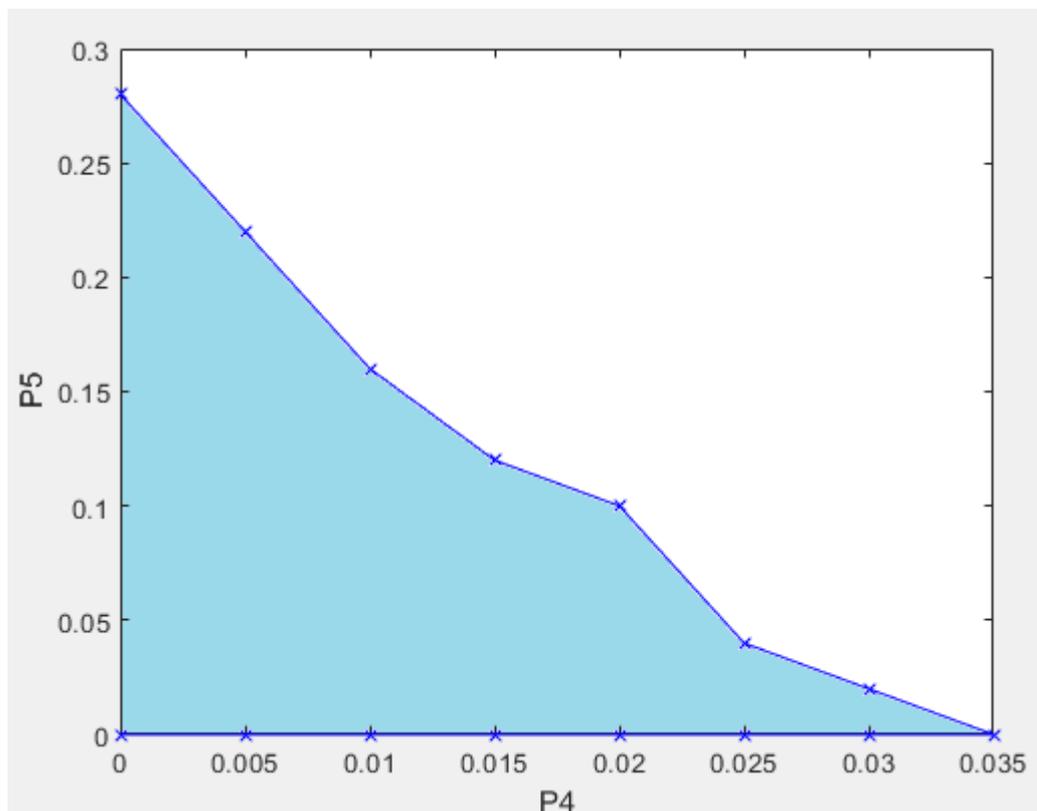


Рисунок 9. Область параметров P_4P_5 , при которых наблюдаются колебания.

3.3 Сравнение метода среднего поля и решётки клеточных автоматов.

3.3.1. Сравнение методов без учёта влияния на систему процессов рождаемости и смерти

Результаты, полученные обоими методами, объединены на одном графике (рис.10). Для исследования был выбран режим выхода на ненулевое значение, так как он более точно может отразить схожесть и различие двух методов.

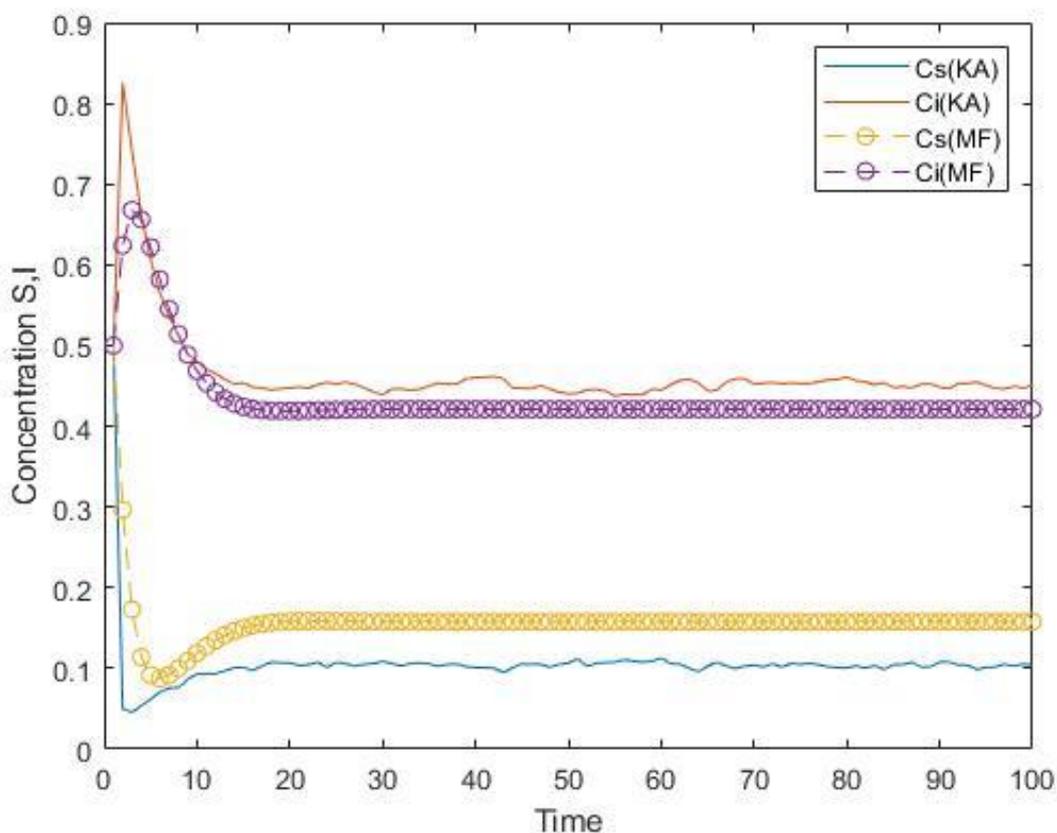


Рисунок 10 Сравнительный график, без учёта смертности и рождаемости, где КА- решётка клеточных автоматов, а MF- метод среднего поля.

Проанализировав этот график, можно сделать вывод, что качественного различия между двумя используемыми методами нет. Но всё же видны отличия по значению концентраций между ними, которые объясняются тем, что

решётка клеточных автоматов учитывает неоднородность в распределении особей в популяции, поэтому её кривая шероховатая и имеет малые флуктуации.

3.3.2. Сравнение методов с учётом влияния на систему процессов рождаемости и смерти

Для данного сравнения был выбран колебательный режим. Результаты исследования приведены на рис.11.

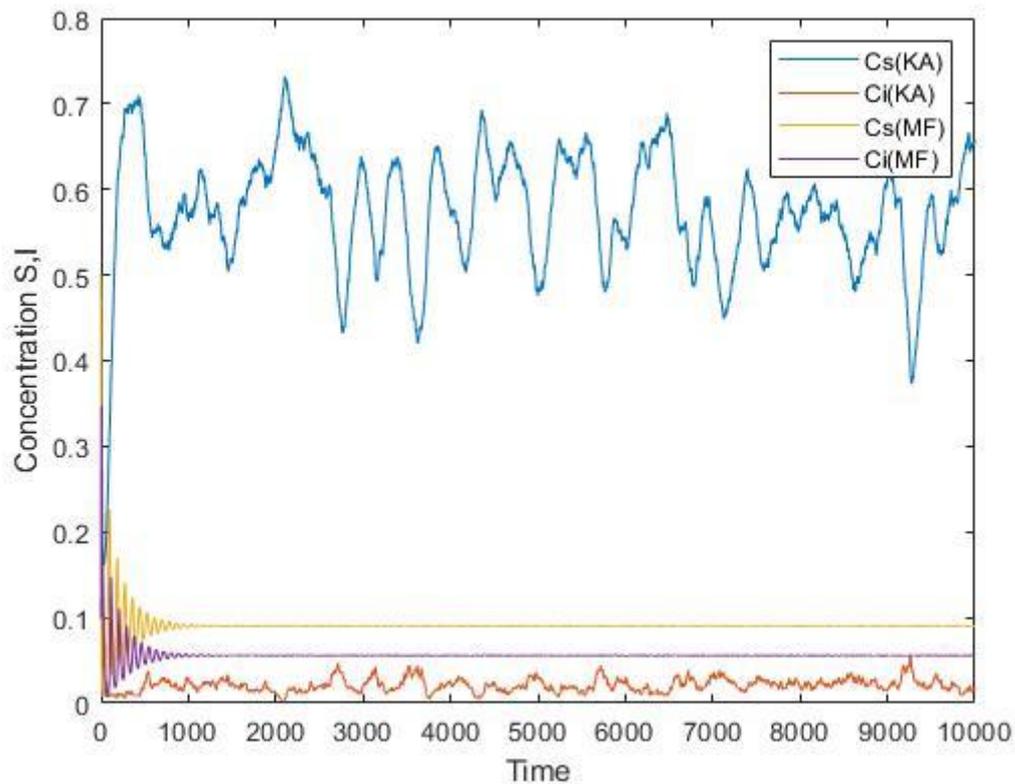


Рисунок 11 Сравнительный график, с учётом смертности и рождаемости, где КА- решётка клеточных автоматов, а MF- метод среднего поля.

Из этого графика чётко видно, что данные полученные разными методами абсолютно различны. Это подтверждает утверждение о том, что метод среднего поля в отличие от решётки клеточных автоматов не учитывает неоднородность популяции.

Заключение

В ходе работы необходимо было разработать программный комплекс для проведения численных исследований модели SIRS методом вероятностного клеточного автомата, построить динамическую модель SIRS и проанализировать её, а также исследовать динамику SIRS модели клеточного автомата и сопоставить ее с поведением динамической модели.

В результате работы были произведены исследования модели SIRS двумя методами: методом среднего поля и решёткой клеточных автоматов.

Проведённые численные расчёты были обоснованы и подтверждены с помощью численного интегрирования исследуемой системы. Доказано, что исследуемая модель имеет два состояния равновесия, если в ней не учтены процессы рождаемости и смертности, и третье состояние равновесия при добавлении этих параметров. Также было показано, что третье состояние равновесия отличается при расчётах методом среднего поля и методом клеточных автоматов. В одном случае это затухающие колебания, а в другом – самоподдерживающиеся колебания. Такие результаты получены, благодаря тому, что метод клеточных автоматов учитывает неоднородность распределения особей в популяции.

Результаты сравнения доказывают, что метод среднего поля не позволяет получить качественные реализации SIRS модели, если в системе учтена рождаемость и смертность.

Также с помощью решётки клеточных автоматов были найдены области параметров, в которых существуют колебательные процессы, возникающие под воздействием процессов смертности и рождаемости.