

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Физический факультет

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

«Синхронизация пространственных структур в многослойной сети  
взаимодействующих колец из нелокально связанных бистабильных  
отображений»

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 2 курса 241 группы

направления 03.04.03 «Радиофизика»

физического факультета

**Калиничева Александра Александровича**

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

В.С. Анищенко

Саратов – 2019

## Актуальность темы исследования

Исследование нелинейных сред и распределенных систем остается на сегодняшний день одним из актуальных направлений в нелинейной динамике. Важной является проблема формирования сложных пространственных структур, которой посвящен ряд монографий<sup>1,2,3,4</sup>. Образование пространственных структур является следствием синергетических явлений, связанных с эффектами синхронизации определенных групп взаимодействующих парциальных подсистем (элементов) распределенной системы. Важную роль в образовании структур играют как свойства взаимодействующих элементов, так и вид взаимодействия между элементами.

В последние годы был обнаружен и исследован новый тип структур в ансамблях активных элементов, получивший название химер<sup>5,6,7,8</sup>. Главной отличительной чертой химерных структур является наличие в ансамбле из идентичных элементов групп (кластеров) осцилляторов с качественно различным поведением. Осцилляторы, состояния которых близки к синфазной синхронизации, составляют когерентные кластеры, в то время как осцилляторы с нерегулярно распределенными состояниями образуют некогерентные кластеры. Интерес к химерным состояниям, вызван, с одной

---

<sup>1</sup> S. Mikhailov, A. Loskutov, *Foundation of synergetics. Complex patterns.* -- Springer, Berlin, 1995.

<sup>2</sup> V.I. Nekorkin, M.G. Velarde, *Synergetic phenomena in active lattices.* -- Springer, Berlin, 2002.

<sup>3</sup> G.V. Osipov, J. Kurths, Ch. Zhou, *Synchronization in oscillatory networks.* -- Springer, Berlin, 2007.

<sup>4</sup> А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, *Основы теории сложных систем.* – Москва-Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2007

<sup>5</sup> Y. Kuramoto, D. Battogtokh, Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonl. Phenom. Complex Syst.* 2002. Vol.4, P.380--385.

<sup>6</sup> D.M. Abrams, S.H. Strogatz, Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev.Lett.* 2004. Vol.93, 174102.

<sup>7</sup> M.J. Panaggio, D.M. Abrams, Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity.* 2015. Vol.28, R67.

<sup>8</sup> S.A. Bogomolov, A.V. Slepnev, G.I. Strelkova, E. Schöll, V.S. Anishchenko, Mechanisms of Appearance of Amplitude and Phase Chimera States in a Ring of Nonlocally Coupled Chaotic Systems // *Comm. in Nonl. Sci. and Numer. Sim.* 2017. Vol.43, P. 25—36.

стороны, их типичностью для широкого класса нелинейных ансамблей с нелокальными связями, а с другой, важной ролью подобных моделей при математическом моделировании реальных многокомпонентных систем и протекающих в них процессов в таких областях, как биофизика, нейродинамика, экология, социология, компьютерные и энергетические сети. Возникновение химерных состояний во многих реальных системах вполне возможно, тем более, что химеры обнаружены не только при численном моделировании, но и в физических экспериментах.

Для бистабильных сред и ансамблей бистабильных элементов характерно образование пространственных структур, как регулярных, так и неупорядоченных<sup>1,2</sup>. Химерные структуры в ансамблях осцилляторов и отображений с нелокальным взаимодействием, образование которых непосредственно связано с бистабильным поведением элементов, были исследованы в работах<sup>9,10</sup>. Было показано, что бистабильность при нелокальном характере взаимодействия ведет к образованию химерных структур особого типа, которые были нами названы двухъямными химерными структурами.

Очевидно, что синхронизация сложных пространственных структур может иметь место не только при взаимодействии двух или трех ансамблей, но и в случае многослойных сетей. Вынужденная синхронизация множества слоев в химерном состоянии была проиллюстрирована в работе<sup>11</sup> для однородной многослойной сети однонаправленно связанных ансамблей, каждый из которых представляет собой кольцо нелокально связанных идентичных

---

<sup>9</sup> I. A. Shepelev, A. V. Bukh, G. I. Strelkova, T. E. Vadivasova, V. S. Anishchenko, Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics// *Nonlinear Dyn.* 2017. Vol. 90(4). P.2317–2330

<sup>10</sup> I.A. Shepelev, A.V. Bukh, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, A. Zakharova// *Double-well chimeras in 2D lattice of chaotic bistable element* // *CNSNS*. 2018. Vol.54. pp.50–61.

<sup>11</sup> G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, V. S. Anishchenko, Synchronization of Chimera States in a Network of Many Unidirectionally Coupled Layers of Discrete Maps //, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2018, Vol. 23, №.7–8, pp. 948–960.

хаотических отображений. В работе<sup>12</sup> было проведено исследование влияния неоднородностей и обратной связи (влияния последующих слоев на предыдущие) на вынужденную синхронизацию многослойной сети логистических отображений в заданном химерном состоянии, устанавливаемом в первом (задающем) слое. Было установлено, что при условии слабой неоднородности (порядка 0.001–0.010 в относительных единицах) и слабой обратной связи эффективная вынужденная синхронизация позволяет передать задающую структуру во все слои сети с минимальными изменениями.

В то же время, несмотря на проведенные в отмеченных работах исследования эффекта синхронизации химерных состояний во взаимодействующих ансамблях и многослойных сетях, остается ряд неисследованных вопросов. К ним можно отнести вопрос о зависимости порога синхронизации от конкретного вида пространственных структур во взаимодействующих слоях, вопрос о сходимости границ области вынужденной синхронизации на плоскости управляющих параметров с увеличением номера слоя и ряд других проблем. С учетом вышесказанного была сформулирована следующая цель выпускной квалификационной работы.

Цель выпускной квалификационной работы состоит в исследовании пространственно-временного поведения многослойной сети нелокально-связанных бистабильных систем при локальном однонаправленном взаимодействии слоев, изучении явления вынужденной синхронизации многослойного ансамбля и анализе возможности передачи некоторой выбранной сложной пространственной структуры в мультиплексном ансамбле элементов с нелокальными связями от одного слоя к другому. Планируется изучить зависимость порога вынужденной

---

<sup>12</sup> E. V. Rybalova , T. E. Vadivasova , G. I. Strelkova, V. S. Anishchenko, and A. S. Zakharova, Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode // Chaos. 2019. Vol.29. P. 033134 (1-9).

синхронизации от степени различия и характера структур во взаимодействующих слоях, установить условия передачи заданной химерной структуры с минимальными искажениями в мультиплексной сети, включающей 100 слоев, определить границы области вынужденной синхронизации на плоскости выбранных параметров в различных слоях сети.

## Краткое содержание работы

Выпускная квалификационная работа (ВКР) состоит из введения, трех глав, выводов, списка литературы и приложений.

Во **Введении** обсуждается актуальность проблематики исследования, дается краткий обзор научной литературы по теме ВКР, формулируется цель и задачи проводимых исследований.

**В первой главе** описывается исследуемая многослойная сеть и методы проведения численных экспериментов.

Исследуемая модель представляет собой мультиплексную сеть, состоящую из колец бистабильных кубических отображений. Сеть описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
 x_{j1}(n+1) &= f(x_{j1}(n), \alpha_1) + \frac{\sigma_1}{2P_1} \sum_{k=j-P_1}^{j+P_1} [f(x_{k1}(n), \alpha_1) - f(x_{j1}(n), \alpha_1)], \\
 x_{ji}(n+1) &= f(x_{ji}(n), \alpha_i) + \frac{\sigma_i}{2P_i} \sum_{k=j-P_i}^{j+P_i} [f(x_{ki}(n), \alpha_i) - f(x_{ji}(n), \alpha_i)] + \\
 &+ \gamma_{i-1} [f(x_{j,i-1}(n), \alpha_{i-1}) - f(x_{ji}(n), \alpha_i)], \\
 j &= 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad x_{j \pm Ni}(n) = x_{ji}(n).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $j$  – номер элемента в слое (кольце),  $i$  – номер слоя,  $n$  – дискретное время (номер итерации отображения). Ансамбль состоит из  $M$  слоев, каждый из которых содержит  $N$  элементов. Каждый слой представляет собой кольцо элементов с нелокальной связью, которая характеризуется коэффициентом связи  $\sigma_i$  (для  $i$ -го слоя) и числом соседей  $P_i$  с каждой стороны. Степень нелокальности взаимодействия элементов  $i$ -го слоя характеризуется радиусом связи  $r_i = P_i/N$ . Элементы соседних слоев локально связаны однонаправленными связями: элементы первого слоя (кольца) воздействуют

на элементы второго слоя с соответствующими номерами, элементы второго слоя воздействуют на элементы третьего слоя, и.т.д. Сила связи  $i$ -го и  $i+1$ -го слоя характеризуется коэффициентом  $\gamma$ . Функция  $f(x(n), \alpha) = (\alpha - x^3(n)) \exp(-x^2(n)/10)$  описывает динамику отдельного элемента, где  $\alpha$  - управляющий параметр.

Методом исследования сети (1) является компьютерное моделирование, основанное на итерировании отображений и обработке полученных данных.

В работе рассчитываются мгновенные пространственные профили выбранных слоев, колебания во времени выбранных элементов, средний квадрат отклонения структуры  $i$ -го слоя от структуры первого (задающего) слоя

$$\delta_i = \left\langle (x_{ji}(n) - x_{j1}(n))^2 \right\rangle_{j,v} = \frac{1}{v} \sum_{n=1}^v \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_{ji}(n) - x_{j1}(n))^2, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

Здесь  $\langle \dots \rangle_{j,v}$  -- усреднение по  $N$  элементам слоя и по времени на  $v$  итерациях. Значение  $\delta_i$  характеризует ошибку воспроизведения задающей структуры в  $i$ -ом слое (степень синхронизации структуры).

**Во второй главе** работы исследуется эффект вынужденной синхронизации в сети, состоящей из двух слоев. Первый слой является управляющим и в нем реализуется двухъямная химера. Были рассмотрены две различные химерные структуры в первом слое. Эти химерные состояния, названные А и В, проиллюстрированы на рис.1. Химерные структуры А и В воздействовали на различные структуры во втором слое в случае идентичных слоев и при различных радиусах связи в слоях. С ростом параметра однонаправленной связи  $\gamma$  во всех рассмотренных случаях наблюдался определенный эффект повторения задающей структуры во втором слое. В случае идентичных слоев повторение является строгим (рис.2.а), в случае неидентичных слоев – приближенным (рис.2,б,в).

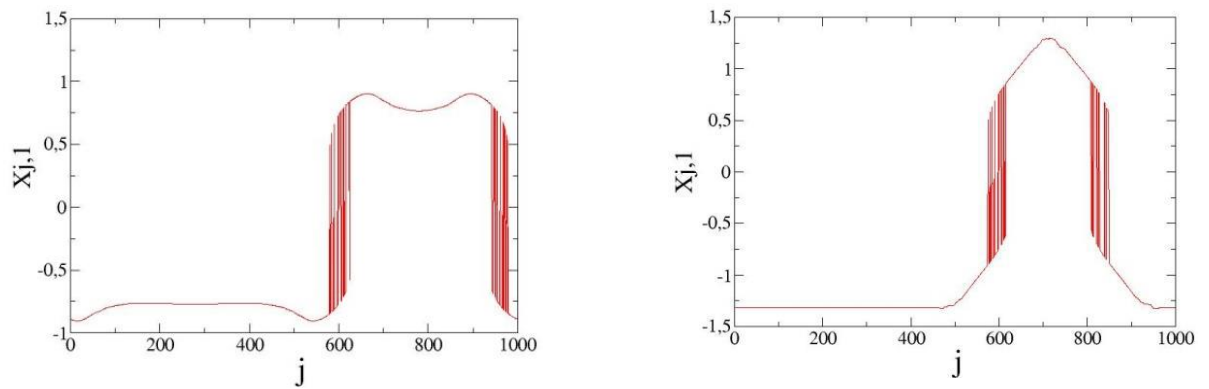


Рисунок 1. Иллюстрация мгновенных пространственных профилей химерных состояний А (а) и В (б), устанавливающихся в первом (задающем) слое при  $\alpha_1 = 2.4$ ,  $\sigma_1 = 0.42$ ,  $r_1 = 0.1$  и разных начальных условиях. Слева приведен мгновенный пространственный профиль, справа -- колебания во времени первого элемента  $x_{11}(n)$

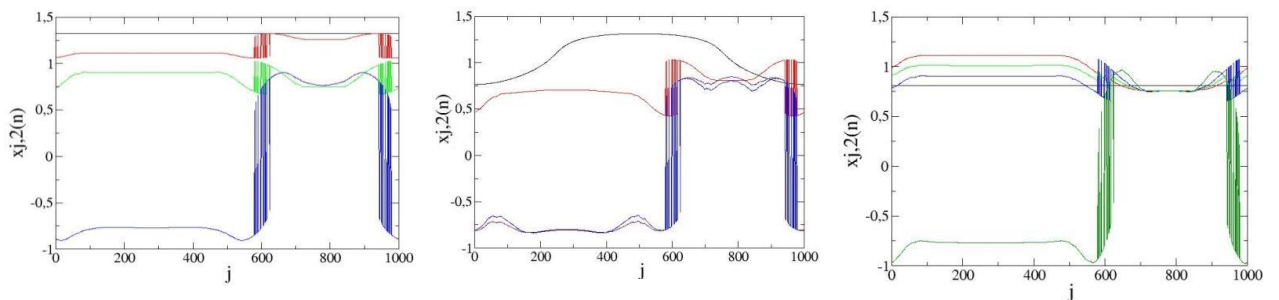


Рисунок 2. Эволюция мгновенных пространственных профилей во втором слое при воздействии структуры А. Различные кривые на фрагментах соответствуют различной силе однонаправленной связи  $\gamma$

Были построены зависимости величины  $\delta_2$  от  $\gamma$  при фиксированных начальных условиях во втором слое и различных значениях  $r_2$  и различных взаимодействующих структур и определены пороги синхронизации структур в соответствии с критерием  $\delta_2 < 0.01$ .

Было установлено, что взаимодействие различных структур характеризуется различным порогом синхронизации, даже в случае одинаковых значений параметров соответствующих колец. Так для

идентичных колец ( $r_2 = r_1 = 0.1$ ) при воздействии химерной структуры А порог синхронизации достигается при  $\gamma_n = 0.225000$ , а при воздействии химеры В эффективная синхронизация наступает при  $\gamma_n = 0.235000$ . Далее, в силу идентичности слоев, в обоих случаях наблюдается строгая синхронизация ( $\delta_2 = 0$ ). При  $r_2 \neq r_1$  синхронизация может быть только нестрогой ( $\delta_2 \neq 0$ ). В случае  $r_1 = 0.1, r_2 = 0.2$  синхронизация в соответствии с ds,hfyusv критерием не наблюдается, так как величина  $\delta_2$  с ростом  $\gamma$  не достигает порогового значения. В случае  $r_1 = 0.1, r_2 = 0.05$  синхронизация имеет место для обоих воздействий. При воздействии А  $\gamma_n = 0.245000$ , а при воздействии В -  $\gamma_n = 0.240000$ . Эти значения немного больше, чем для случая идентичных слоев и различаются между собой, хотя и незначительно.

**В третьей главе** работы исследуется вынужденная синхронизация сети (1), состоящей из 100 слоев. В качестве задающей структуры в этом случае была выбрана химера В.

Были рассмотрены случаи синхронизации с двумя различным распределением начальных состояний в слоях с номерами  $i = 2, 3, \dots, 100$ . Примеры эволюции мгновенных состояний сети с ростом параметра связи приведены на рис.3 и рис.4.

Строились зависимости величины  $\delta_i$  в различных слоях от радиуса связи  $r_2$  при фиксированном радиусе первого слоя  $r_1 = 0.1$  и различных значениях  $\gamma$ . По полученным зависимостям определялись границы областей синхронизации различных слоев в соответствии с выбранным критерием  $\delta_2 < 0.01$ . Результаты приведены на рис.5.



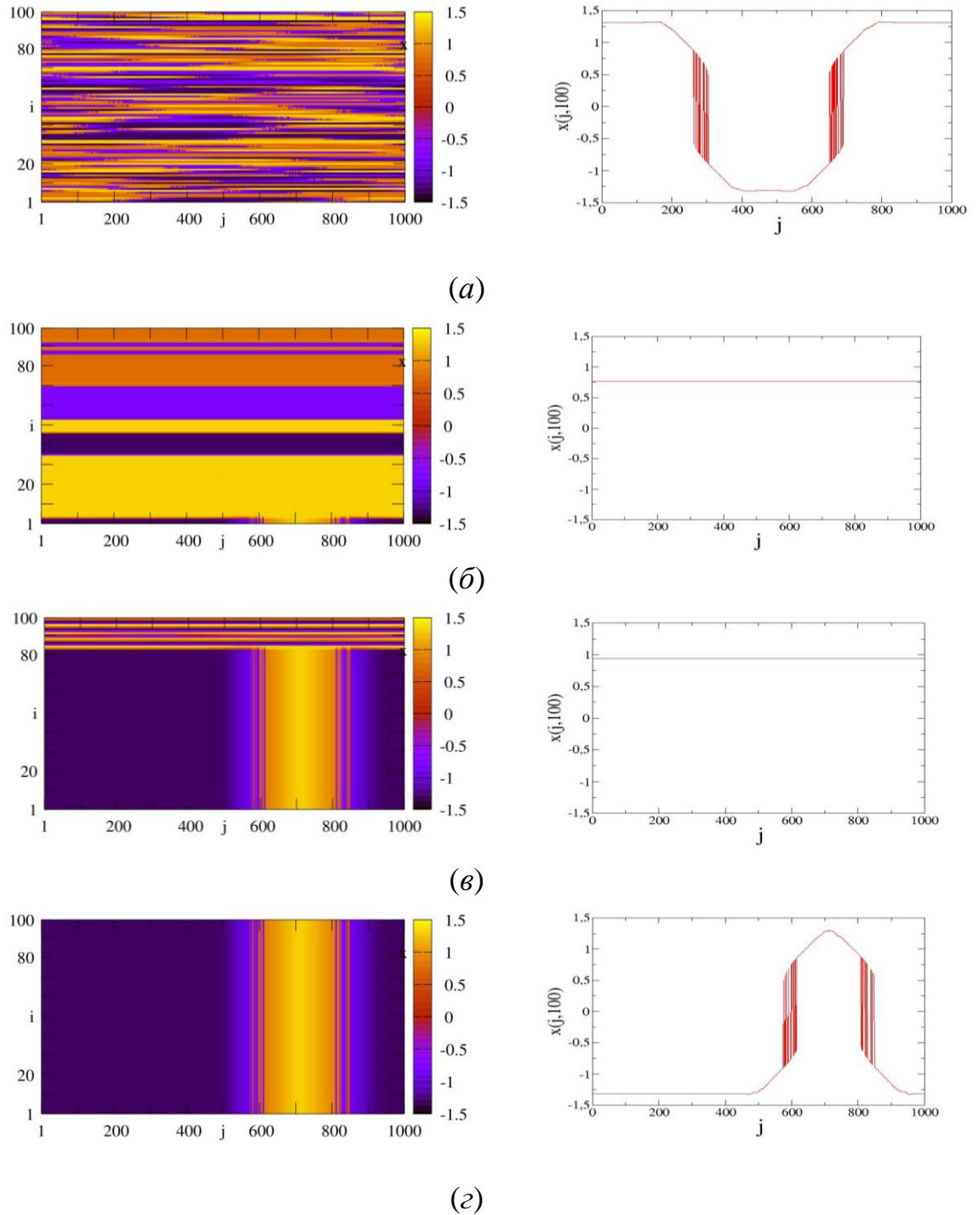


Рисунок 3. Эволюция пространственной структуры в ансамбле (1) из 100 идентичных слоев с ростом коэффициента связи. Слева приведены мгновенные пространственные диаграммы, а справа мгновенные пространственные профили в последнем слое при различных значениях  $\gamma$ :  $\gamma = 0.0$  (a);  $\gamma = 0.251$  (б);  $\gamma = 0.2513$  (в);  $\gamma = 0.4$  (г). Параметры:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2.4$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$ ;  $r_1 = r_2 = 0.1$ . Время установления структур без связи  $n_0 = 20000$ , время расчета воздействия  $n_1 = 20000$

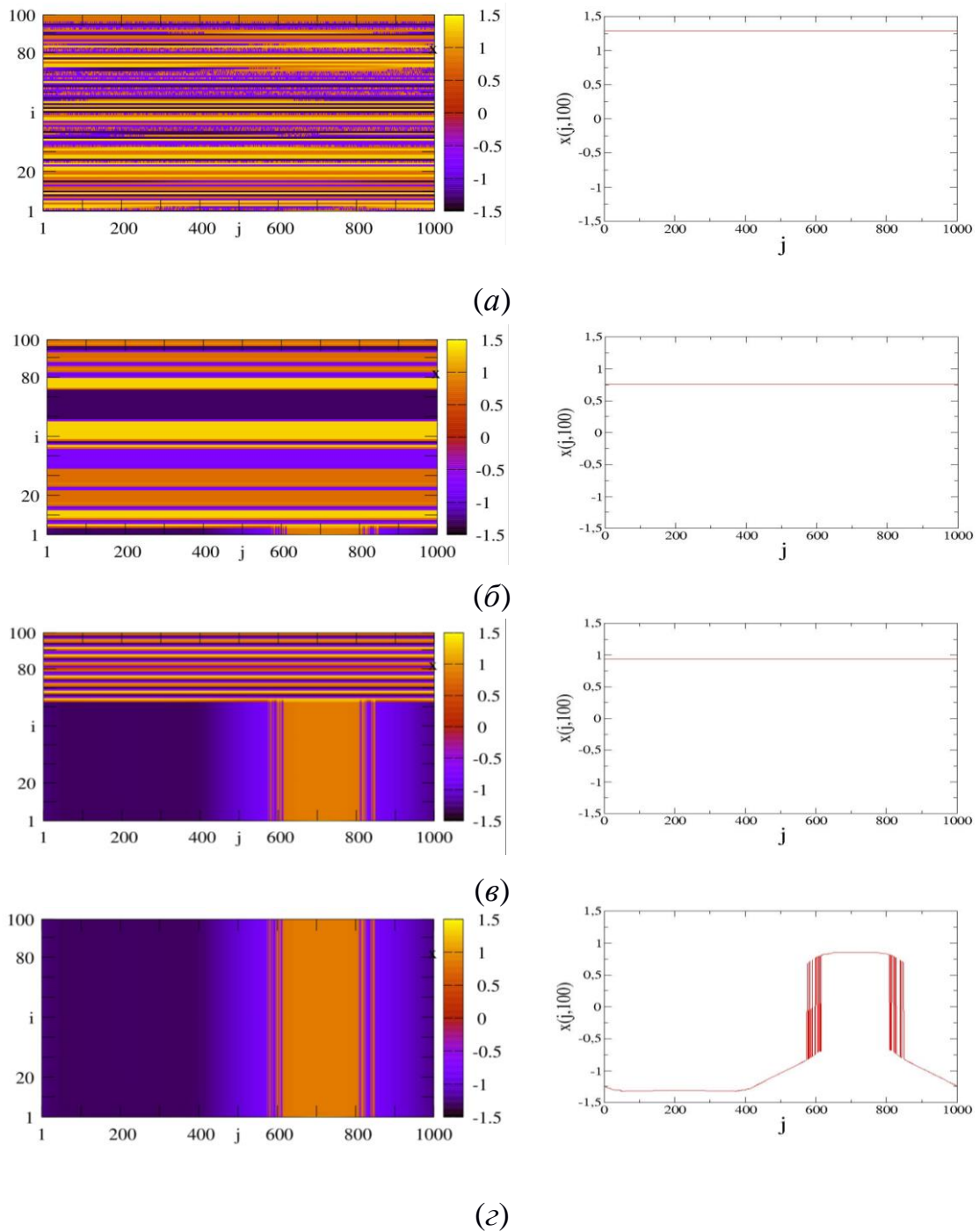


Рисунок 4. Эволюция пространственной структуры в ансамбле (1) из 100 слоев с ростом коэффициента связи при разных радиусах связи  $r_1 = 0.1$ ,  $r_2 = 0.2$ . Слева приведены мгновенные пространственные диаграммы, а справа мгновенные пространственные профили в последнем слое при различных значениях  $\gamma$ :  $\gamma = 0.0$  (a);  $\gamma = 0.2513$  (б);  $\gamma = 0.2515$  (e);  $\gamma = 0.4$  (z) Другие параметры:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2.4$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.42$ . Время установления структур без связи  $n_0 = 20000$ , время расчета воздействия  $n_1 = 20000$

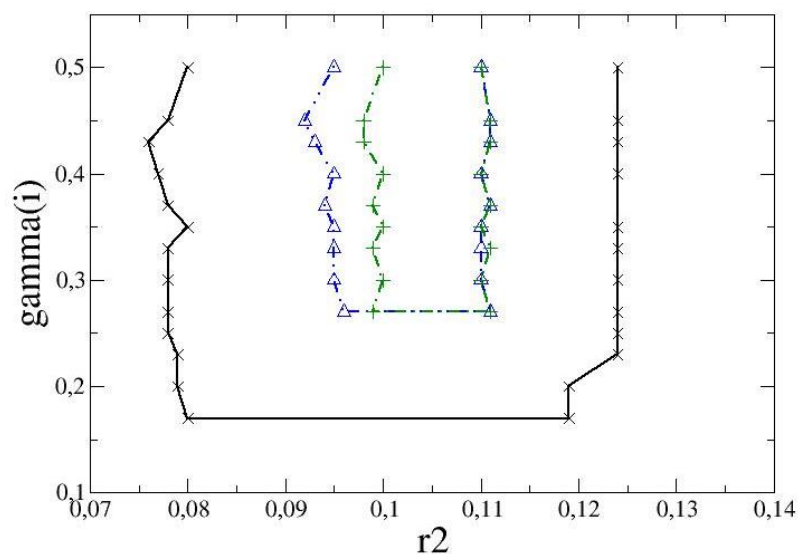


Рисунок 5. Границы области синхронизации, согласно условию (4') для слоев с номерами  $i = 2$  ( $\times$ ),  $10$  ( $\Delta$ ),  $100$  ( $+$ ). Параметры сети:  $\alpha_i = 2.4$ ;  $\sigma_i = 0.42$ ,  $i=1,2,\dots,100$ ,  $r_1 = 0.1$

В разделе **Выводы** сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования:

- Установлено и исследовано явление вынужденной синхронизации в заданном режиме двухъямной химеры, как в ансамбле из двух однонаправленно связанных слоев, так и в многослойном ансамбле, состоящем из 100 слоев (задающего и 99 слоев, на которые оказывается воздействие). Эффект синхронизации имеет место как в случае идентичности всех слоев (строгая синхронизация, так и, в определенной степени, в случае отличия радиуса внутрислойной связи в задающем слое от радиуса связи во всех остальных слоях (нестрогая синхронизация).
- Выбранное условия нестрогой (эффективной) синхронизации ( $\delta_i \leq 0.01$ ) для отдельных слоев и всей сети при отличии первого слоя от остальных может быть выполнено не всегда. Так, даже в случае двух неидентичных слоев с радиусами связи  $r_1=0.1$  и  $r_2=0.2$  с увеличением

межслойной связи не удавалось получить синхронизацию слоев с заданной погрешностью  $\delta_2 \leq 0.01$ .

- Изначально (в отсутствии взаимодействия) устанавливающиеся в разных слоях структуры имеют хотя и близкие, но несколько различные пороги синхронизации. Эти пороги различаются даже в случае идентичности параметров взаимодействующих слоев.
- Границы области синхронизации с выбранной погрешностью устанавливаются с ростом номера слоя и для больших номеров практически перестают меняться. Соответственно, синхронизация распространяется на неограниченное число однонаправленно связанных слоев сети.

Таким образом, было показано, что выбранная в качестве задающей химерная структура может ретранслироваться от слоя к слою без изменений (в случае идентичных слоев), либо с достаточно малой погрешностью, если различие в параметрах задающего слоя и остальных слоев не слишком велико. При этом начальные состояния слоев влияют на порог синхронизации, но это влияние незначительно.

**Список литературы** включает 72 ссылки на научные публикации по теме ВКР.