

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Мультистабильность в
ансамблях автоколебательных систем с дальнедействующими связями**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 241 группы
направления 03.04.03 Радиофизика
физического факультета
Муренцова Сергея Михайловича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор

_____ А.В. Шабунин

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

_____ В.С. Анищенко

Введение

Регулярные колебательные и волновые процессы, наблюдаемые в автоколебательных системах, состоящие из цепочки взаимодействующих связанных осцилляторов, являются объектом исследования специалистов в различных научных отраслях физики, химии, биологии и других сопутствующих наук, так как в них содержится множество интересных и значимых для практического применения явлений, таких как синхронизация, мультистабильность и формирование пространственных структур. При построении пространственно-временной динамики таких систем обычно используют модели, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, либо ансамбли связанных осцилляторов, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Цель данной выпускной магистерской работы – выявление закономерностей мультистабильности в ансамбле периодических генераторов с нелокальными связями, в зависимости от величины связей и их дальности действия.

Для осуществления данной задачи в работе выполнены следующие действия:

1. Методом медленно меняющихся амплитуд получены укороченные уравнения для амплитуд и фаз; проведен теоретический анализ условий существования и устойчивости режимов бегущих волн.
2. Разработан комплекс компьютерных программ для численного интегрирования систем ОДУ.
3. Численно исследована динамика автогенераторов в разных режимах бегущих волн и с разным пространственным периодом в зависимости от величины и дальности действия связей и при изменении параметра возбуждения.
4. Проанализированы полученные результаты и выявлены общие закономерности.

1. Описание исследуемой системы.

Полное уравнение ансамбля с дальнедействующими связями.

Объединение генераторов в ансамбль с линейными нелокальными (дальнедействующими) связями приводит к системе уравнений:

$$\ddot{x}_i - (\varepsilon - x_i^2)\dot{x}_i + x_i = \frac{\gamma}{L} \sum_{l=-L}^L (\dot{x}_{i+l} - \dot{x}_i) \quad (1)$$

В уравнениях (1) индекс $i = 1, 2, \dots, N$ задает положение генератора в ансамбле, параметры $\gamma \geq 0$ и $L = 1, 2, \dots, N/2$ определяют силу и дальность действия связей между осцилляторами, соответственно. В силу периодичности граничных условий все математические вычисления с индексами автогенераторов осуществляются по модулю $|N|$, и величина дальности связи L не может превысить $N/2$. В конкретном примере, при $L = 1$ получаем цепочку генераторов, состоящих из кольца локально связанных осцилляторов, при $L = N/2$ — дальнедействующую полносвязную сеть. В предстоящем эксперименте мы будем исследовать, как изменяются параметры системы при переходе между граничными состояниями. Допустим наличие в системе (1) колебаний, которые являются периодическими, а именно: $x_i(t + T) = x_i(t)$ для всех индексов i . Исходя из динамики поведения системы (1) в ней существуют решения в виде бегущих по кольцу волн: $x_i(t) = x_i(t - (i - 1)\Delta t)$, где Δt — разность фаз между соседними колебаниями элементов цепочки, которая соответствует определенному числу равноудаленных значений:

$$\Delta t^{(k)} = \frac{kT}{N} \quad (2)$$

где $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2$ — индекс, исходя из формулы (2), определяющий величину фазового сдвига между колебаниями в соседних элементах ансамбля; пусть будет именоваться «индекс бегущей волны». Автоволны с положительным индексом направлены в сторону возрастания порядковых

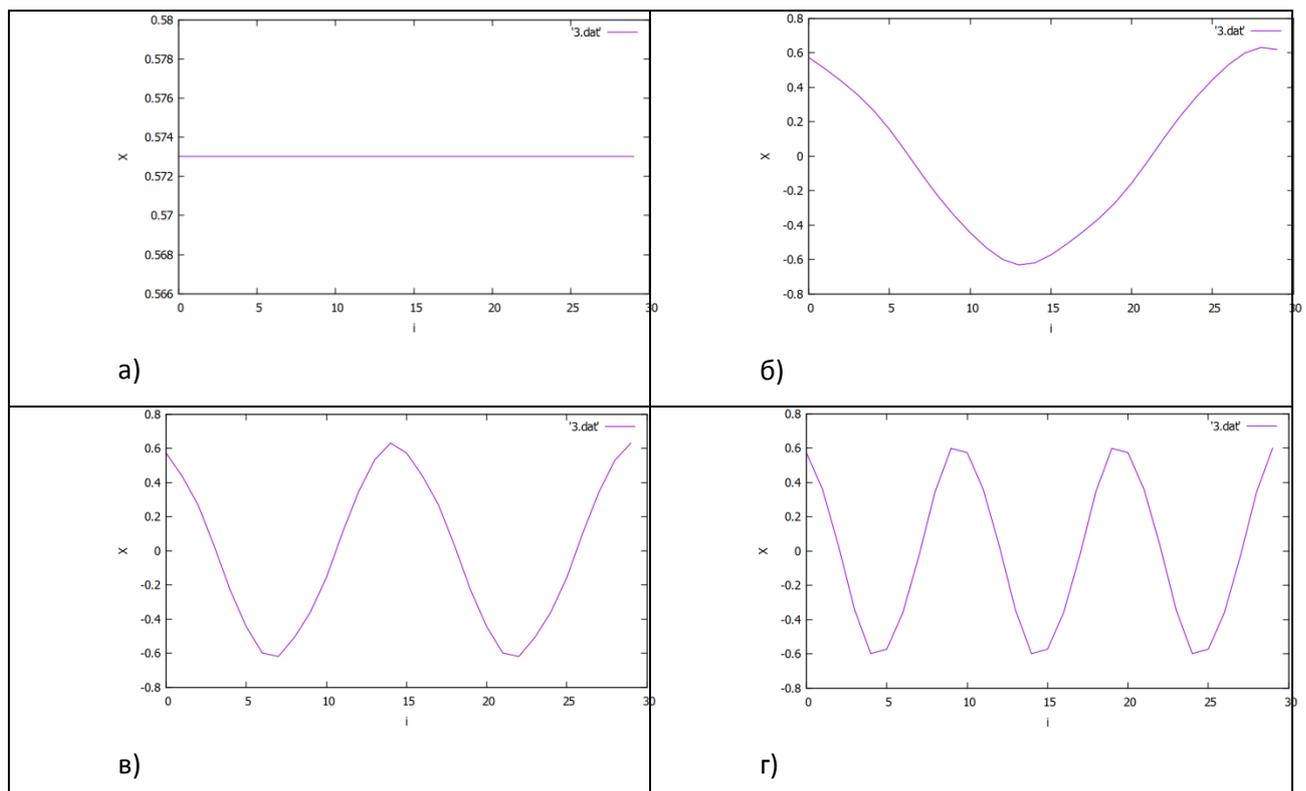
номеров генераторов, а автоволны с отрицательными номерами индекса – в противоположном направлении. В соответствии, что все остальные параметры «правых» и «левых» волн совершенно не отличаются, будем использовать только положительные «правые» значения k .

1.1. Режим бегущих волн в ансамбле.

Для анализа режимов бегущих волн выполнены графические представления режимов в ансамбле, для этого удобно использовать сечения Пуанкаре.

Значения все динамических переменных x_i ансамбля фиксируются в моменты времени, когда $\dot{x}_i = 0$, т. е. проводятся мгновенные “снимки” осцилляторов в моменты времени, соответствующие определенной фазе текущего элемента.

На рисунке (1) представлены профили бегущих волн с разными волновыми числами.



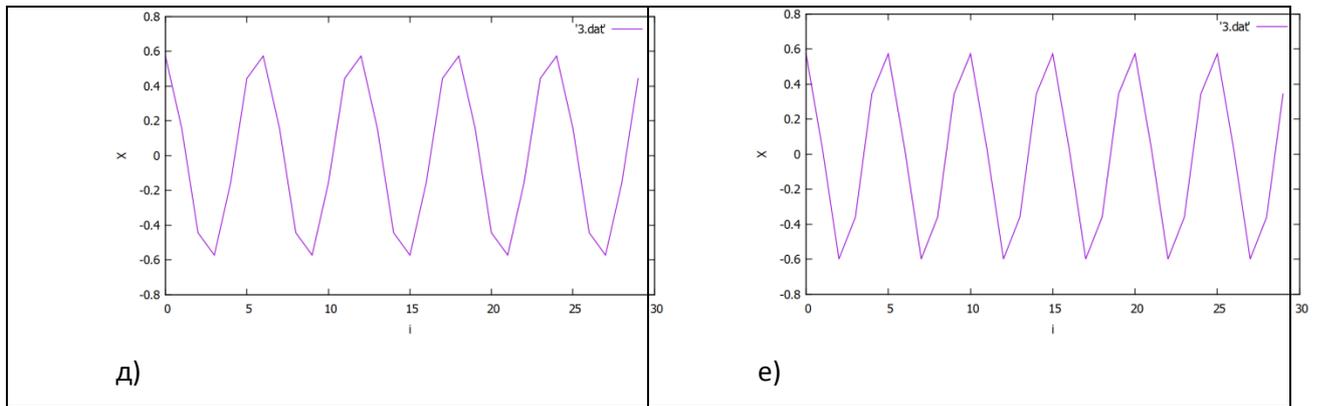


Рис. 1. Профили бегущих волн в ансамбле: пространственно-однородные колебания (а), колебательные режимы для бегущих волн, распространяющихся в прямом направлении с волновым числом $k = 1$ (б), $k = 2$ (в), $k = 3$ (г), $k = 5$ (д), $k = 6$ (е). По оси абсцисс отложены порядковые номера осцилляторов в цепочке, по оси ординат – значение динамической переменной данного осциллятора в сечении $\dot{x}_1 = 0$.

1.2. Теоретический анализ системы при дальнедействующих связях.

Предположим, что автоколебания в каждом осцилляторе гармонические или близкие к ним и для этого случая (1) используем приближенный вид решения:

$$x = \frac{1}{2}(a_i e^{jt} + a_i^* e^{-jt}) \quad (3)$$

Найдем 1ю и 2ю производную по времени от (3)

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2}[\dot{a}_i e^{jt} + \dot{a}_i^* e^{-jt}] + \frac{j}{2}(a_i e^{jt} - a_i^* e^{-jt})$$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{2}[\ddot{a}_i e^{jt} + \ddot{a}_i^* e^{-jt}] + j(\dot{a}_i e^{jt} - \dot{a}_i^* e^{-jt}) - \frac{1}{2}(a_i e^{jt} + a_i^* e^{-jt}) \quad (4)$$

$a_i(t)$ – все так же медленно меняющаяся амплитуда, соответственно при дифференцировании, 1е слагаемые в квадратных скобках можно считать равными малыми.

Далее подставим найденные выражения (4) в уравнение (1):

$$j(\dot{a}_i e^{jt} - \dot{a}_i^* e^{-jt}) - \frac{j}{2} \left(\varepsilon - \frac{a_i^2 e^{2jt} + a_i^{*2} e^{-2jt} + 2a_i a_i^*}{4} \right) (a_i e^{jt} - a_i^* e^{-jt}) = \\ = \frac{j\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (a_{i+l} e^{jt} - a_{i+l}^* e^{-jt} - a_i e^{jt} + a_i^* e^{-jt});$$

Раскрыв скобки и сократив на $j e^{jt}$, получим:

$$\dot{a}_i - \dot{a}_i^* e^{-2jt} - \frac{1}{2} \varepsilon a_i + \frac{1}{2} \varepsilon a_i^* e^{-2jt} + \frac{1}{8} a_i^3 e^{2jt} + \frac{1}{8} a_i^2 a_i^* - \frac{1}{8} a_i^{*3} e^{-4jt} + \\ + \frac{1}{8} a_i^{*2} e^{-2jt} + \frac{1}{8} a_i^3 e^{2jt} - \frac{1}{8} a_i^{*3} e^{-4jt} = \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (a_{i+l} - a_i);$$

Проинтегрируем по периоду:

$$\dot{a}_i - \frac{\varepsilon a_i}{2} + \frac{1}{8} a_i |a|^2 = \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (a_{i+l} - a_i) \\ \dot{a}_i = \frac{a_i}{2} \left(\varepsilon - \frac{|a|^2}{4} \right) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (a_{i+l} - a_i) \quad (5)$$

Будем искать стационарные решения системы (5) в виде бегущих волн:

$$a_i = \rho e^{i\varphi_i} ; \quad a_{i+l} = \rho e^{i\varphi_l} \quad (6)$$

Подставив (18) в вид уравнения (17) и приравняв правые части к нулю:

$$\rho e^{ji\varphi} \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (\rho e^{j(i+l)\Delta\varphi} - \rho e^{ji\varphi}) = 0;$$

сократим на $e^{ji\varphi}$:

$$\rho \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\rho^2}{8} \right) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (\rho e^{jl\varphi} - \rho) = 0;$$

откуда:

$$\frac{\rho^2}{8} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (e^{jl\varphi} - 1);$$

и:

$$\rho = \sqrt{4\varepsilon + 4\frac{\gamma}{L} \sum_{l=-L}^L (\cos(l\varphi))},$$

Т. о. получаем значения для стационарной вещественной амплитуды колебаний:

$$\rho = 2 \sqrt{\varepsilon + \frac{2\gamma}{L} \sum_{l=-L}^L (\cos(l\Delta\varphi))}$$

Как и ранее, $\Delta\varphi = \frac{2\pi k}{N}$, где k – индекс волн.

Тогда решение для амплитуды и фазы для k -ой волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{(k)} = 2 \sqrt{\varepsilon - 2\gamma(1 - \Psi^{(k)}(N, L))} \\ \Delta\varphi^{(k)} = \frac{2\pi k}{N}, k = 0, 1, \dots, N/2 \end{array} \right.$$

$$\text{где } \Psi^{(k)}(N, L) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \cos\left(\frac{2\pi k l}{N}\right)$$

(7)

Рассмотрим процесс «рождения» режимов бегущих волн в ансамбле осцилляторов (1), введя параметр возбуждения для k -ой волны:

$$\varepsilon^{(k)} = \varepsilon - 2\gamma(1 - \Psi^{(k)}(N, L)) \quad (8)$$

Рождение k -ой волны происходит на линии $\rho^k = 0$.

На рисунках (2-4) представлены границы существования режимов бегущих волн для разных L . Линии $b_1 - b_n$ - соответствуют границам существования бегущих волн с волновым числом k .

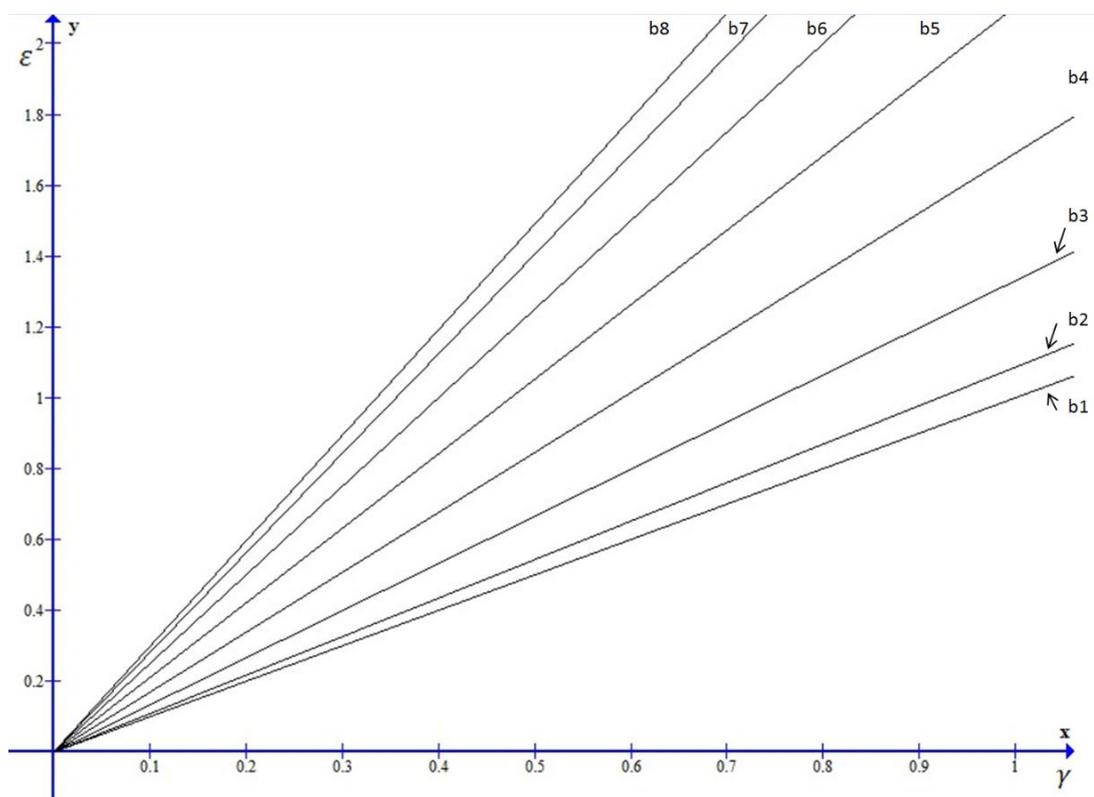


Рисунок 2. Бифуркационная диаграмма границ существования режимов бегущих волн при $L=2$.

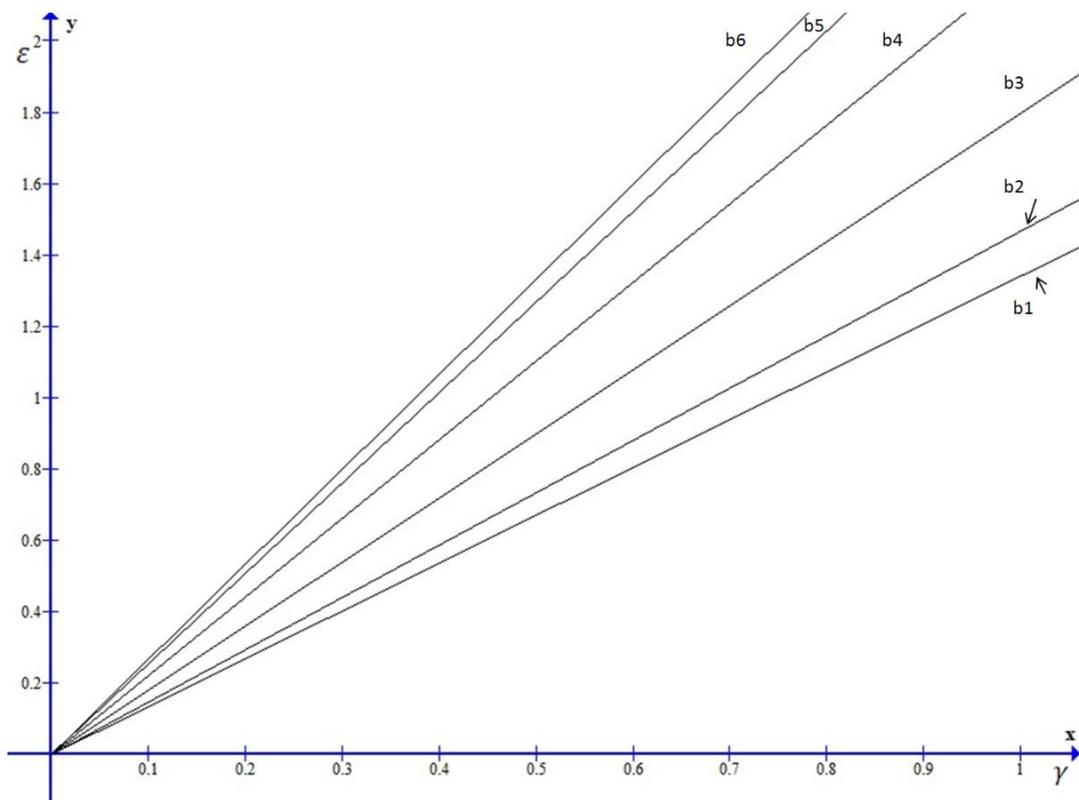


Рисунок 3. Бифуркационная диаграмма границ существования режимов бегущих волн при $L=3$.

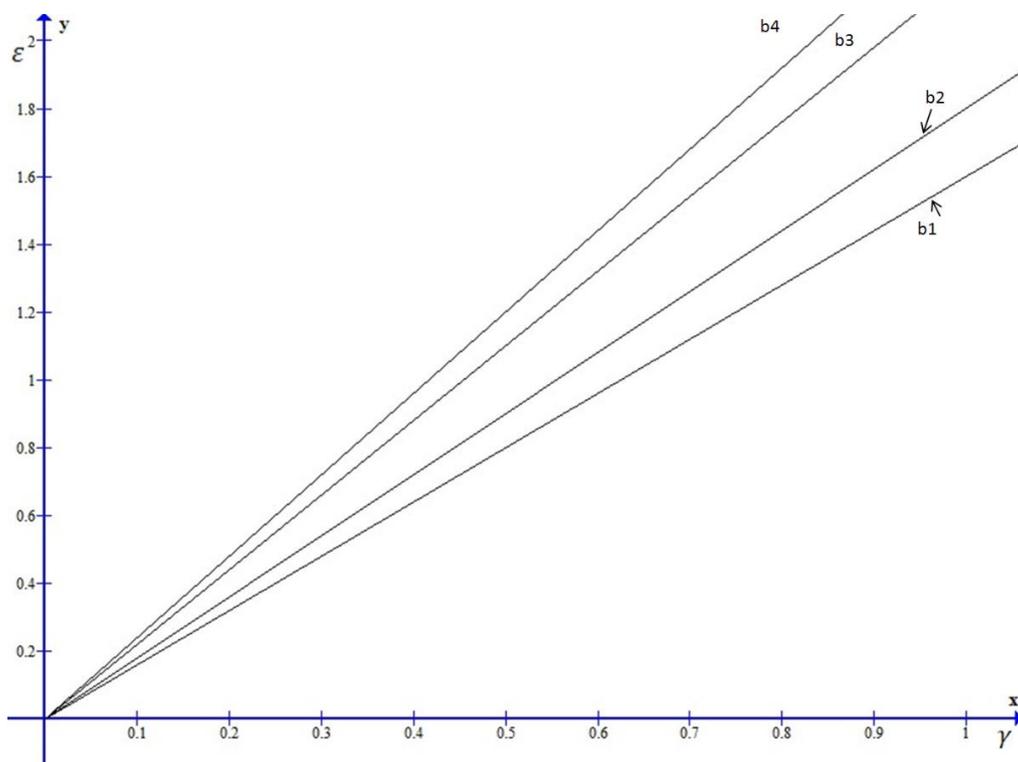


Рисунок 4. Бифуркационная диаграмма границ существования режимов бегущих волн при $L=5$.

Определение условия устойчивостей бегущих волн системы (7), требует перехода к уравнениям для вещественных амплитуд и фаз.

Преобразуем комплексные амплитуды к полярной форме: $a_i = \rho_i e^{j\varphi_i}$.

Приведя вещественную и мнимую часть, получим систему уравнений для ρ_i и φ_i :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_i = \frac{\varepsilon}{2} \rho_i - \frac{\rho_i^3}{8} + \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L (\rho_{i+l} \cos(\varphi_{i+l} - \varphi_i) - \rho_i) \\ \dot{\varphi}_i = \frac{\gamma}{2L} \sum_{l=-L}^L \frac{\rho_{i+l}}{\rho_i} \sin(\varphi_{i+l} - \varphi_i) \end{array} \right.$$

Используя метод приближенного представления системы, (9) в окрестности стационарного решения $[\rho^{(k)}, \varphi^{(k)}]$, найдем Якобиан системы

$\hat{J} = [\partial x_i / \partial x_j]$. Запишем \hat{J} в блочной форме:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_0 & \dots & \hat{A}_L & \hat{0} & \dots & \hat{A}_{-L} & \dots & \hat{A}_{-1} \\ \hat{A}_{-1} & \dots & \hat{A}_{L-1} & \hat{A}_L & \dots & \hat{A}_{-L} & \dots & \hat{A}_{-2} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \hat{A}_1 & \hat{A}_L & \hat{0} & \dots & \hat{0} & \dots & \hat{A}_{-1} & \hat{A}_0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

где \hat{A}_0 и \hat{A}_l ($l = \pm 1, \dots, \pm L$) – матрицы 2×2 следующего вида:

$$\hat{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \rho_i} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \varphi_i} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \rho_i} & \frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \varphi_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon^{(k)} - \gamma \Psi_N^{(k)}(L) & 0 \\ 0 & -\gamma \Psi_N^{(k)}(L) \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \rho_{i+l}} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \varphi_{i+l}} \\ \frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \rho_{i+l}} & \frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \varphi_{i+l}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2L} \cos(l\Delta\varphi^{(k)}) & -\frac{\gamma}{4L\sqrt{\varepsilon^{(k)}}} \sin(l\Delta\varphi^{(k)}) \\ \frac{\gamma}{4L\sqrt{\varepsilon^{(k)}}} \sin(l\Delta\varphi^{(k)}) & \frac{\gamma}{2L} \cos(l\Delta\varphi^{(k)}) \end{bmatrix}$$

Матрица (10) обладает тем свойством, что каждая ее следующая строка смещена вправо на одну позицию относительно предыдущей. Такие матрицы называются «правоциркулярными». Для соответствующих матриц собственные значения получаются как дискретное преобразование Фурье от вектора-строки коэффициентов матрицы:

$$\Lambda_n^{(k)} = \hat{A}_0 + \sum_{l=1}^L [(A_l e^{-j\frac{2\pi ln}{N}} + \hat{A}_{-l} e^{j\frac{2\pi ln}{N}})] \quad (11)$$

где $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Подставляя в (19) выражения для матриц, получим:

$$\hat{\Lambda}_0^{(k)} = \begin{bmatrix} -\varepsilon^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Lambda}_n^{(k)} = \begin{bmatrix} -\varepsilon^{(k)} - \gamma C_n^{(k)}(N, L) & 2j\sqrt{\varepsilon^{(k)}} S_n^{(k)}(N, L) \\ -j\frac{\gamma}{2\sqrt{\varepsilon^{(k)}}} S_n^{(k)}(N, L) & -\gamma C_n^{(k)}(N, L) \end{bmatrix}$$

где $C_n^{(k)}(N, L) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \cos(l\Delta\varphi^{(k)}) (1 - \cos\frac{2\pi ln}{N})$

$S_n^{(k)}(N, L) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \sin(l\Delta\varphi^{(k)}) \sin(\frac{2\pi ln}{N})$.

Определив собственные значения для матриц $\Lambda_n^{(k)}$, получаем $2N$ собственных чисел Якобиана (6):

$$\lambda_{0,1} = 0$$

$$\lambda_{0,2} = -\varepsilon^{(k)}$$

$$\lambda_{n,1} = \frac{-\left(\varepsilon^{(k)} + 2\gamma C_n(N, L)\right) + \sqrt{(\varepsilon^{(k)})^2 + 4\gamma^2 S_n^2(N, L)}}{2}$$

$$\lambda_{n,2} = \frac{-\left(\varepsilon^{(k)} + 2\gamma C_n(N, L)\right) - \sqrt{(\varepsilon^{(k)})^2 + 4\gamma^2 S_n^2(N, L)}}{2}$$

Нулевое значение $\lambda_{0,1}$ показывает инвариантность системы (5). Собственное значение $\lambda_{0,2}$ соответствует появлению k -волны, Оставшиеся

$2N - 2$ собственных числа определяют устойчивость $x^{(k)}(t)$ по отношению к амплитудным и фазовым возмущениям.

Для устойчивости колебаний справедливо условие:

$$-\left(\varepsilon^{(k)} + 2\gamma C_n(N, L)\right) + \sqrt{(\varepsilon^{(k)})^2 + 4\gamma^2 S_n^2(N, L)} < 0. \quad (12)$$

Полученные условия устойчивости определяются фазовым сдвигом между генераторами в ансамбле и не зависят ни от параметра связи, ни от параметра возбуждения, ни от амплитуды колебаний.

Для определения области устойчивости на плоскости параметров $\varepsilon - \gamma$ необходимо вернуться к полному условию (8):

$$\varepsilon^{(k)} > \gamma \left[\frac{S_n^2(N, L) - C_n^2(N, L)}{C_n(N, L)} \right]$$

которое можно переписать в виде неравенства:

$$\varepsilon^{(k)} > \gamma \Theta^{(k)}(N, L) \quad (13)$$

где $\Theta^{(k)}(N, L) = \max_{n=1} \left\{ \frac{S_n^2(N, L) - C_n^2(N, L)}{C_n(N, L)} \right\}^{N-1}$, условие, определяющее

устойчивость колебаний k -волны.

Для выбранных K, L неравенство (13) задает на плоскости $\varepsilon - \gamma$ области устойчивости волновых режимов (рис. 14):

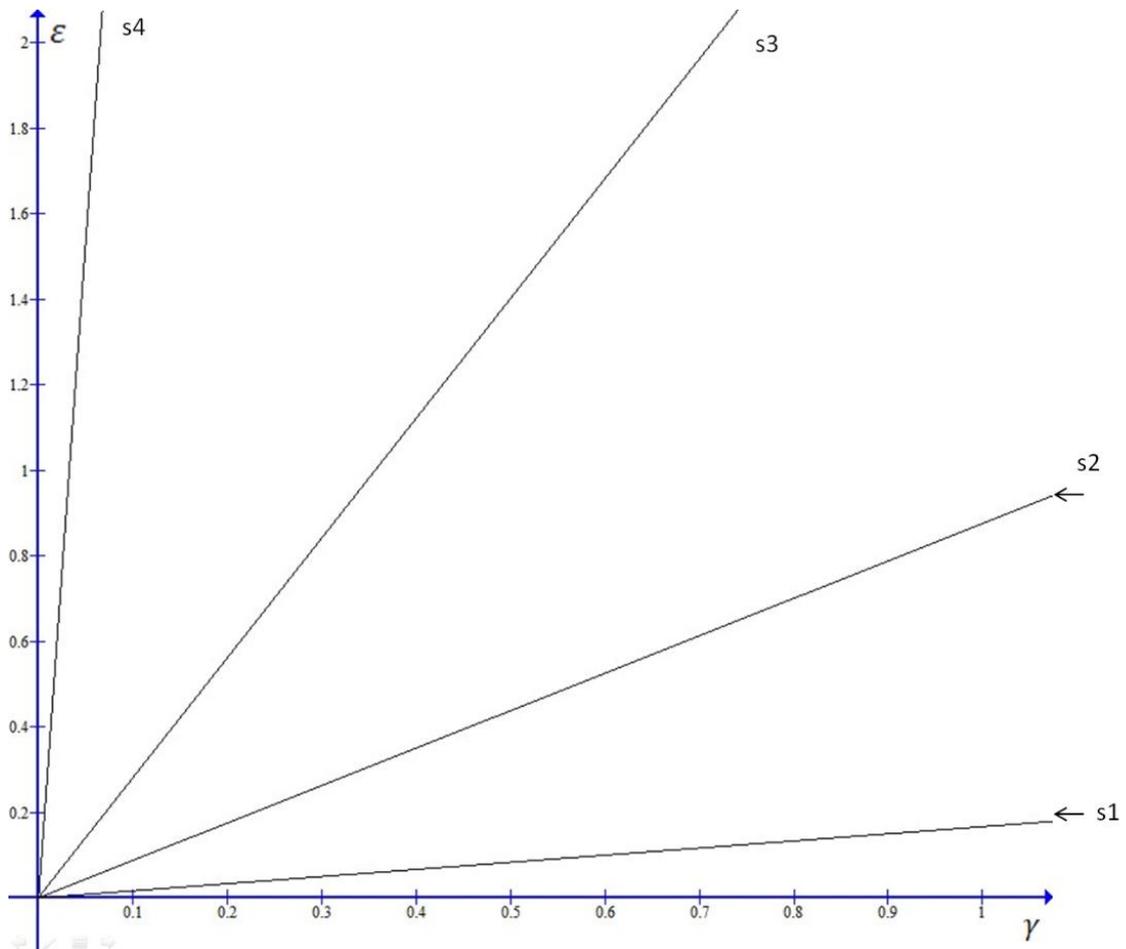


Рисунок 5. Бифуркационная диаграмма областей устойчивости для разных значений волнового числа $K=1,2,3,4$ при фиксированном дальнодействии $L=2$.

3.2. Численные исследования областей устойчивости мультистабильных состояний в ансамбле осцилляторов Ван-дер-Поля при разных радиусах действия связей.

Перейдем к исходному уравнению системы автогенераторов (1), данные области устойчивости будут существенно отличаться, поэтому опять же экспериментально найдем области устойчивости для разных режимов.

Для реализации данной задачи была переработана основная программа для численного интегрирования ансамблей систем осцилляторов Ван-Дер-Поля.

Исследование показало, что реальная область устойчивых колебаний существенно отличается (рис.6).

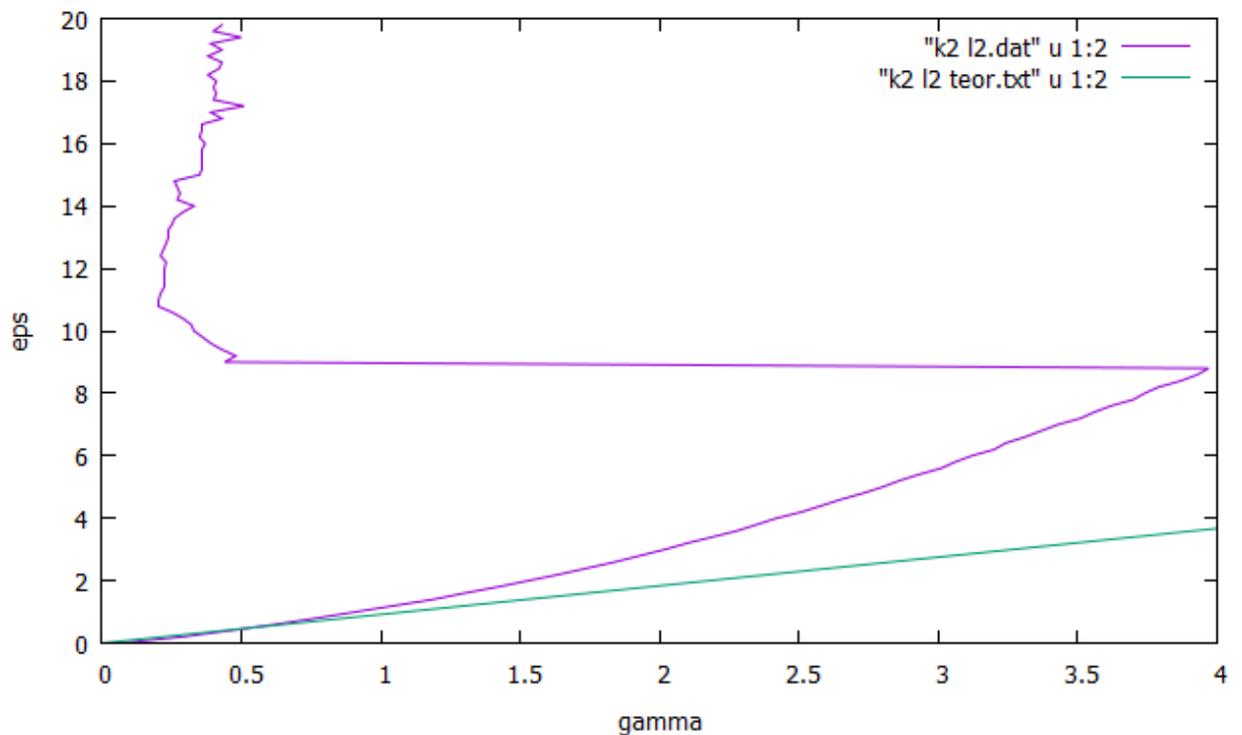


Рисунок 6. Практически найденная область устойчивых колебаний для волнового числа $k=2$.

Как видно из графика результаты численного исследования областей устойчивости отличаются от соответствующих областей на рис. 6. Для удобства на рисунке продублирована теоретическая граница области устойчивости, она выделена сплошной зеленой линией. Замечено, что данный волновой режим имеет конечную область устойчивости. При малых значениях параметра возбуждения ($\epsilon \sim 2$) нижняя граница почти соответствует с найденной ей аналитической границей. Далее мы наблюдаем относительное расхождение и при увеличении ϵ в точке $\gamma \sim 1.25$ происходит резкое сокращение области устойчивых колебаний и дальше существует только при малых параметрах связей.

Заключение:

в ходе экспериментальной работы была продемонстрирована классическая работа одиночного осциллятора Ван-дер-Поля. Так же была проделана работа для цепочки тридцати осцилляторов с локальными связями, а именно: методом медленно меняющихся амплитуд были найдены приближенные методы решения для нахождения областей устойчивости, так же для исходной системы уравнений был разработан программный комплекс для проведения исследований: разработка программы на Си/Си++ для численного интегрирования ансамблей систем ОДУ, вследствие чего была исследована динамика ансамбля осцилляторов Ван-дер-Поля с локальными и дальнедействующими связями при изменении силы связей и параметра возбуждения. Было проведено исследование областей устойчивости мультистабильных состояний в ансамбле осциллятора Ван-дер-Поля при разных радиусах действия связей.

Как в случае и с локальными и с дальнедействующими связями, нижняя граница области устойчивости до определенного момента совпадает с найденной аналитически границей при условии коротковолновых режимов колебаний, небольшие отклонения возникают при длинноволновых режимах.