

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Физический факультет

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**«Индукцированные шумом эффекты в бистабильном осцилляторе с
нелинейным трением в присутствии периодического воздействия»**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 241 группы

направления 03.04.03 «Радиофизика»

физического факультета

Никишина Александра Константиновича

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Саратов – 2019

Актуальность темы исследования

Для широкого круга нелинейных динамических систем, встречающихся в различных областях физики, химии, биологии, экологии, климатологии и других наук характерно явление бистабильности. Интерес исследователей к бистабильным системам объясняется широким спектром фундаментальных эффектов, наблюдаемых в данном классе систем при воздействии шума. Среди них нужно отметить стохастические бифуркации и индуцированные шумом переходы^{1,2}, стохастический резонанс (СР)^{3,4}, индуцированный шумом хаос⁵ и синхронизацию стохастических колебаний (стохастическую синхронизацию (СС))⁶.

Простейший вид бистабильности возникает, когда система обладает двумя устойчивыми равновесиями в фазовом пространстве, разделенными устойчивым многообразием седла. Добавление шума приводит к случайным переключениям между устойчивыми в детерминированной системе состояниями, что приводит к формированию стационарной плотности вероятности с двумя локальными максимумами. Классическим примером стохастической бистабильной системы является двумерный осциллятор Крамерса⁷. Уравнение осциллятора Крамерса описывает броуновское движение в двухъямном потенциале. Стационарная плотность вероятности стохастических колебаний осциллятора Крамерса при любой интенсивности шума имеет два максимума, соответствующие потенциальным ямам. Известно, что в осцилляторе Крамерса имеет место индуцированный шумом хаос⁵. Кроме

¹ В. Хорстхемке, Р. Лефевр, Индуцированные шумом переходы. -- М.: Мир, 1987.

² L. Arnold, Random Dynamical System. -- Berlin: Springer, 2003.

³ R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, The mechanism of stochastic resonance // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1981. Vol. 14, no. 11. pp. 453–457.

⁴ В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гаер, Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // УФН. 1999. Т.42(1). С. 7--36.

⁵ L. Schimansky-Geier, H. Herzel, Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator // Journal of Statistical Physics. 1993. Vol. 70, pp. 141--147.

⁶ A. Neiman, Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, no.4. pp. 3484–3487.

⁷ H. Kramers, Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940. Vol. 7, no. 4. Pp. 284–304.

того, в осцилляторе Крамерса наблюдаются отмеченные выше фундаментальные эффекты стохастического резонанса и стохастической синхронизации⁸. Передемпфированный осциллятор Крамерса (в пределе бесконечной диссипации) служит классической моделью для исследования этих явлений, поскольку позволяет получить ряд аналитических результатов.

В то же время, классический осциллятор Крамерса не является универсальной моделью и не демонстрирует ряд интересных свойств бистабильных систем. В осцилляторе Крамерса с аддитивным шумом не наблюдаются стохастические бифуркации феноменологического типа (так называемые Р-бифуркации²), которые связывают с качественным изменением формы стационарного вероятностного распределения. Под таким качественным изменением понимают, как правило, изменение числа экстремумов. Можно предположить, что картина наблюдаемых явлений существенным образом изменится при наличии нелинейной, зависящей от мгновенного состояния системы, диссипации.

В работах В.В. Семенова с соавторами^{9,10,11} была предложена и исследована (как численно, так и экспериментально, с помощью радиоэлектронной схемы) модель стохастического двухъямного осциллятора с нелинейным трением. Было установлено, что предложенный осциллятор в бистабильном режиме с двумя устойчивыми точками равновесия при добавлении аддитивного шума и увеличении его интенсивности демонстрирует последовательность из двух стохастических бифуркаций Р-типа и немонотонную зависимость средней частоты стохастических колебаний

⁸ J.A. Freund, L. Schimansky-Geier, P. Hänggi P. Frequency and phase synchronization in stochastic systems // Chaos. 2003. Vol.13, P. 225-238.

⁹ В.В. Семенов и др., Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 2016.

¹⁰ V. Semenov et al., Physical Review E, 2016B. Shulgin, A. Neiman, V. Anishchenko, Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by a periodic force // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75(23), P.4157--4161.

¹¹ V. Semenov. Noise-induced transitions in a double-well excitable oscillator // Phys. Rev E. 2017. Vol.95. 052205.

(частоты Райса^{8,12}) от интенсивности шума. Первая бифуркация связана с переходом от бимодального вероятностного распределения к унимодальному (с единственным максимумом в начале координат). Однако, при дальнейшем росте интенсивности шума у распределения вновь возникают два максимума, причем частота переключений между их окрестностями становится практически равной нулю. Таким образом, интенсивность шума является независимым управляющим параметром, который определяет качественный характер динамики системы. В работе В.В. Семенова и др.¹⁰ было дано четкое объяснение механизма наблюдаемых индуцированных шумом переходов в бистабильном осциляторе с нелинейным трением и введены эффективные параметры стохастического осцилятора: эффективная интенсивность шума и эффективный потенциал, что позволило описать поведение данной модели, используя известные аналитические соотношения, полученные для осцилляторов с постоянным трением. В другой работе¹¹ предложенный осцилятор с нелинейной диссипацией был исследован в режиме возбудимости в окрестности двух равновесий и бистабильных автоколебаний (с двумя устойчивыми предельными циклами). В этих режимах были установлены как стохастические бифуркации, связанные с качественными перестройками стационарной плотности вероятности, так и явление когерентного резонанса (КР), состоящее в наибольшей упорядоченности стохастических колебаний при некоторой оптимальной интенсивности шума¹³.

В указанных выше работах, посвященных исследованию стохастических явлений в бистабильном осциляторе с нелинейным трением, не был затронут вопрос влияния периодического внешнего воздействия на стохастические эффекты, наблюдающиеся в данной системе под действием шума. Как известно, для бистабильных стохастических осцилляторов в присутствии

¹² Rice S.O. Mathematical analysis of random noise // Bell System Tech. J. 1944. Vol. 23. P. 282. Part 1; 1945. Vol. 24. P. 46. Part 2.

¹³ A. Pikovsky, J. Kurths, Coherence resonance in a noisy driven excitable system//Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775--778.

слабого (подпорогового) внешнего периодического воздействия типичен эффект стохастического резонанса (СР)^{3,4}, состоящий в немонотонной зависимости коэффициента усиления на частоте сигнала и выходного отношения «сигнал / шум» от интенсивности источника шума. При некотором оптимальном значении шума эти характеристики имеют максимальное значение. Возникает вопрос: как наличие нелинейного, зависящего от мгновенного состояния системы трения повлияет на эффект СР в двухъямном осцилляторе. Также важной задачей является выяснение возможности вынужденной стохастической синхронизации осциллятора. Установленные в системе стохастические бифуркации и немонотонный характер зависимости частоты Раяса от интенсивности шума позволяют предполагать наличие особенностей в проявлении эффектов СР и СС в осцилляторах подобного типа. Изучение модели двухъямного стохастического осциллятора с нелинейным трением при наличии периодического воздействия представляется важной и актуальной проблемой. Осцилляторы данного типа являются достаточно реалистичным обобщением осциллятора Крамерса. Они могут встречаться в природе и технике при более точном моделировании различных процессов. Тем не менее, данная проблема ранее не затрагивалась в научной литературе, что определяет актуальность исследований по данному направлению и научную новизну результатов, которые планируется получить.

В связи с отмеченным выше была сформулирована следующая **цель выпускной квалификационной работы**: исследование бистабильного осциллятора с нелинейным трением, предложенного в работах В.В. Семенова и соавторов, находящегося под одновременным воздействием аддитивного гауссова белого шума и гармонического внешнего сигнала и установление наличия и особенностей таких стохастических эффектов, как стохастический резонанс и вынужденная синхронизация стохастических колебаний.

Краткое содержание работы

Выпускная квалификационная работа (ВКР) состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

Во **введении** обсуждается актуальность проблематики исследования, дается краткий обзор научной литературы по теме ВКР, формулируется цель и задачи проводимых исследований.

В **первой главе** описывается математическая модель стохастического осциллятора с нелинейным трением и методы исследования стохастических колебаний.

Исследуемый осциллятор может быть представлен в виде радиоэлектронной цепи, принципиальная схема которой приведена на рис.1. Схема включает два нелинейных элемента $N1$ и $N2$ с вольт-амперными характеристиками S- и N-типа: $i_{N1} = F(V)$, $V_{N2} = G(i)$. Данная схема аналогична модели нейронного туннельного диода Нагумо [23,24], за исключением того, что она содержит нелинейный резистор $N2$, включенный последовательно с катушкой индуктивности L . Схема также содержит источник широкополосного гауссова шумового тока $i_{ш}(t)$, который можно считать белым, а также источник гармонического сигнала $i_c(t)$.

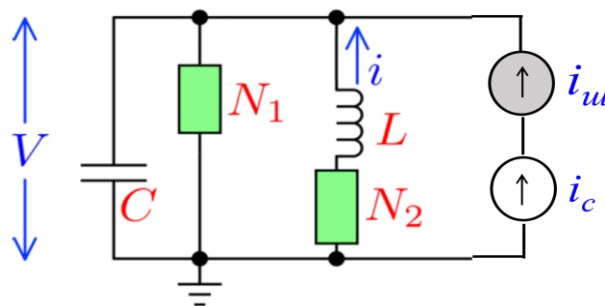


Рисунок 1. Радиоэлектронная схема исследуемой модели осциллятора описывается следующими стохастическими уравнениями в безразмерных переменных

$$\begin{aligned}\dot{y} &= v, \\ \varepsilon \dot{v} &= -y + c_1 Q + c_3 Q^3 - c_5 Q^5 + \varepsilon v(a - 3by^2) - C \sin \omega_{\text{вн}} t - \sqrt{2D} n(t), \\ Q(y, v) &= v - ay + by^3.\end{aligned}\tag{1}$$

В (1) y , v – динамические переменные, ε , a , b , c_1 , c_3 , c_5 – параметры осциллятора, $n(t)$ – источник нормированного гауссова белого шума ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение, $\delta(\tau)$ – функция Дирака), D – интенсивность шума, C и $\omega_{\text{вн}}$ – амплитуда и частота внешнего гармонического сигнала соответственно. В работе фиксировались следующие параметры системы: $\varepsilon=0.01$, $c_1=1$, $c_3=9$, $c_5=22$.

Во **второй главе** приведены результаты исследования влияния шума на осциллятор с нелинейным трением (1) в отсутствие внешнего гармонического воздействия в трех динамических режимах. В результате для бистабильного осциллятора с двумя устойчивыми состояниями равновесия вдали от порога автоколебаний наблюдались два индуцированных шумом перехода: от бистабильности к моностабильному режиму с единственным максимумом вероятностного распределения и снова к бистабильности с бимодальной формой распределения. Вблизи порога генерации осциллятор демонстрирует возбудимую динамику с двумя стохастическими циклами. В этом случае с ростом интенсивности шума наблюдается последовательность трех индуцированных шумом переходов: от бистабильности к моностабильности, затем опять к бистабильности и, наконец, снова к моностабильности. В автоколебательном режиме с двумя предельными циклами, если не считать перестройки деталей распределения на предельных циклах (при очень слабом шуме) был зафиксирован только один переход: от бистабильности к моностабильности (при очень большом шуме).

Было показано, что во всех трех режимах зависимость частоты Райса от интенсивности шума является немонотонной и характеризуется четко выраженным максимумом при умеренном уровне шума (рис.2,а). Зависимость нормированной девиации интервалов переключений от интенсивности шума в

бистабильном и возбудимом режимах имеет минимум в области умеренного шума, что свидетельствует об эффекте когерентного резонанса (рис.2,б).

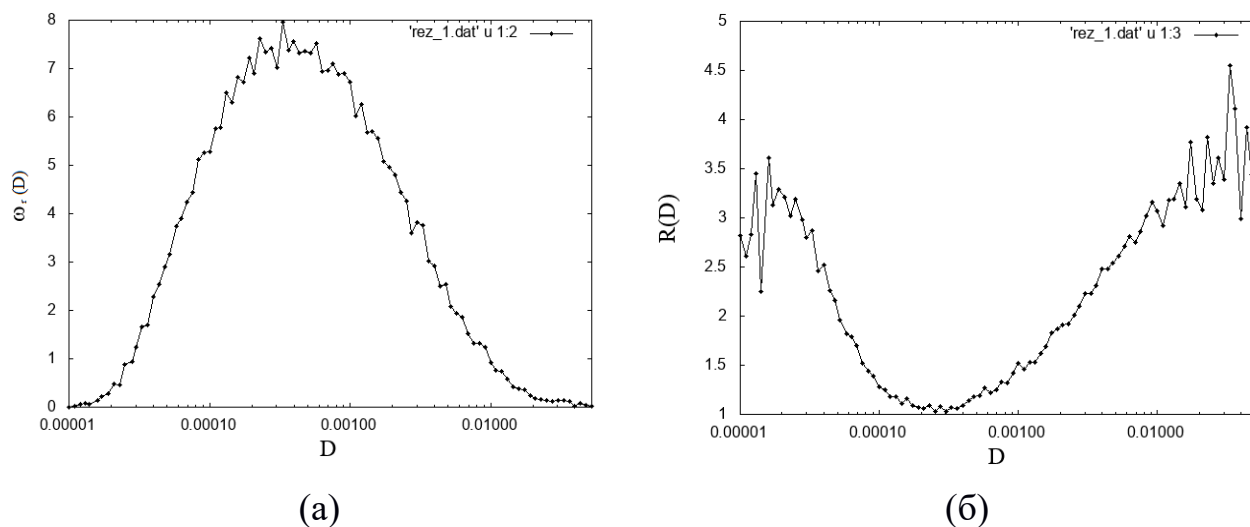


Рисунок 2. Графики зависимости частоты Райса ω_R (а) и относительной девиации периода колебаний R (б) от интенсивности шума D (в логарифмическом масштабе)

Полученные результаты в целом согласуются с результатами исследований осциллятора с нелинейным трением (1), изложенными в работах В.В. Семенова и соавторов и, в определенной степени, дополняют их. Так в указанных работах не рассматривалась поведение показателя нормированной девиации интервалов переключений и не был отмечен эффект когерентного резонанса в области умеренного шума для осциллятора в бистабильном режиме.

В **третьей главе** рассматривается влияние внешнего гармонического воздействия на стохастический осциллятор с нелинейным трением (1) в режиме бистабильной динамики при $a=1.2$, $b=100$, когда в отсутствии сигнала и шума система обладает двумя устойчивыми точками равновесия.

Было показано, что для слабого воздействия на низкой частоте с амплитудой ниже порога переключений или непосредственно вблизи порога, в осцилляторе сохраняются те же индуцированные шумом переходы

«бистабильность» → «моностабильность» → «бистабильность» которые существуют в осцилляторе без внешнего сигнала (см. рис.3).

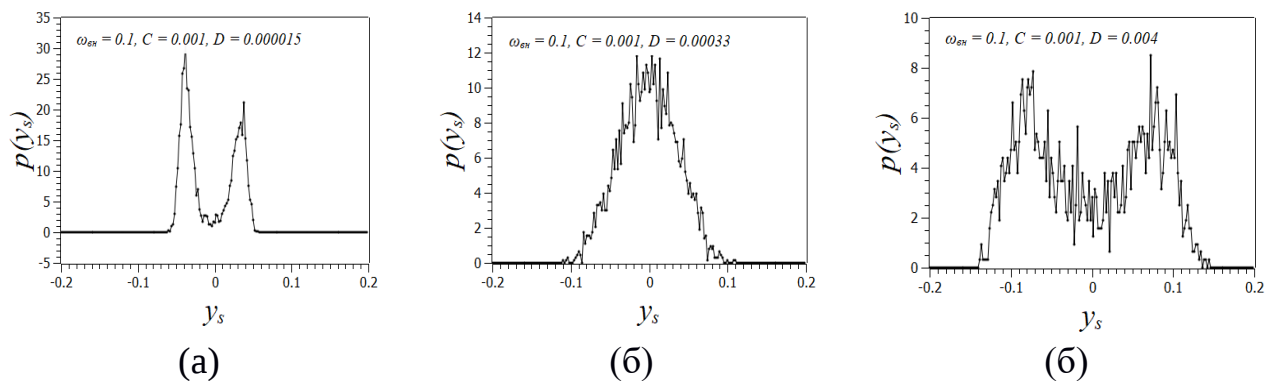


Рисунок 3. Плотности вероятности $p(y_s)$ переменной y в стробоскопическом сечении при $C = 0.001$, $\omega_{en} = 0.1$ и различных значениях интенсивности шума: $D = 0.000015$ (а); $D = 0.00033$ (б); $D = 0.004$ (в)

Такие характеристики как частота стохастических колебаний (частота Райса), показатель нормированной девиации интервалов переключения R и дисперсия интервалов переключения σ_T^2 имеют тот же характер зависимости от интенсивности шума, что и в отсутствии гармонического воздействия: наличие максимума частоты Райса и минимума показателя R и дисперсии σ_T^2 при некотором умеренном уровне шума.

Было установлено, что при подпороговом воздействии с амплитудой $C = 0.001$ на низкой частоте $\omega_{en} = 0.1$ зависимость коэффициента усиления сигнала по мощности $K(\omega_{en})$ от интенсивности шума D характеризуется двумя локальными максимумами (рис.4,а). Первый максимум соответствует эффекту стохастического резонанса. В этом случае в спектре стохастических колебаний присутствует четко выраженный пик на частоте воздействия, величина которого максимальна для данной интенсивности шума. При интенсивности шума, соответствующей второму максимуму коэффициента передачи в спектре отсутствует пик на частоте воздействия (см. рис.4,б,в) и нельзя говорить о стохастическом резонансе. При воздействии на более высоких частотах эффект стохастического резонанса не наблюдается.

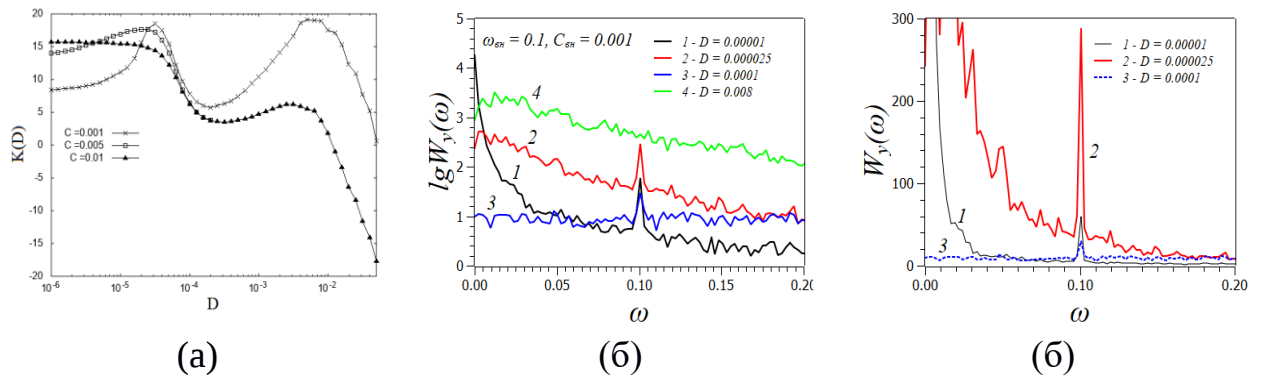


Рисунок 4. Спектральные характеристики стохастического бистабильного осциллятора с внешним периодическим воздействием на частоте $\omega_{\text{вн}} = 0.1$: *а* – зависимость коэффициента передачи по мощности K на частоте внешнего воздействия $\omega_{\text{вн}}$ от интенсивности шума при различных (но сравнительно малых) амплитудах воздействия C ; *б* -- фрагменты логарифмических спектров мощности при $C = 0.001$ и различных значениях интенсивности шума; *в* -- фрагменты линейных спектров для трех значений интенсивности шума

Для сильного воздействия, амплитуда которого существенно превышает пороговое значение, зависимости характеристик R и σ_T^2 от интенсивности шума D становятся монотонными, что свидетельствует об исчезновении эффекта когерентного резонанса. При сильном воздействии на сравнительно больших частотах ($\omega_{\text{вн}} = 4.0$, $\omega_{\text{вн}} = 7.0$) наблюдается эффект стабилизации частоты колебаний на частоте воздействия, который сохраняется с ростом интенсивности шума вплоть до уровня $D \approx 10^{-3}$ (см. рис.5). Этот эффект можно рассматривать как вынужденную синхронизацию стохастических переключений. В подпороговом режиме, а также на низких частотах данный эффект не наблюдается.

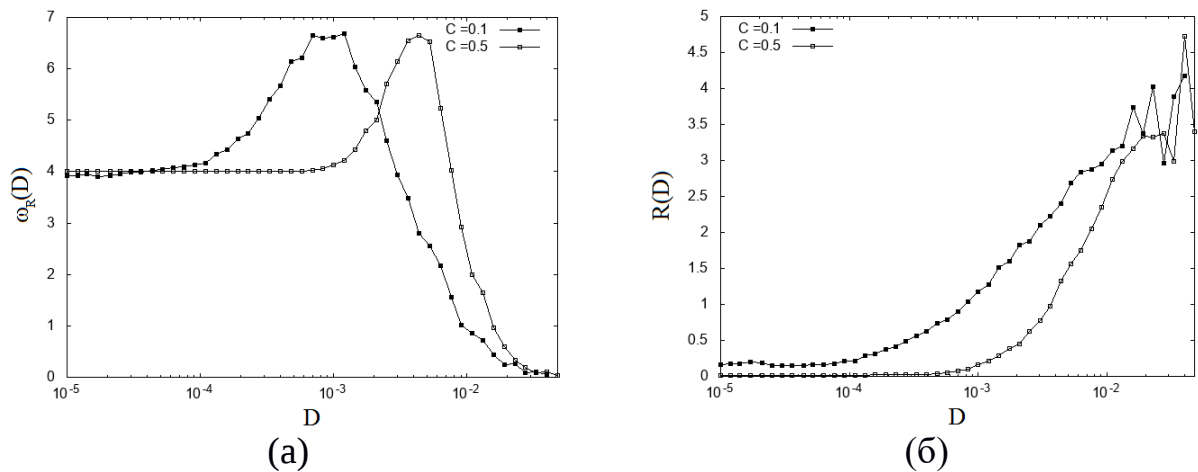


Рисунок 5. Графики зависимости статистических характеристик колебаний от интенсивности шума D при частоте воздействия $\omega_{BH} = 4.0$ и различных значениях амплитуды воздействия C_{BH} : a – частота Райса ω_R ; b – относительная девиация R мгновенного периода колебаний

В **заключении** сформулированы основные результаты проведенного исследования:

- В осцилляторе без гармонического воздействия были диагностированы известные из литературы^{9,10,11} индуцированные шумом переходы, связанные со стохастическими бифуркациями Р-типа. В бистабильном режиме наблюдались два перехода: «бистабильность» → «моностабильность» → «бистабильность». В возбуждимом режиме наблюдалось три перехода: «бистабильность» → «моностабильность» → «бистабильность» → «моностабильность». В автоколебательном режиме был зафиксирован только один переход «бистабильность» → «моностабильность».
- Во всех трех режимах зависимость частоты Райса от интенсивности шума является немонотонной и характеризуется четко выраженным максимумом при умеренном уровне шума. Наибольшее значение частоты Райса в точке максимума наблюдалось в режиме бистабильной динамики. Эти результаты согласуются с результатами исследований осциллятора с нелинейным трением, изложенными в работах В.В. Семенова и соавторов.

- В результате рассчитанной зависимости нормированной девиации интервалов переключений от интенсивности шума в бистабильном и возбудимом режимах был установлен эффект когерентного резонанса в области умеренного шума, который не был ранее.
- При слабом (подпороговом) внешнем гармоническом воздействии на низкой частоте ($\omega_{\text{вн}} = 1.0$) в осцилляторе (1) установлена та же последовательность двух индуцированных шумом переходов, что и в случае без воздействия. Статистические характеристики колебаний таким же образом зависят от интенсивности шума, как и в отсутствии гармонического воздействия. В частности, сохраняется эффект когерентного резонанса.
- При подпороговом воздействии на низкой частоте $\omega_{\text{вн}} = 0.1$ установлено наличие двух максимумов коэффициента усиления сигнала по мощности при различных уровнях шума. Показано, что первый максимум связан с эффектом стохастического резонанса, а второй с перестройками формы спектра при отсутствии пика на частоте воздействия. При воздействии на более высоких частотах эффект стохастического резонанса не наблюдается.
- Для сильного воздействия, значительно превышающего порог, исчезает эффект когерентного резонанса, а в некоторых случаях зависимость средней частоты колебаний от шума также может стать монотонной.
- При сильном воздействии на высоких частотах ($\omega_{\text{вн}} = 4.0$, $\omega_{\text{вн}} = 7.0$) наблюдается эффект синхронизации частоты колебаний, которая практически совпадает с частотой воздействия в широком диапазоне изменения интенсивности шума.

Список использованных источников включает 20 ссылки на научные публикации по теме ВКР.

В **приложении** приводятся тексты программ на языке С, которые были написаны для проведения численных исследований в рамках ВКР.