

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Автоволновые структуры в двумерной решётке нелокально связанных
отображений Рулькова**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 241 группы

направления 03.04.03 Радиофизика

физического факультета

Степанова Станислава Валерьевича

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент

Г.И. Стрелкова

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Автоволны - это самоподдерживающиеся нелинейные волны в активных средах (т. е. содержащих распределённые источники энергии). Термин «автоволны» был предложен по аналогии с устоявшимся и принятым термином «автоколебания». «Автоволны являются распределёнными аналогами автоколебаний в сосредоточенных системах. Их примерами являются волны горения, нервные импульсы, волны распределения туннельных переходов (в полупроводниках) и т. п. Автоволновые процессы лежат в основе большинства процессов управления и передачи информации в биологических системах. Интересной особенностью активных сред является то, что в них могут возникать *автоволновые структуры*». Одно из первых определений автоволн выглядело следующим образом: «Под автоволнами принято сейчас понимать самоподдерживающийся волновой процесс в неравновесной среде, остающийся неизменным при достаточно малых изменениях как начальных, так и граничных условий. Математическим аппаратом для описания автоволн чаще всего служат уравнения диффузионного типа с активной нелинейностью».

К автоволновым процессам относятся колебательные химические реакции в активных средах (реакция Белоусова-Жаботинского), распространение импульса возбуждения по нервному волокну, волны химической сигнализации в колониях некоторых микроорганизмов, популяционные автоволны, распространение эпидемий и генов и многие другие явления.

Исключительные возможности для исследования автоволновых процессов в двух и трёхмерных активных средах предоставляют методы компьютерного моделирования с помощью разнообразных моделей.

В наших исследованиях внимание, главным образом, уделяется спиральным и концентрическим волнам, которые были обнаружены не только в активных двумерных средах (уравнение Гинзбурга-Ландау), но и в ансамблях осцилляторов ФитцХью-Нагумо, осцилляторов Ресслера, химических

реакциях, в двумерной решетке дискретной модели нейрона Некоркина, осцилляторов Ван дер Поля.

Целью выпускной квалификационной работы (магистерской работы) является исследование динамики двумерной решетки нелокально связанных отображений Рутькова и выявление режимов существования спиральных и концентрических волновых структур. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести исследование особенностей динамики отображения Рутькова в зависимости от изменения значений его управляющих параметров, построить фазовые портреты и временные реализации.

2. Провести численное исследование пространственно-временной динамики и режимов волновых структур в двумерной решетке нелокально связанных отображений Рутькова при изменении управляющих параметров отображения и различных значениях радиуса и силы нелокальной связи. Получить, проиллюстрировать и описать основные пространственно-временные режимы и волновые структуры (спиральные и концентрические волны).

Для проведения численных исследований было использовано программное обеспечение «Программа для моделирования сетей динамических элементов со сложными связями» (авторы: А.В. Бух и В.С. Анищенко).

1 Исследование динамики отображения Рулькова при вариации управляющих параметров

Для упрощения нейронных моделей исключают из модели те ионные токи, которые представляются маловажными, и объединяют в одну переменную токов, сходных по своему действию. Однако и в этом случае требуется не менее трёх уравнений, чтобы воспроизвести, например, режим пачечной активности нейрона. Ниже будет показано, как сложная динамика нейрона может быть смоделирована двумерным отображением. Такая модель с дискретным временем способна воспроизвести не только устойчивые режимы, но и характерный отклик нейрона на внешнее воздействие.

Главными особенностями нейрона можно считать следующее.

- В режиме спонтанной активности нейрон производит бесконечную последовательность коротких импульсов – спайков.
- В так называемом возбудимом режиме спайки не генерируются (режим молчания), но небольшое внешнее воздействие (выше некоторого порогового уровня) вызывает появление одного или нескольких спайков.
- В режиме пачечной активности (так называемый спайк – берст режим) периоды генерации спайков сменяются периодами молчания. Чередование этих двух фаз может быть как регулярным, так и хаотическим.

2 Исследуемая дискретная модель нейрона

Модельное отображение было предложено Н. Рульниковым и состоит из двух рекуррентных соотношений (1) – (2), первое из которых описывает процесс генерации спайка, а второе – ответственно за относительно медленные изменения режима:

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n - \mu(x_n + 1 - \sigma), \quad (2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} + y, & x \leq 0 \\ a + y, & 0 < x < \alpha + y \\ -1, & x \geq \alpha + y \end{cases} \quad (3)$$

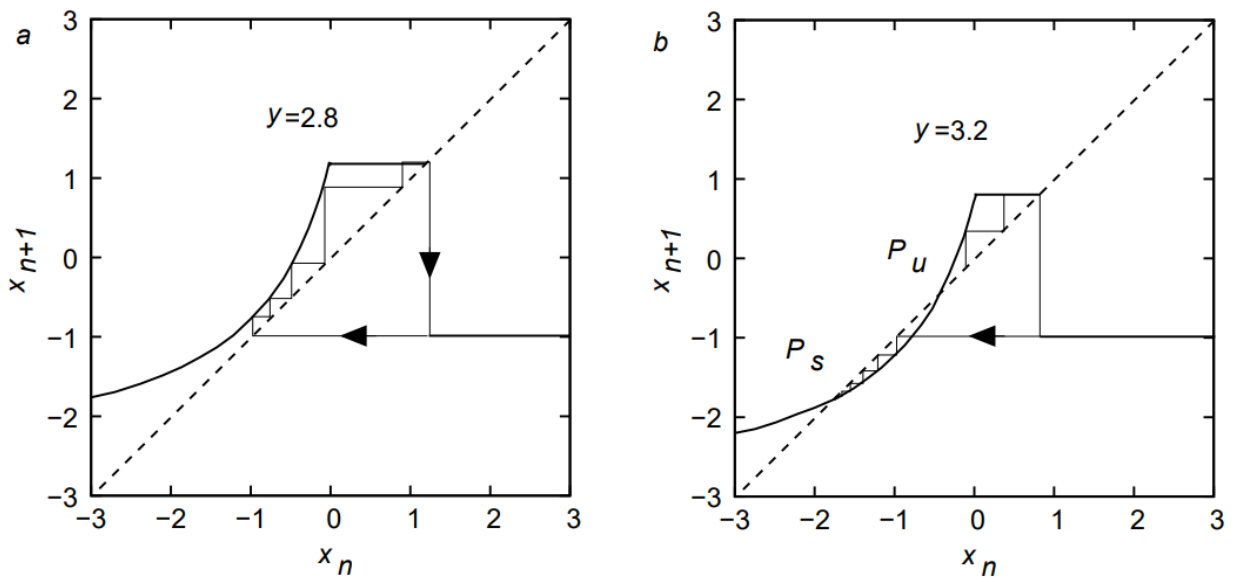
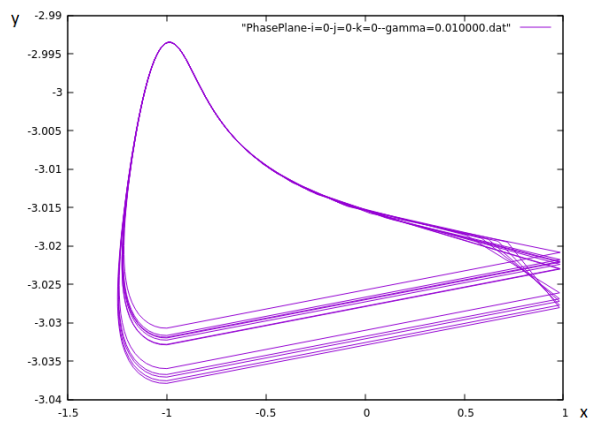


Рисунок 2. Вид функции последования модельного отображения (15)-(17): $a - y = -2.8$; $b - y = -3.2$

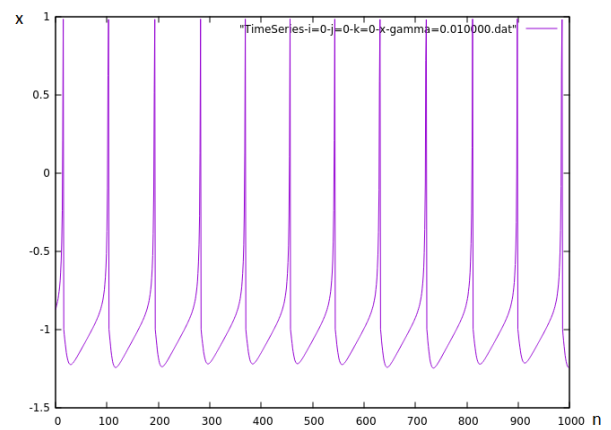
Численные результаты

Проведем численное исследование режимов динамики отображения Рулькова при изменении его управляющих параметров и представим ряд фазовых портретов и временных зависимостей для переменной x .

Зафиксируем параметры $\alpha = 0.01$ и $\sigma = 2$ и будем увеличивать значение параметра μ от $\mu = 0.005$. Результаты расчетов и построения фазовых портретов и временных реализаций для переменной x представлены на следующих рисунках.

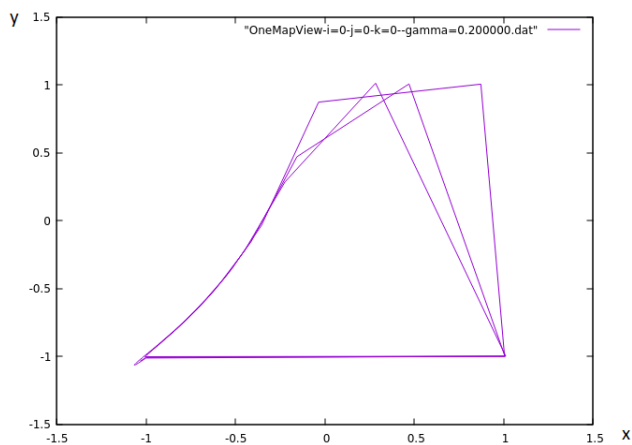


(a)

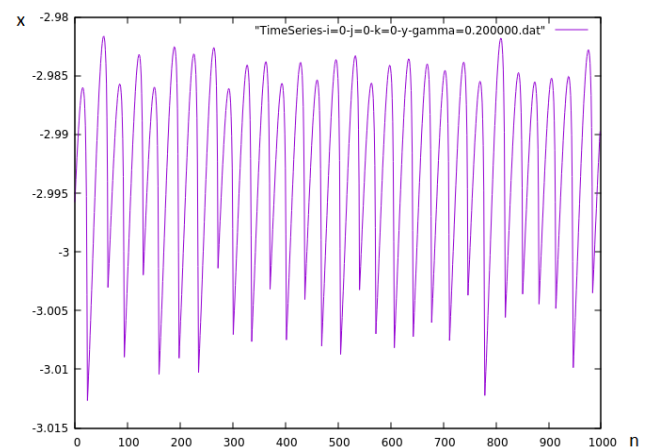


(б)

Рисунок 2 – Фазовый портрет (а) и временной ряд $x(t)$ (б) отображения (15)-(17), соответствующий спайковому поведению. Параметр $\mu = 0.005$



(a)



(б)

Рисунок 3 - Фазовый портрет (а) и временной ряд $x(t)$ (б) отображения (15)-(17), соответствующий спайковому поведению. Параметр $\alpha = 0.2$

Из рисунков 2, 3 видно, что при увеличении параметра α , частота спайковых колебаний также нарастает, а при $\alpha = 0.2$ (рисунок 3) можно сказать, что данная временная зависимость отражает наличие практически хаотической динамики.

3 Исследование пространственно-временной динамики и волновых структур в двумерной решётке нелокально связанных отображений Рулькова

Модель двумерной решётки

В настоящем случае в качестве индивидуального элемента выбирается двумерное отображение Рулькова, описываемого системой уравнений (1)-(3). В силу того, что очень важно понимать условия задачи, приведем некоторые описания, которые касаются изучаемой в настоящем разделе ансамбля. Таким образом, изучаемая модель двумерной $N \times N$ – решетки задается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}x_{i,j}^{n+1} &= f_x(x_{i,j}^n, y_{i,j}^n) + \frac{\sigma_x}{B_{i,j}} \sum_{m,n} [f_x(x_{m,n}^n, y_{m,n}^n) - f_x(x_{i,j}^n, y_{i,j}^n)], \\y_{i,j}^{t+1} &= f_y(x_{i,j}^n, y_{i,j}^n) + \frac{\sigma_y}{B_{i,j}} \sum_{m,n} [f_y(x_{m,n}^n, y_{m,n}^n) - f_y(x_{i,j}^n, y_{i,j}^n)]\end{aligned}\quad (4)$$

Где функция f_x определяется условием (3), функция f_y задаётся выражением $y_{i,j}^n - \mu(x_{i,j}^n + 1) + \mu\sigma$, $m, n \in \mathbb{N}$, σ_x и σ_y - коэффициенты нелокальной связи по переменным x и y , соответственно.

$$\begin{cases} i - P \leq m \leq i + P \\ j - P \leq n \leq j + P, m \neq n, \end{cases}\quad (5)$$

$$\begin{cases} \max(1, i - P) \leq m \leq \min(N, i + P) \\ \max(1, j - P) \leq \min(N, j + P), m \neq n \end{cases}\quad (6)$$

Двойной индекс динамических переменных x_{ij}, y_{ij} при $i, j=1, \dots, N$ относится к положению на двумерной решётке. Параметр σ обозначает силу связи между элементами переменной x , $B_{i,j}$ - даёт размер связанной области, т.е. количество комбинаций m, n в условиях (5) и (6) для (i, j) узлов.

В случае периодических граничных условий имеем $B_{i,j} = (2P + 1)^n$, где P определяет диапазон нелокальной связи, т.е. число ближайших соседей узла (i, j) с каждой стороны. Схема связи представлена на рисунке 4.

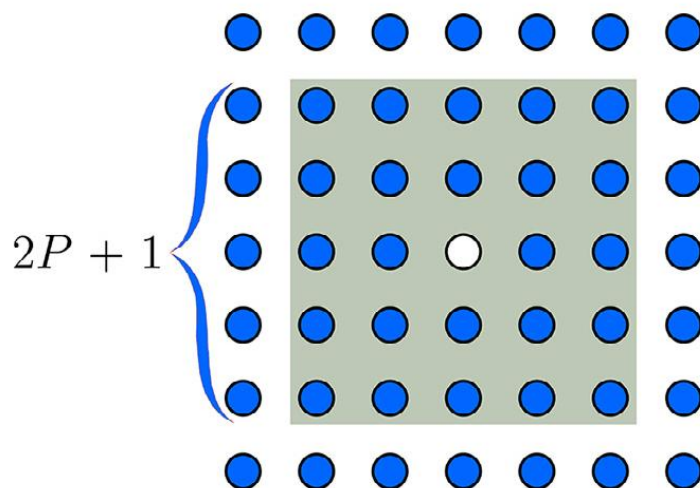


Рисунок 4 - Топология связи для выбранного элемента решетки при $P = 2$

Концентрические волновые структуры в решётке отображений Рулькова

Рассмотрим особенности динамики модели решетки (4) в случае нелокальной связи по переменной y , которая характеризуется силой связи σ_y . При этом $\sigma_x = 0$. Количество узлов решетки $N = 200$.

Зафиксируем значения параметров индивидуального отображения и параметров связи: $\mu=0.001$, $\sigma=0.38$, радиус связи $P=1$ (случай локальной связи). Будем изменять параметр α в интервале $[2.7; 9.0]$. Как показывают расчеты, в этом случае при определенных значениях силы нелокальной связи σ_y реализуются так называемые концентрические волны различной конфигурации. Примеры полученных волновых структур представлены на рисунке 5(а,б).

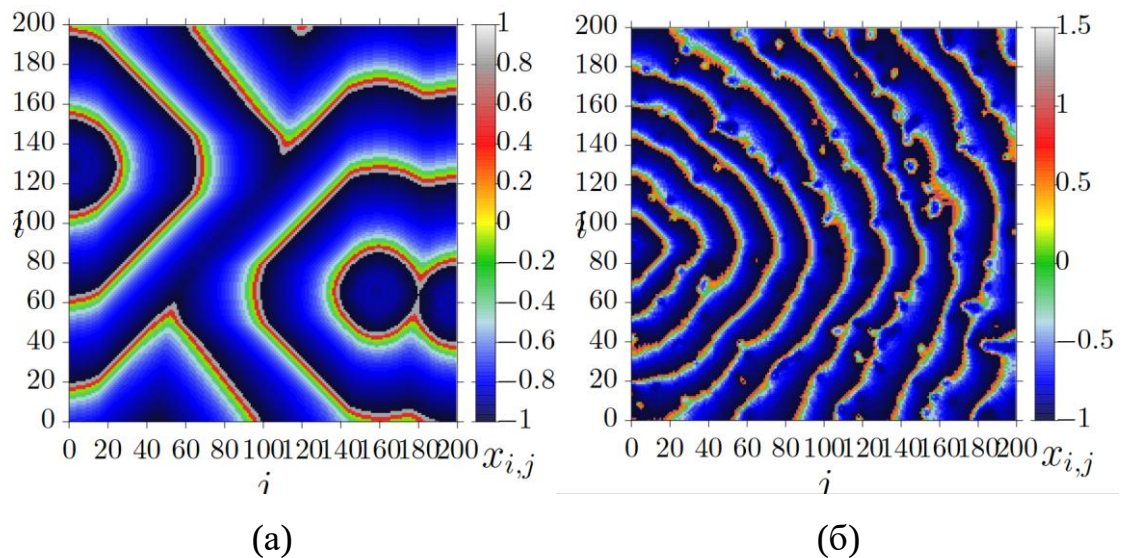


Рисунок 5— Концентрические волны. Параметры: $\sigma=0.38, \mu=0.001, \sigma_y=0.4, \alpha=3.6$ (a); $\sigma=0.38, \mu=0.001, \sigma_y=0.5, \alpha=4.0$ (б)

Довольно интересная пространственно-временная динамика наблюдается в решетке (4) в случае, когда значения параметра α соответствуют образованию групп спайков. Причем количество спайков в каждой группе зависит от изменения значения параметра α , а при достаточно большом значении $\alpha > 6$ спайковая динамика внутри берстов является хаотической. Ниже приведены иллюстрации различных пространственно-временных режимов, включая возникновение концентрических волн, для случая, когда локальная динамика индивидуальных осцилляторов решетки является хаотической (рисунок 6 а,б).

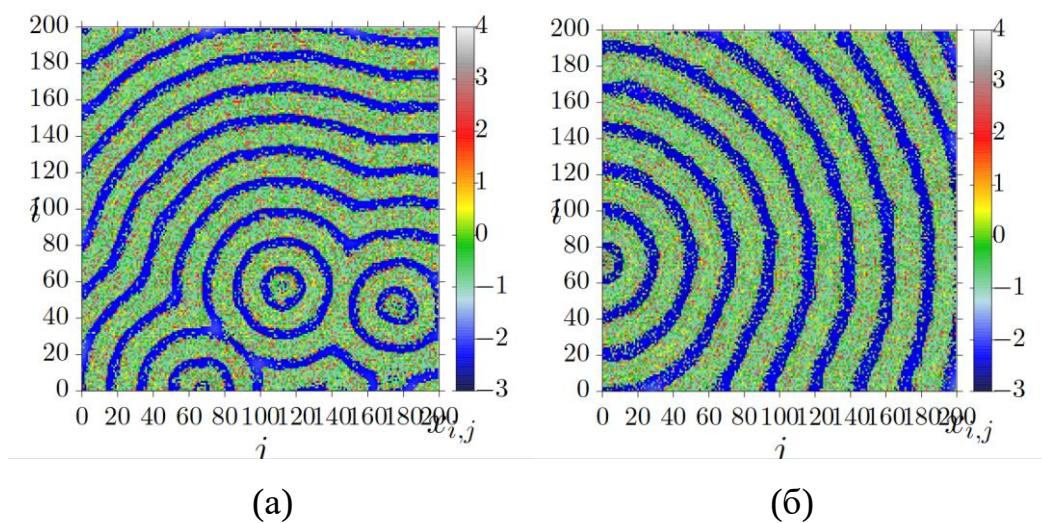


Рисунок 6 – Концентрические волны на фоне хаоса. Параметры: $\sigma=0.38, \mu=0.001, \sigma_y=0.3, \alpha=7.5$ (a); $\sigma=0.38, \mu=0.001, \sigma_y=0.4, \alpha=7.8$ (б)

4 Спирально-волновые структуры в решётке отображений Рутькова в случае нелокальной связи по переменной x

Рассмотрим особенности динамики модели решётки (4) в случае нелокальной связи по переменной x (быстрая переменная), которая характеризуется силой связи σ_x . При этом $\sigma_y = 0$. В данном разделе будут представлены результаты расчетов для решетки (4), состоящей из $N \times N = 100 \times 100$ узлов.

Спирально-волновые структуры

Выберем следующие значения для параметров отображения: $\mu = 0.05$, $\alpha = 4.0$, $\sigma = 0.1$ и параметра нелокальной связи $\sigma_x = 0.2$.

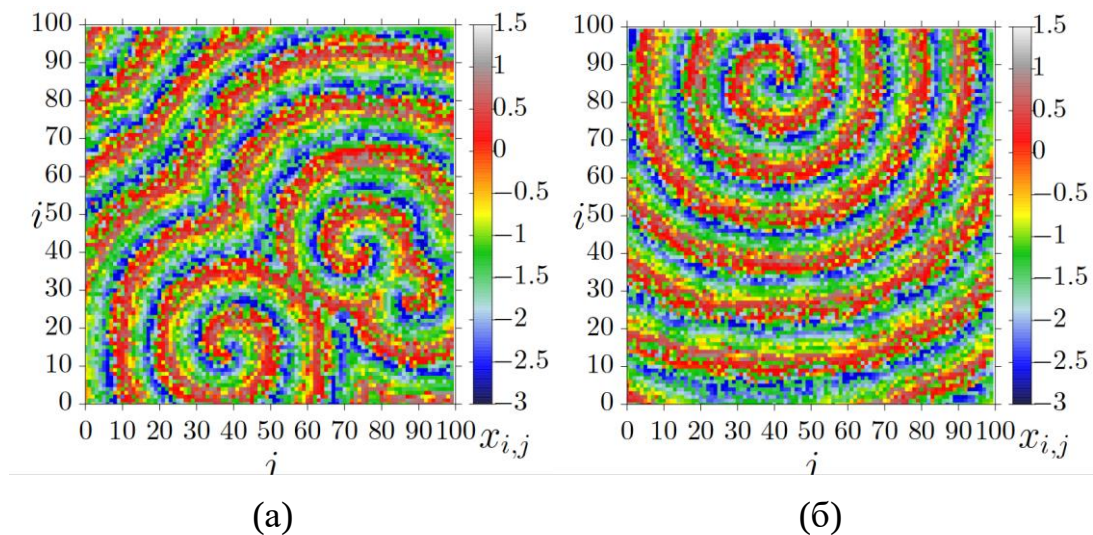


Рисунок 7 – Иллюстрация спиральной волны. Параметры: $\sigma = 0.1$, $\alpha = 4.0$, $\mu = 0.05$, $\sigma_x = 0.2$, $P = 2$ (а); $\sigma = 0.095$, $\alpha = 4.0$, $\mu = 0.05$, $\sigma_x = 0.2$, $P = 2$ (б)

Таким образом, в результате численных исследований пространственно-временной динамики решетки отображений Рутькова с нелокальной связью по переменной x (4) были получены спирально-волновые структуры. В зависимости от изменения значений параметров исследуемой сети наблюдались спирально-волновые структуры различных форм (с одним источником волны или несколькими) (рисунок 7 а,б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках выполнения и подготовки выпускной квалификационной работы были проведены численные исследования пространственно-временной динамики двумерной решетки связанных отображений Рулькова с нелокальной связью. Индивидуальное отображение Рулькова представляет собой хорошо известную феноменологическую модель нейрона в виде двумерного дискретного отображения.

В результате численного анализа решетки отображений Рулькова были впервые обнаружены волновые структуры в виде концентрических и спиральных волн. Особенностью динамики исследуемой модели решетки является тот факт, что концентрические волны реализуются в случае нелокальной связи между узлами решетки через переменную y (медленная переменная в отображении Рулькова), тогда как спирально-волновые структуры наблюдаются в решетке, когда нелокальная связь вводится через переменную x (быстрая переменная). В ходе проведения исследований были установлены зависимости реализуемых волновых структур и их эволюции от изменения значений управляющих параметров индивидуального элемента решетки и значений параметров нелокальной связи.

Обнаруженные в решетке нелокально связанных отображений Рулькова волновые структуры аналогичны по своей форме и виду пространственно-волновым структурам, которые реализуются в решетках связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо, дискретных отображений Некоркина и осцилляторов Ван дер Поля.

Полученные в данной магистерской работе результаты являются новыми, оригинальными и вносят существенный вклад в изучение и анализ эволюции пространственно-временных и пространственно-волновых структур, реализующихся в двумерных сетях моделей нейронов с нелокальной связью. Данное направление исследований в нелинейной динамике является актуальным и имеет непосредственный важный прикладной аспект при

изучении формирования, эволюции и разрушения волновых структур различного типа, которые возникают на поверхности сердечной ткани в условиях аритмии, тахикардии, фибрилляции сердца. Известно, что режимы концентрических волн соответствуют нормальной деятельности сердечной мышцы, тогда как возникновение спиральных волн свидетельствует о наличии явной патологии в работе сердца, которая должна быть вовремя диагностирована и предприняты соответствующие меры по подавлению (разрушению) таких волновых структур.