

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

**Влияние слабой диссипации на динамику гамильтоновых систем со
структурой типа «паутина» в фазовом пространстве**

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД ОБ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ПОДГОТОВЛЕННОЙ
НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ (ДИССЕРТАЦИИ)

аспиранта 4 курса 401 группы
направления 03.06.01 «Физика и астрономия»
факультета нелинейных процессов

Фельк Екатерины Викторовны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

_____ А.В. Савин

Саратов 2019

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Известно, что реальные системы могут быть представлены и исследованы в виде математических моделей. Одним из наиболее распространенных типов математических моделей является динамическая система. Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого задан закон эволюции, а он в свою очередь определяет изменения начальных условий с течением времени. Природа динамических систем довольно разнообразна, они могут описывать динамику физических, биологических, экономических, социальных процессов и т. д. Особенно широкое распространение получило исследование динамических систем как математических моделей радиофизических колебательных систем. К примеру, генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова¹, содержащий LRC-контур, усилитель, цепь обратной связи и инерционный блок. Данная система может генерировать хаотические колебания. Или осциллятор Дуффинга², для которого возможна реализация в виде электрической схемы – колебательный контур с нелинейной индуктивностью; в системе также наблюдаются хаотические и периодические режимы. Также примером может служить отображение Икеды³, которое представляет из себя модель возбуждаемого лазером кольцевого генератора с нелинейной средой. В данной нелинейной оптической системе возникают нетривиальные колебательные режимы и хаос. Кроме того к математическим

¹ Астахов В.С., Вадивасова Т.Е. Анищенко В.С., 'Генератор Анищенко-Астахова как одна из базовых моделей детерминированного хаоса', *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика*, 2005, pp. 54-68.

² Ueda Y., 'Explosion of strange attractors exhibited by duffing's equation', *Nonlinear Dynamics*, December 1980, pp. 422-34.

³ H. Daido, O. Akimoto K. Ikeda, 'Optical Turbulence: Chaotic Behavior of Transmitted Light from a Ring Cavity', *Phys. Rev. Lett.* , September 1980, p. 709.

моделям радиофизических систем можно отнести систему Чуа⁴, кольцевой генератор Дмитрия-Кислова⁵, отображение Заславского⁶ и т.д.

К настоящему времени одной из задач радиофизики стало исследование сложных хаотических колебаний, характеризующихся существенной зависимостью от начальных условий, в том числе закономерностей их возникновения. Как правило, с этой целью используются сравнительно простые динамические системы, в частности, разного рода нелинейные осцилляторы, в том числе неавтономные. Обнаруженные на таких системах закономерности, как правило, проявляются в схожем виде и в реальных системах.

В нелинейной динамике выделяют два класса динамических систем – консервативные и диссипативные. Первые отличаются сохранением фазового объема на протяжении всего времени и наличием эллиптических и гиперболических точек в фазовом пространстве. Диссипативные же системы характеризуются наличием переходного процесса и установившихся колебаний с существованием притягивающих множеств – аттракторов. Консервативные системы могут служить моделями физических систем с сохранением энергии, а диссипативные – систем с потерями энергии, в том числе автоколебательных.

Кроме того, хорошо известно, что свойства хаотической динамики и сценарии перехода к хаосу в консервативных и диссипативных динамических системах существенно различаются. В частности, хаос в неинтегрируемых консервативных системах наблюдается при любых значениях параметров, но, как правило, в ограниченной области фазового пространства; в диссипативных же хаос возникает только в определенном диапазоне параметров, а бассейн притяжения хаотического режима занимает значительную часть фазового пространства⁶.

⁴ Т. Matsumoto L. O. Chua M. Komuro, 'The double scroll bifurcations', *International Journal of Circuit Theory and Applications banner*, April 1986, pp. 117-46.

⁵ Залогин Н.Н., Мясин Е.А. Кислов В.Я., 'Исследование стохастических автоколебательных режимов в автогенераторах с запаздыванием', *Радиотехника и электроника*, 1979, р. 1118.

⁶ Р.З. Сагдеев, Д.А. Усиков, А.А. Черников Г.М. Заславский, *Слабый хаос и квазирегулярные структуры* (Москва: Наука, 1991), р. 100.

Хотя реализация системы с сохранением энергии в реальном физическом эксперименте довольно затруднительна, вполне возможна реализация (в т. ч. в виде радиофизического устройства) системы с весьма малой диссипацией. С точки зрения нелинейной динамики такая система может быть представлена как консервативная система с малым диссипативным возмущением. При этом естественно ожидать, что система перейдет в пограничное состояние, которое может демонстрировать характерные черты как консервативной, так и диссипативной динамики. К настоящему времени известно значительное число работ, посвященных изучению таких систем. В частности, обнаружено, что для таких систем свойственно сосуществование очень большого числа регулярных аттракторов⁷. Поэтому случай слабой диссипации необходимо рассматривать отдельно и выделять данные системы в особый класс.

Несмотря на существование большого количества исследований, почти во всех работах исследовалась динамика систем общего вида (невырожденных в смысле КАМ-теоремы). В настоящей работе исследуется влияние слабой диссипации на динамику систем, фазовое пространство которых отличается от типичного для невырожденных систем и демонстрирует структуру типа «паутина». Она характерна тем, что в фазовом пространстве существует неограниченная диффузия, при которой фазовая траектория может переместиться сколь угодно далеко от начальных условий. Структуры такого рода могут иметь различную природу и возникать вследствие вырождения, образования сети резонансных линий или особого вида потенциального поля. В частности, в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы резонансные области с хаотической динамикой разделены КАМ-торами, так диффузия в радиальном направлении невозможна до тех пор, пока все КАМ-торы не разрушатся. Заславский⁶ показал, что в неавтономной вырожденной системе с одной степенью свободы резонанс наблюдается во всем фазовом пространстве одновременно. Так «паутина», образованная на месте разрушенных сепаратрис,

⁷ C. Grebogi, B.R. Hunt, J.A. Yorke U. Feudel, 'Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors', *Phys. Rev. E*, 54 (1996), 71–81.

охватывает все фазовое пространство и формирует структуры с вращательной и трансляционной симметриями, что приводит к неограниченной диффузии в радиальном направлении при любой малой амплитуде возмущения. Кроме того, подобная структура «паутина» может возникать в системах с определенным видом потенциала.

Таким образом, данная тема является актуальной и интересной задачей радиофизики, которая рассматривается в контексте моделей различных колебательных и автоколебательных систем в форме разнообразных осцилляторов.

Цели и задачи работы

Целью данной диссертации является исследование влияния слабой диссипации на динамику систем, демонстрирующих в консервативном случае структуры типа "паутина" в фазовом пространстве: стохастическую паутину Заславского, паутину Арнольда и динамику, связанную с движением консервативной системы в минимуме периодического потенциала.

Для достижения данной цели решались следующие задачи:

- 1) Исследование динамики линейного осциллятора под воздействием нелинейно зависящих от его координаты импульсов в случае введения слабой нелинейной диссипации, в том числе:
 - исследование эволюции устройства фазового пространства при изменении уровня диссипации и амплитуды воздействия;
 - выявление бифуркационного сценария рождения/исчезновения аттракторов при изменении диссипации;
 - выявление сценариев перехода к хаосу при изменении амплитуды внешнего воздействия;
- 2) Исследование влияния слабой линейной диссипации на динамику системы двух связанных отображений поворота, демонстрирующую в консервативном случае диффузию Арнольда, в том числе

- исследование устройства пространства действий в консервативном и диссипативном случае;
- анализ хаотического переходного процесса и выявление седлового хаотического множества;

3) Исследование влияния слабой нелинейной диссипации на динамику двух ротаторов, движущихся в периодическом потенциале, в том числе:

- исследование устройства конфигурационного пространства в консервативном и слабодиссипативном случаях;
- исследование трансформации циклов при увеличении уровня диссипации.

Методология и методы исследования

Основным методом исследования является вычислительный эксперимент. Решение дифференциальных уравнений проводится с помощью численного интегрирования методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Для исследования динамики применялись как традиционные методы, такие как построение фазовых портретов в стробоскопическом сечении, устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек, бифуркационных деревьев, карт динамических режимов и ляпуновских показателей, так и разработанные автором методы: определения длительности хаотического переходного процесса и построения «карт длительности» на фазовой плоскости. Для поиска хаотического седла в системе связанных отображений поворота был адаптирован Stagger-and-Step метод⁸.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов подтверждается воспроизводимостью всех численных экспериментов, совпадением результатов,

⁸ Nusse HE, Yorke JA Sweet D, 'Stagger-and-step method: detecting and computing chaotic saddles in higher dimensions', *Phys Rev Lett.*, 86 (2001), 2261-4.

полученных независимыми методами, хорошим совпадением получаемых в предельных случаях результатов с известными из литературы.

Личный вклад соискателя

Для всех исследованных в диссертации систем лично соискателем был выполнен теоретический анализ исследуемых систем, разработаны программы для компьютерного моделирования и проведены численные расчеты. Постановка задач, определение методов исследования, обсуждения и интерпретация полученных результатов осуществлялись совместно с научным руководителем и соавторами публикаций.

Научная новизна

Все результаты, включенные в данную работу, являются новыми, в частности:

1) впервые было исследовано влияние слабой диссипации на вырожденную в смысле КАМ-теоремы систему со стохастической паутиной с введением нелинейной диссипации по типу Ван дер Поля; был выявлен основной бифуркационный сценарий при изменении нелинейной диссипации и при увеличении амплитуды внешнего воздействия; также были исследованы сценарии перехода к хаосу в данной системе;

2) впервые было подробно исследовано влияние слабой диссипации на динамику системы с паутиной Арнольда на примере двух связанных отображений поворота; в системе был выявлен хаотический переходный процесс и разработан метод построения карт длительности переходного процесса; кроме того было впервые обнаружено хаотическое седло в данной системе;

3) впервые было изучено влияние слабой диссипации на динамику двумерного аналога системы трех связанных ротаторов с автоколебательной диссипацией; для данной системы была проанализирована структура

конфигурационного пространства, обнаружены долгопериодические циклы и пролетные траектории; а также исследована трансформация циклов с увеличением слабой диссипации; разработан метод построения карт вероятностей пролетных траекторий;

Научно-практическая значимость

Научная значимость результатов заключается в том, что впервые проведено исследование влияния слабой диссипации на динамику особого класса консервативных систем: имеющих в фазовом пространстве структуру типа «паутина».

Практическое значение результатов диссертации связано с тем, что несмотря на достаточно высокое вырождение, такие системы возникают в ряде практических задач: физики плазмы⁹, ультра холодных атомов оптических решеток¹⁰, движения электронов в полупроводниковых сверхрешетках¹¹, движение ридберговских атомов¹², а также имеют связь с небесной механикой¹³, и полученные в диссертации результаты могут быть использованы при интерпретации результатов экспериментальных наблюдений.

Положения, выносимые на защиту

1. В вырожденной системе с 1.5 степенями свободы – линейном осцилляторе под воздействием нелинейно зависящих от координаты импульсов — при введении слабого нелинейного диссипативного

⁹ H. Haffer, A. Browaeys, N. R. Heckenberg, K. Helmerson, C. McKenzie, G. J. Milburn, W. D. Phillips, S. L. Rolston, H. Rubinsztein-Dunlop, and B. Upcroft W. K. Hensinger, 'Dynamical tunnelling of ultracold atoms', *Nature*, 412 (2001), 52–55.

¹⁰ Greenaway M. T., Fromhold T. M. Welch N., 'Effects of classical stochastic webs on the quantum dynamics of cold atomic gases in a moving optical lattice.', *Physical Review A*, 96 (2017).

¹¹ P.V.E. McClintock, T.M. Fromhold, I.A. Khovanov and R. Mannella S.M. Soskin, 'Stochastic webs and quantum transport in superlattices: an introductory review', *Contemporary Physics*, 2009, 1–23.

¹² Srećković V. A., Zalam A. A., Bezuglov N. N. Dimitrijević M. S., 'Dynamic Instability of Rydberg Atomic Complexes', *Atoms*, 7 (2019), 22.

¹³ J. Touma and S. Tremaine, 'A map for eccentric orbits in non-axisymmetric potentials', *Monthly Notices of Roy. Astron. Soc.*, 292 (1997), 905–919.

возмущения реализуется определенный сценарий эволюции сосуществующих аттракторов, заключающийся в том, что существующие аттракторы исчезают в результате последовательности седло-узловых бифуркаций, начиная с наиболее удаленных от начала координат. В окрестности же начала координат происходит рождение инвариантной кривой либо из гетероклинической траектории седлового цикла, либо вследствие бифуркации Неймарка-Сакера ближайшей к началу координат неподвижной точки.

2. В вырожденной системе с 1.5 степенями свободы – линейном осцилляторе под воздействием нелинейно зависящих от координаты импульсов – при наличии слабого нелинейного диссипативного возмущения с увеличением амплитуды импульсов наблюдается жесткий переход к хаосу для симметрий всех порядков, кроме третьего, для которого переход осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода.
3. В системе двух связанных отображений поворота при введении слабой линейной диссипации в окрестности существовавшей в консервативном случае резонансной паутины возникает хаотическое седловое множество.
4. В системе двух связанных ротаторов в общем периодическом потенциале при введении слабой нелинейной диссипации доля траекторий, уходящих от начальной точки в фазовом пространстве на значительное расстояние, уменьшается при увеличении нелинейной диссипации.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 108 страниц текста, включая 60 рисунков и список литературы из 129 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность проводимых в работе исследований, а также степень их разработанности в существующей литературе. Обозначены цель и задачи диссертации, научная новизна, теоретическая и практическая значимости. Представлен список методов исследования, сформулированы основные положения и результаты, выносимые на защиту. Обоснована достоверность полученных результатов, указан личный вклад соискателя, сведения об апробации результатов со списком публикаций и научных конференций, где были представлены результаты, а также кратко изложено содержание работы.

В **первой главе** проводится изучение влияния слабой нелинейной диссипации на вырожденную в смысле КАМ-теоремы систему с 1.5 степенями свободы (неавтономный линейных осциллятор), демонстрирующую "стохастическую паутину" в фазовом пространстве.

$$\ddot{x} + (\gamma - \mu x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\omega_0 K}{T} \cos(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (1)$$

Приводится краткий теоретический обзор и описывается способ образования данной паутины в гамильтоновых вырожденных системах. Исследованы трансформации фазового пространства такой системы при увеличении нелинейной диссипации, а также амплитуды воздействия в случае симметрии различных порядков. В ходе изучения был выявлен основной бифуркационный сценарий эволюции аттракторов при увеличении диссипации, который заключается в том, что сосуществующие аттракторы последовательно сливаются с седловыми точками через бифуркацию седло-узел (рис. 1). Кроме того было обнаружены нелокальные бифуркации, связанные с образованием гетероклинического цикла и приводящие к рождению квазипериодической динамики (рис. 2).

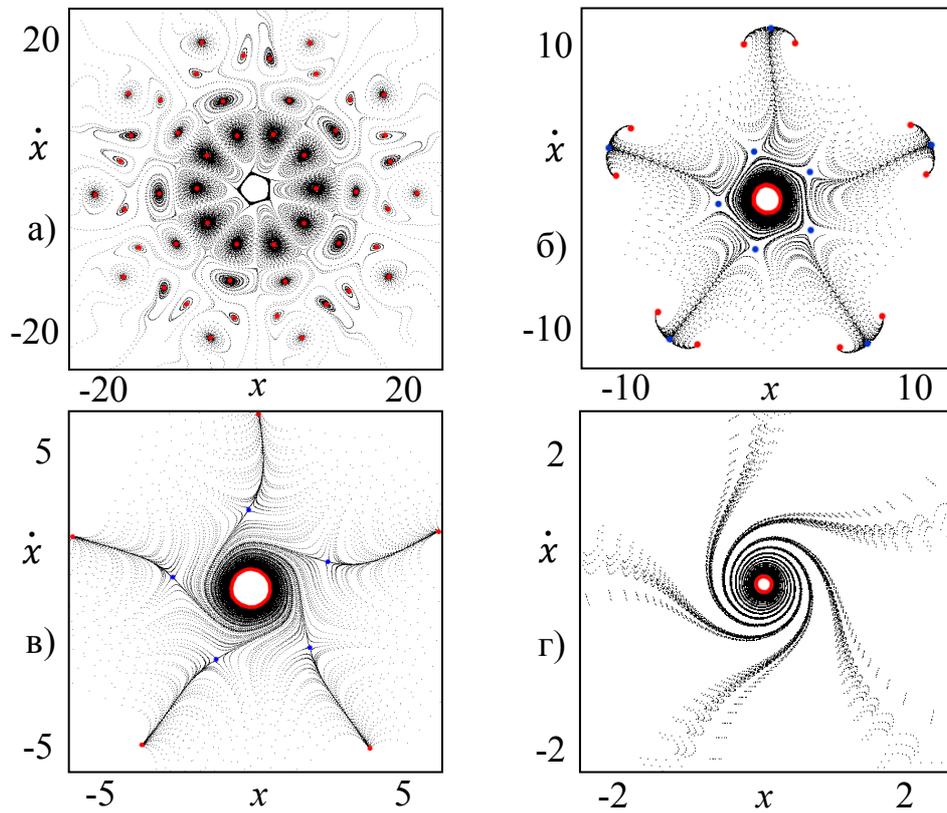


Рис.1. Фазовые портреты системы (1) при $q=5$, $K=0.1$, $\gamma=-1 \cdot 10^{-4}$ и различных значениях параметра μ : $\mu=-5 \cdot 10^{-5}$ (а), $\mu=-5 \cdot 10^{-4}$ (б); $\mu=-2 \cdot 10^{-3}$ (в); $\mu=-5 \cdot 10^{-2}$ (г). Красными кружками обозначены устойчивые неподвижные точки, синими - неустойчивые.

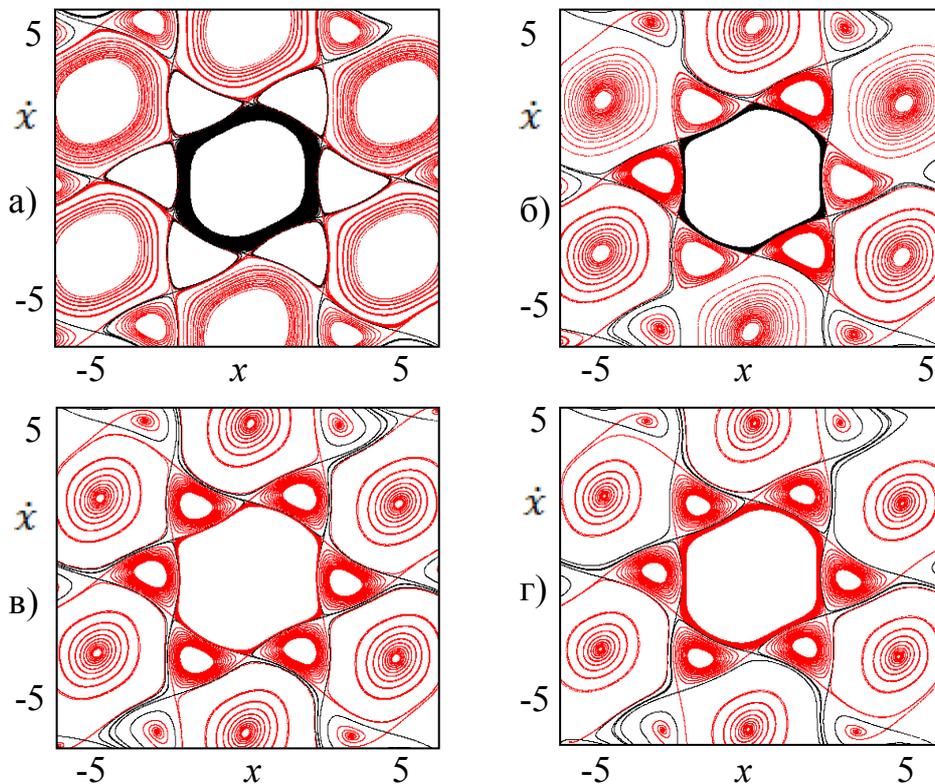


Рис.2. Устойчивые и неустойчивые многообразия при $\varphi = \pi/2$, $q=3$, $K=0.3$, $\gamma=-1 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях параметра μ : $\mu=-1 \cdot 10^{-4}$ (а), $\mu=-3 \cdot 10^{-4}$ (б); $\mu=-4 \cdot 10^{-4}$ (в), $\mu=-5 \cdot 10^{-4}$ (г). Устойчивые многообразия обозначены черным цветом, неустойчивые – красным.

Также было проведено исследование особенностей перехода к хаосу при увеличении амплитуды импульсов. Обнаружено, что переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода наблюдается только для резонанса третьего порядка (рис. 3), а при резонансах других порядков реализуются жесткие переходы к хаосу, характерные для слабодиссипативных систем.

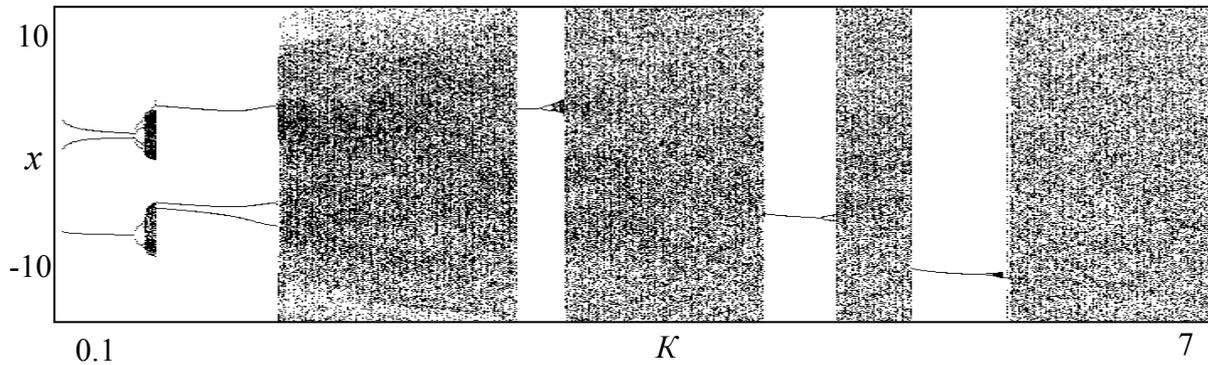


Рис.3. Бифуркационное дерево при $\varphi=0$, $q=3$, $\gamma=1 \cdot 10^{-3}$, $\mu=5 \cdot 10^{-3}$.

Во **второй главе** исследуется влияние слабой линейной диссипации на динамику системы с диффузией Арнольда на примере двух связанных отображений поворота.

$$\begin{cases} \varphi_1^{n+1} = \varphi_1^n + I_1^n \\ I_1^{n+1} = \alpha I_1^n + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varphi_1^n}(\varphi_1^n + I_1^n, \varphi_2^n + I_2^n) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \varphi_2^{n+1} = \varphi_2^n + I_2^n \\ I_2^{n+1} = \alpha I_2^n + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varphi_2^n}(\varphi_1^n + I_1^n, \varphi_2^n + I_2^n) \end{cases}$$

где $f(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 4}$.

Проведены исследования влияния слабой диссипации на устройство пространства действия. В частности, обнаружен хаотический переходной процесс, при котором динамика системы хаотична на конечном периоде времени, но аттрактор регулярен (рис. 4).

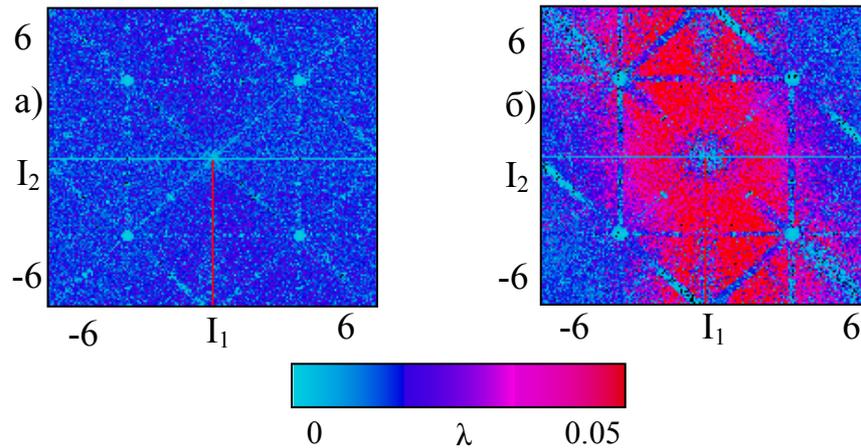


Рис.4. Карты ляпуновских показателей системы (2) при $\alpha = 0.999$, $\varepsilon=0.6$ при различном числе итераций N : а) $N=10000$; б) $N=1000$. Значения ляпуновских показателей соответствуют цветовой схеме.

Разработан метод визуализации длительности хаотического переходного процесса и построены соответствующие карты, а также графики зависимостей показателя Ляпунова, рассчитанного на конечном времени, от длины реализации. Методом Stagger-and-Step было обнаружено хаотическое седло, наличие которого и обеспечивает хаотический переходной процесс (рис. 5).

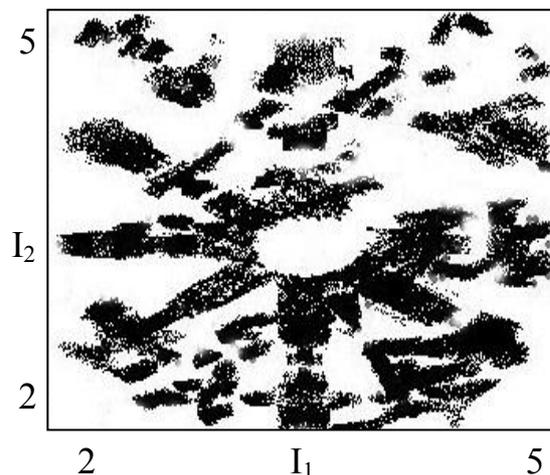


Рис.5. Хаотическое седло системы (2) при $\alpha=0.9999$, $\varepsilon=0$, $T^*=3000$.

В третьей главе исследуется влияние слабой нелинейной диссипации автоколебательного типа на динамику системы двух связанных ротаторов, находящихся в общем периодическом потенциале.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \nu[\mu - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)]\dot{x}_1^2 + (\cos x_1 + \cos x_2) \sin x_1, \\ \ddot{x}_2 &= \nu[\mu - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)]\dot{x}_2^2 + (\cos x_1 + \cos x_2) \sin x_2\end{aligned}\quad (3)$$

Эта система является двумерным аналогом¹⁴ системы, эквивалентной механической системе «тройное соединение» (механический шарнирный механизм Терстона-Уикса-Маккея-Ханта¹⁵).

Показано, что в консервативном случае траектории в конфигурационном пространстве могут иметь вид паутины, расположенной вблизи минимума потенциала. Обнаружено, что в этом случае возможны долгопериодические циклы, а также «пролетные» траектории, которые неустойчивы по Пуассону. Было вычислено точное положение некоторых долгопериодических циклов. Проведено исследование изменения динамики системы при переходе к диссипативному случаю, в частности, изучены трансформации циклов и пролетные траектории (рис. 6). Для этого был предложен метод построения карт вероятности пролетных траекторий, которые показали, что с увеличением диссипации количество пролетных траекторий уменьшается.

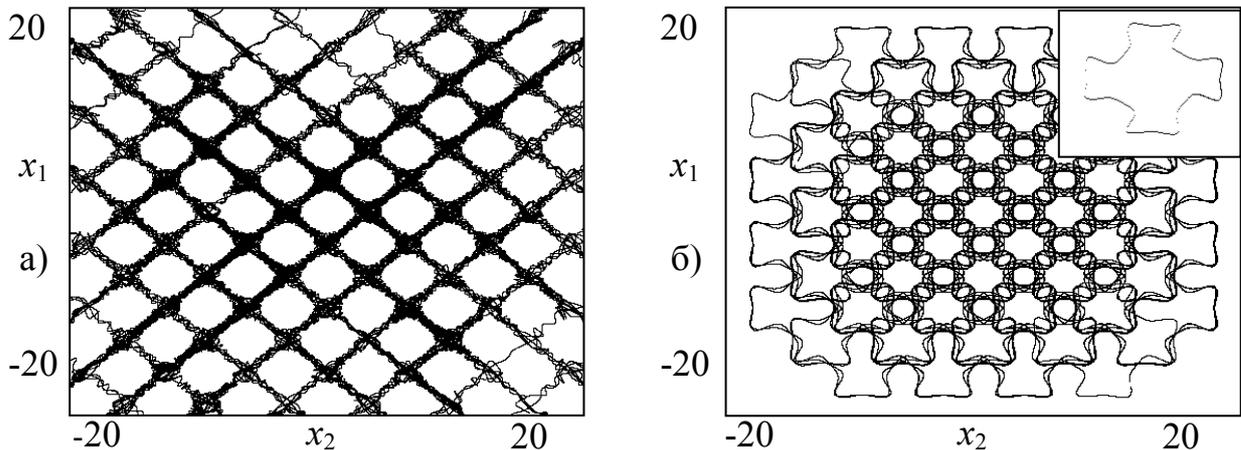


Рис.6. Конфигурационные пространства системы (3) при заданной сетке начальных условий при $\nu=5$ и различных значениях μ : а) $\mu=0.1$; б) $\mu=0.4$. В верхнем правом углу представлен вид одиночного цикла.

¹⁴ С. П. Кузнецов, 'Хаос в системе трех связанных ротаторов: от динамики Аносова к гиперболическому аттрактору', *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*, 15 (2015), 5-17.

¹⁵ Уикс Д. Р. Терстон У. П., 'Математика трехмерных многообразий', *В мире науки*, 1984, 74-88.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В данной диссертации было исследовано влияние слабой диссипации на системы, фазовое устройство которых обладает структурой «паутина» различного происхождения.

В первой главе исследовался линейный осциллятор с внешним импульсным воздействием, в который была введена нелинейная диссипация по типу Ван дер Поля. Фазовые портреты данной системы демонстрируют стохастическую паутину, так как система является вырожденной в смысле КАМ-теоремы. Был выявлен типичный бифуркационный сценарий эволюции аттракторов с увеличением нелинейной диссипации – попарное слияние через бифуркацию седло-узел, а также образование инвариантной кривой вблизи начала координат из гетероклинической траектории седлового цикла или бифуркации Неймарка-Сакера. Также были изучены сценарии перехода к хаосу при увеличении нелинейной диссипации и изменении уровня внешнего импульсного воздействия. Для порядка резонанса 3 наблюдался каскад бифуркаций удвоения периода, а для всех остальных порядков переход к хаосу осуществлялся жестким образом.

Во второй главе изучалась четырехмерная система - два связанных отображения поворота, в которой реализуется динамика на паутине «Арнольда». Было показано, что при добавлении слабой линейной диссипации на месте резонансной паутины возникает хаотическое седловое множество, что приводит к реализации хаотического переходного процесса. Также было показано, что структура фазового пространства принимает вид квадратной решетки, при этом пропадает диффузия вдоль диагональных направлений при увеличении диссипации.

Третья глава была посвящена аналогу механической системы тройное соединение, которое было получено предшественниками аналитически путем

замены механической связи на воздействие потенциального поля. В результате данного перехода в конфигурационном пространстве системы траектории накладываются вдоль линий минимума потенциала, образуя «паутину». При изучении данной системы под воздействием слабой диссипации было выяснено, что число пролетных траекторий уменьшается.

ПУБЛИКАЦИИ И АПРОБАЦИЯ

Результаты работы были представлены на конференциях:

всероссийская конференция молодых ученых "Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика" (Саратов, 2012-2018 г.); XXVI международный семинар «Nonlinear phenomena in complex systems» (Минск, 2019); международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2013, 2016 г.); XVII научная школа «Нелинейные волны - 2016» (Нижний Новгород, 2016 г.); международная конференция по нелинейной динамике «Nonlinear dynamics of deterministic and stochastic systems. Unraveling complexity» (Саратов, 2014 г.); XVII международная конференция "Foundations & Advances in Nonlinear Science" (Минск, 2014 г.); международная школа-конференция "Hamiltonian Dynamics, Non-autonomous Systems and Patterns in PDE's" (Нижний Новгород, 2014 г.); школа-конференция «Нелинейные дни для молодых в Саратове» (Саратов, 2012-2013 г.); международная конференция «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», посвященная памяти Л.П. Шильникова (Нижний Новгород, 2013г.).

Частично результаты работы были получены в ходе выполнения задач по грантам РФФИ (№ 12-02-31089, № 14-02-31067, № 15-02-02893); гранту государственной поддержки ведущих научных школ НШ-1726.2014.2. и при поддержке фонда некоммерческих программ «Династия».

Результаты опубликованы в 21 работах, из которых 4 статьи в журналах, рекомендованных ВАК, и 17 статей в сборниках тезисов докладов:

- 1) Фельк Е. В «Влияние слабой нелинейной диссипации на структуры типа «стохастическая паутина»// Известия вузов: Прикладная нелинейная динамика, 2013. – т.20. – № 3. – с.72-79. –ISSN 0869-6632
- 2) E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin. “Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation”//[Physica A: Vol 410](#), 15 September 2014, Pages 561–572
- 3) E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin. “Effect of Weak Dissipation on The Dynamics of Multidimensional Hamiltonian Systems”//Nonlinear Phenomena in Complex Systems, vol. 18, no. 2 (2015), pp. 259 - 265
- 4) E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin. “Transient chaos in multidimensional Hamiltonian system with weak dissipation”// Eur. Phys. J. Special Topics 226, 1777–1784 (2017)
- 5) Фельк Е.В., Савин А.В. “Влияние диссипативного возмущения автоколебательного типа на структуру стохастической паутины”//Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тез.докл. VII Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, с. 163-164. – 2012.–ISSN 2218-2985
- 6) E.V. Felk, A.V. Savin. «The effect of weak nonlinear dissipation»//“Динамика, бифуркации странные аттракторы” тез. докл. межд. конф., посвящ. Памяти Л.П. Шильникова. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, с 36. – 2013.
- 7) Фельк Е.В., Савин А. В. “ Трансформация аттракторов в отображении-паутине со слабодиссипативным возмущением автоколебательного типа”// “Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”: тез. докл. VIII Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, с. 163–164.–2013.–ISSN 2218-2985
- 8) Фельк Е.В., Савин А. В. «Сценарии перехода к хаосу в отображении-паутине со слабодиссипативным возмущением автоколебательного типа»// Материалы X международной школы-конференции «Хаотические

автоколебания и образование структур» (ХАОС-2013). Саратов: ООО «Издательские центр «Наука» – с.99.– 2013. – ISBN 978-5-9999-1771-3.

9) Фельк Е.В., Савин А. В. «Влияние слабой диссипации на динамику многомерных гамильтоновых систем»// Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: материалы итог. Студ. Науч. Конф.- Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, с.48-50.-2014.-ISSN2305-2937

10) E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin. “The effect of weak dissipation on the system with Arnold’s diffusion.”//Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity» 19-23 May 2014, Saratov: Saratov State University, 2014, 17-18.

11) E.V. Felk, A.V. Savin. “Transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation.”//Book of Abstracts. International Conference «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity» 19-23 May 2014, Saratov: Saratov State University, 2014, 17.

12) Фельк Е.В., Савин А.В. “Влияние слабой диссипации на динамику многомерных гамильтоновых систем” //Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тез. докл. IX Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, с. 191–192.–2014.–ISSN 2218-2985

13) E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin. “The effect of weak dissipation on the system with Arnold’s diffusion.”// “17th international conference school “foundation & advances in nonlinear science” and 2nd international symposium “advanced in nonlinear photonics””: program & book of abstracts. Minsk, publishing house of SPbSPU, 2014, p.55, ISBN 978-5-7422-4569-8.

14) E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, D.V. Savin “The effect of weak dissipation on the dynamics of degenerate Hamiltonian system”//International conference "Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE's", book of abstracts, Nizhni Novgorod – 2014, p.26.

15) Felk E.V., Kuznetsov A.P., Savin A.V. “The effect of weak dissipation on the system with Arnold's Diffusion”//International conference "Hamiltonian Dynamics,

Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE's", book of abstracts, Nizhni Novgorod – 2014, p.8.

16) Фельк Е.В., Савин А. В. “ Влияние слабой диссипации на динамику многомерных гамильтоновых систем” //“ Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”: тез. докл. X Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во «Техно-Декор», с. 176–177.–2015.

17) Фельк Е.В., Савин А. В., Кузнецов С. П. «Диффузия в конфигурационном пространстве системы двух связанных ротаторов»// Материалы XI международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2016). Саратов: ООО «Издательские центр «Наука» – с.110.– 2016. – ISBN 978-5-9999-2695-1.

18) Фельк Е.В., Савин А. В., Кузнецов С. П. «Переходной хаос в системе с паутиной Арнольда в фазовом пространстве»// «Нелинейные волны - 2016»: тез. док. XVII научной школы. - Нижний Новгород, с.147.-2016.

19) Фельк Е.В., Савин А. В., Кузнецов С. П. “Два связанных ротатора с нетривиальной динамикой” //“Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”: тез. докл. XI Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во Саратов. Ун-та, с. 228–230.–2016

20) Фельк Е.В., Савин А. В., Кузнецов С. П. “Долгопериодические режимы в системе двух связанных ротаторов” //“Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”: тез. докл. XII Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во Саратов. Ун-та, с. 295–296.–2017

21) Фельк Е.В., Савин А. В., Кузнецов С. П. “Долгопериодические циклы в системе двух связанных ротаторов” //“Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика”: тез. докл. XII Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во Саратов. Ун-та, с. 329–330.–2018