МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

ЗАДАЧА КИТАЙСКОГО ПОЧТАЛЬОНА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 5 курса 521 группы
направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Трайзе Марии Валерьевны

Научный руководитель
д. ф.-м.н., доцент ______________ В.А.Молчанов
подпись, дата

Зав. кафедрой
к. ф.-м.н., доцент ______________ Л.Б. Тяпаев
подпись, дата

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Еще с древнейших времен люди задумывались, как лучше пройти путь, чтобы затратить как можно меньше усилий, времени или денег. Гонцы должны были разнести новость сразу в несколько поселений и, для сокращения пути, вероятнее всего, прокладывали кратчайшие пути на карте, обозначив города точками, а свой путь – дугами.

Представьте себе добросовестного почтальона, которому нужно обойти все улицы, где проживают адресаты писем. Оптимальным для него будет такой маршрут, при котором ему придется пройти по каждой улице ровно один раз. Если мы изобразим улицы на графе, то эта задача будет равносильна поиску эйлерова цикла в этом графе. Но если этот граф не содержит эйлеров цикл, почтальону придется пройти по некоторым улицам несколько раз, но так, чтобы число повторов было минимальным. Этой задачей занимался китайский математик Мэй-Ку Куан в 1962 году, поэтому она получила название задачи о китайском почтальоне. Чтобы как можно быстрее доставить весть во многие населенные пункты, гонцы искали наиболее короткие маршруты, города обозначали точками, а путь, по которому следует проложить маршрут, – дугами.

Эта задача широко применяется при доставке разнообразных грузов. Поиск оптимальных маршрутов в крупных городах представляет особый интерес, так как позволяет снизить финансовые и трудовые затраты при уборке улиц, доставке различных товаров и в других процессах. К счастью, в настоящее время при поиске таких маршрутов нам помогают компьютеры [1].

Чаще всего на практике используется задача коммивояжера. Представьте себе остров с дорожной сетью, соединяющей несколько городов. Вы хотите побывать в каждом городе и вернуться в точку старта. Поиск лучшего решения этой задачи и есть задача коммивояжера. По существу, для задачи коммивояжера вы должны посетить все вершины. Для задачи почтальона – каждое ребро.

Целью данной выпускной квалификационной работы является изучение задачи китайского почтальона, которая формулируется следующим образом: во взвешенном графе построить цикл с минимальным суммарным весом, который проходит по каждому ребру графа по крайней мере один раз.

В ходе работы нужно рассмотреть следующие задачи:

1) изучить основные определения и теоремы, необходимые для решения задачи китайского почтальона;
2) рассмотреть алгоритмы решения задачи китайского почтальона;
3) создать программное обеспечение, реализующее решение задачи китайского почтальона.

Данная работа состоит из вводной части, четырех глав, заключительной части и использованных источников. Содержит 21 рисунок, 13 использованных источников.

Первая глава включает в себя описание основных определений теории графов.

Вторая глава содержит теорему существования эйлерового цикла и алгоритм Флёри.

Следующая глава является основной - в ней описывается решение задачи китайского почтальона. Здесь также подробно рассматриваются Венгерский алгоритм и алгоритм Дейкстры.

В четвертой главе представлена программная реализация алгоритма с примерами работы программы.

В заключении приведены основные выводы, в приложении содержится полный код разработанной программы на языке C++.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первом разделе излагаются основные понятия, которые потребуются для рассмотрения задачи китайского почтальона. Здесь приводятся необходимые определения и обозначения из теории графов.

В первом разделе используются источники [1-6, 8].

Второй раздел посвящен вопросу об эйлеровых графах. Здесь формулируются теоремы с условиями эйлеровости графов, доказательства этих теорем и следствия из теорем. Также описан алгоритм Флери нахождения эйлерова цикла.

Теорема 1 [2]. Связный граф тогда и только тогда является эйлеровым, когда все его вершины четны.

Следствие 1 [2]. Для того чтобы в связном графе существовал эйлеров путь, соединяющий две разные вершины u и v, необходимо и достаточно, чтобы u и v были единственными нечетными вершинами в G.

Теорема 2 [3]. Если C и – эйлеровы циклы графа , то в G существует такая последовательность эйлеровых циклов , что получается из путем изменения порядка обхода ребер некоторого подцикла на обратный.

Естественно возникает вопрос: как найти хотя бы один эйлеров цикл в эйлеровом графе G, т.е. как занумеровать ребра графа числами , где m – число ребер в графе, с тем, чтобы номер, присвоенный ребру, указывал, каким по счету это ребро проходится в эйлеровом цикле? Если пронумеровать ребра по следующим правилам, то это становится возможным:

1) начиная с произвольной вершины u, присваиваем произвольному ребру номер 1. Затем вычеркиваем ребро и переходим в вершину v;

2) пусть w – вершина, в которую мы пришли в результате выполнения предыдущего шага, и k – номер, присвоенный некоторому ребру на этом шаге. Выбираем любое ребро, инцидентное вершине w, причем мост выбираем только в том случае, когда нет других возможностей; присваиваем выбранному ребру номер и вычеркиваем его.

В 1883 году ученый Флёри придумал простой алгоритм построения эйлерова цикла в неориентированном графе (если такой цикл существует), а алгоритм для ориентированных графов приводится далее.

Ограничение: если степень текущей вершины в текущем графе больше 1, нельзя выбирать ребро, удаление которого из текущего графа увеличит число компонент связности в нем.

Описание алгоритма Флёри нахождения эйлерова цикла.

1. Положить текущий граф равным , а текущую вершину — равной произвольной вершине .

2. Выбрать произвольное, с учетом ограничения, рассмотренного ранее, ребро e текущего графа, инцидентное текущей вершине.

3. Назначить текущей вторую вершину, инцидентную e.

4. Удалить из текущего графа и внести в список.

5. Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2.

Во втором разделе используются источники [3-4, 9-10].

В третьем разделе рассматривается задача китайского почтальона и алгоритмы её решения.

Для решения задачи китайского почтальона нам понадобится алгоритм нахождения кратчайшего пути. Наиболее эффективный алгоритм решения задачи о кратчайшем пути первоначально дал нидерландский ученый Дейкстра в 1959 году. Описание данного алгоритма приводится в работе. Литературный источник [3].

В третьем разделе также приведены примеры потенциальных приложений, описание венгерского алгоритма.

(А) Сбор мусора.

(Б) Доставка молока или почты.

(В) Проверка электросетей, телефонных сетей или железнодорожных путей.

Описание алгоритма решения задачи китайского почтальона.

Шаг 1. Пусть – матрица весов ребер графа G. Используя алгоритм кратчайшей цепи (простого пути), образуем – матрицу , где – вес цепи наименьшего веса, идущей из некоторой вершины в другую вершину .

Шаг 2. Найдем то цепное паросочетание для множества , которое дает наименьший вес (в соответствии с матрицей весов D). Это можно сделать эффективно с помощью алгоритма минимального паросочетания.

Шаг 3. Если вершина «сочетается» с другой вершиной , то определим цепь наименьшего веса (из в), соответствующую весу , делая шаг 1. Добавим искусственные ребра в G, соответствующие ребрам из , и проделаем это для всех других цепей из множества , в результате чего получится s-граф .

Шаг 4. Сумма весов всех ребер графа , найденная с использованием матрицы (вес искусственного ребра берется равным по весу параллельного ему реального ребра), равна минимальному весу цикла, проходящего по G. При этом число прохождений цикла по ребру ( ) равно общему числу параллельных ребер между и в .

В третьем разделе используются источники [7, 9-10, 12-13].

Четвертый раздел посвящен практической части, а именно разработке и реализации программы на языке программирования C++ для решения задачи китайского почтальона. Здесь описывается условие задачи, в которой необходимо построить цикл с минимальным суммарным весом, проходящий по каждому ребру графа по крайней мере 1 раз. Рассматриваем модель решения задачи китайского почтальона: такой моделью будет взвешенный граф, в котором ребра будут иметь положительные величины. Частный случай решения задачи: если граф эйлеров, то эйлеров цикл является оптимальным маршрутом китайского почтальона.

С помощью программы было произведено сравнение двух графов: большого и маленького. В результате приведена разница, чем больше граф, тем больше нужно итераций, чтобы посетить каждую вершину и проверить каждое ребро.

В четвертом разделе используются источники [8-13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе были рассмотрены основные понятия эйлерова графа, основные теоремы, связанные с ними, изучено решение задачи китайского почтальона. В результате проделанной работы была разработана и реализована программа для решения задачи китайского почтальона.

Таким образом, все поставленные задачи были полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Альсина К. Мир математики: в 40 т. Т.11. Карты метро и нейронные сети. Теория графов / пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. 144 с.

2 Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М. : Наука. Физматлит, 1997. 368 с.

3 Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход [Электронный ресурс] / Н. Кристофидес; пер. Г. Гаврилов. М. : Мир, 1978. 432 с. Загл. с экрана. Яз. рус.

4 Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. М.: Наука,1990.384 с.
5 Харари, Ф. Теория графов [Электронный ресурс] / М. : Мир, 1973. 302 с. Загл. с экрана. Яз. рус.
6 Bellman, R. The Konigsberg bridges problem generalized / R. Bellman, K. L. Cooke // Journal of Mathematical Analysis and Applications,1969,25,№1.P.1-7.
7 Edmonds, J. The Chinese postman's problem // Bulletin of the Operations Research Soc. of America, 1965, 13, Supplement 1. P. B-73.
8 Edmonds, J. Euler tours and the Chinese postman's problem / J. Edmonds, E. Johnson // (in press), Matching.
9 Басакер, Р. Конечные графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати М. : Наука. Физматлит, 1973. 368 с.
10 Christofides, N. The optimum traversal of a graph // Omega, 1973, 1,P.1.
12 Оре, О. Графы и их применение [Электронный ресурс] / О. Оре; пер. Л. И. Головина. М. : Мир, 1965. 175 с. Загл. с экрана. Яз. рус.
13 Харари, Ф. Теория графов [Электронный ресурс] / М. : Мир, 1973. 302 с. Загл. с экрана. Яз. рус.