

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЙ В ГРАФАХ

АВТОРЕФЕРАТ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы

специальности 09.03.01- Информатика и вычислительная техника

факультета КНиИТ

Балахоновой Екатерины Васильевны

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

В. А. Молчанов

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

Л.Б. Тяпаев

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Первой работой теории графов как математической дисциплины считают статью Эйлера 1736 года, в которой рассматривалась задача о Кёнигсбергских мостах. Проблема семи мостов Кёнигсберга – старинная математическая задача, в которой спрашивалось, как можно пройти по всем мостам Кёнигсберга, не проходя ни по одному дважды.

Следующий импульс теория графов получила лишь спустя почти 100 лет с развитием исследований в различных науках. Графы встречаются в разных областях: построение связей и анализ атомов в химии, использование технологий в социологии, изучение карт миграций в биологии, моделирование транспортных систем при строительстве, построение сетей в электротехнике и другие.

Теория графов может иметь дело с моделями, для которых другие методы не работают, например, с моделями, в которых имеется неполная информация о параметрах. Отдельно можно выделить двудольные графы, так как в большинстве случаев достаточно сложные системы можно свести к данной модели с некоторыми спецификациями. К примеру, двудольные графы широко используются в современной теории кодирования. С помощью графов Таннера производится построение более длинных кодов из более мелких. Как кодировщики, так и декодировщики интенсивно используют данный тип графов. Еще одним примером важности двудольных графов могут служить облачные вычисления, основанные на совместном использовании вычислительных ресурсов, которые сильно востребованы в настоящее время [1].

В теории графов существует огромное количество задач, относящихся как к NP-полным задачам, так и к P-полным. В данной работе рассматривается задача о нахождении паросочетаний в различных графах. Существуют различные виды паросочетаний: максимальные, наибольшие, совершенные. Некоторые из задач, относящихся к паросочетаниям, имеют полиномиальные алгоритмы. Так, например, задача о максимальном паросочетании можно найти

простым, жадным способом. Наибольшее паросочетание является также максимальным, но содержит в себе максимальное число ребер. Такая задача имеет вполне хороший алгоритм решения, в тоже время задача о нахождении наименьшего максимального паросочетания (паросочетания, содержащего в себе наименьшее количество ребер) не имеет никакого известного на данный момент полиномиального алгоритма [2].

Целью данной работы является изучение различных задач о паросочетаниях.

В процессе работы необходимо выполнить следующие задачи:

- Изучить теоретические основы, связанные с понятием паросочетания;
- Реализовать алгоритмы на языке программирования Java, связанные с задачами о наибольших паросочетаниях в двудольных взвешенных и невзвешенных графах;
- Разработать компьютерную программу для нахождения наибольших паросочетаний в двудольных графах, а также реализовать пользовательский интерфейс для удобства работы с ней.

Дипломная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы – 58 страниц, из них 43 страницы – основное содержание, включая 33 рисунков, список используемых источников из 12 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первом разделе излагаются основные понятия, которые потребуются для последовательного рассмотрения алгоритма для нахождения наибольших паросочетаний в графах. Здесь приводятся необходимые определения о паросочетаниях и понятия теории графов.

В работе используется терминология теории графов из книг [2], [3], под ориентированным графом (или, для краткости, орграфом) понимается пара (V, E) , где V – конечное непустое множество (вершины орграфа), а E – отношение на множестве V (пара $(u, v) \in E$ называется дугой орграфа с началом u и концом v). Аналогично к понятию дуги, в графах, приравнивается понятие ребро. Отношение E называется отношением смежности, а соответствующую ему двоичную булеву матрицу – матрицей смежности орграфа A .

Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара (V, E) , где E – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V . Из каждого орграфа (V, E) можно получить неориентированный граф $(V, E \cup E^{-1})$, называемый симметризацией орграфа (V, E) .

Пусть (V, E) – некоторый орграф, $v \in V$ – одна из его вершин. Степенью исхода вершины v называется число дуг орграфа $(v, u) \in E$, имеющих своим началом v , т.е. $d^+(v) = | \{ u \in V : (v, u) \in E \} |$. Степень захода вершины v – это количество дуг, имеющих своим концом v , т.е. $d^-(v) = | \{ u \in V : (u, v) \in E \} |$. Числа $d^+(v)$ и $d^-(v)$ легко находятся по матрице смежности орграфа A : первое из них равно количеству единиц в строке, соответствующей вершине v , а второе – количеству единиц в столбце, отвечающем этой вершине.

Если (V, E) – орграф, (V, E') – орграф, где $E' \subseteq E$, (V, E') называется спецификацией орграфа (V, E) .

В неориентированном графе G . Число $d(v)$ называется степенью вершины v . При этом вершина считается четной или нечетной в зависимости от соответствующего свойства числа $d(v)$. Набор чисел, являющихся степенями вершин данного графа G , называют его степенным множеством, а вектор, компонентами которого являются расположенные в убывающем порядке степени всех вершин, называют вектором степеней.

Путем (или неориентированным маршрутом) неориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

Цепью называется такой путь, в котором каждая дуга используется не больше одного раза.

Простой цепью называется такой путь, в котором каждая вершина используется не более одного раза.

Циклом называется замкнутая цепь (простая цепь). Граф, представляющий собой простой цикл, обозначается как C_n .

Длиной (или мощностью) пути P называется число дуг, входящих в него.

Паросочетанием неориентированного графа G называется подмножество M множества ребер графа G , выбранное так, что никакие два ребра из M не являются смежными (т.е. не имеют общей вершины) [5].

Основные понятия об алгоритме для ЗНПС возьмём из книги [4]. Пусть задано некоторое начальное паросочетание, причем допускается то, что оно будет пустым. Алгоритм осуществляет повторный поиск аугментальных цепей в попытке улучшения изначального паросочетания в соответствии с теоремой 1.

Шаг 1. Выбрать в G начальное паросочетание M .

Шаг 2. При наличии в G хотя бы двух экспонированных вершин, необходимо взять одну из них в качестве корня; иначе перейти шагу 8.

Шаг 3. Взять внешнюю вершину v дерева. Для каждого ребра e :
если v – экспонированная вершина, то перейти к шагу 7; если v не принадлежит дереву и не является экспонированной, то перейти к шагу 5.

Шаг 4. Получена аугментальная цепь из корня к v . Необходимо построить новое улучшенное паросочетание, удаляя текущее дерево и пометки вершин, и перейти к шагу 2.

Шаг 5. Добавить к альтернирующему дереву ребро e и отметить вершину v как внутреннюю. Найти ребро e' , принадлежащее текущему паросочетанию, и добавить его к дереву, пометив вершину v' как внешнюю. При существовании ребра между v и другой вершиной, появляется цветок, необходимо перейти на шаг 6. Иначе перейти к шагу 3.

Шаг 6. Оpoznать и срезать получившийся цветок. Отметить возникшую псевдовершину как внешнюю. Внести поправку в частичное упорядочение и возвратиться к шагу 3.

Шаг 7. Возвращаться к шагу 3 до тех пор, пока единственным возникающим случаем не будет случай то, что полученное дерево является венгерским. Тогда удалить все вершины дерева и все ребра из E , инцидентные этим вершинам. Считать оставшийся подграф графом G и вернуться к шагу 2.

Шаг 8. Выделить отдельно в последнем графе G и в каждом удаленном венгерском графе оптимальное паросочетание, поступая так. Распустить сначала крайний цветок и выделить паросочетание, которое оставляет экспонированной относительно него ту вершину v , которая входит в паросочетание в нераспустившемся цветке. Продолжать процесс распускания в порядке, обратном к установленному на шаге 6, до тех пор, пока весь граф не будет распустившимся и не будет получено наибольшее паросочетание.

В данном разделе используются источники [2, 3, 4, 5].

Второй раздел посвящен программным средствам позволяющим создать программу для поиска максимальных паросочетаний в двудольных взвешенных и невзвешенных графах.

Для написания программной части данной работы использовался язык программирования Java. Данный язык является объектно-ориентированным и был разработан компанией Sun Microsystems в 1995 году.

IntelliJ IDEA является интегрируемой средой разработки программного обеспечения, в частности Java, на которой происходит разработка программной части данной работы.

В Java есть несколько библиотек визуальных компонентов для создания графических интерфейсов. Одной из самых удобных и простых для разработки является пакет Swing. Данная библиотека была разработана компанией Sun Microsystems.

Во втором разделе используются источники [6, 7, 8, 9].

В третьем разделе рассматривается алгоритм поиска наибольших паросочетаний в двудольных графах.

Основная идея алгоритма поиска наибольших паросочетаний в неориентированных двудольных взвешенных и невзвешенных графах:

- 1) проверка на то, является ли заданный граф неориентированным двудольным;
- 2) выделение двух множеств и вершин заданного графа так, что каждое ребро одним концом имеет вершину из V_1 , а другим концом – вершину из V_2 ;
- 3) построение сети относительно данного графа;
- 4) запуск поиска максимального потока минимальной стоимости на полученной сети из истока s в сток t ;
- 5) выбор ребер, принадлежащих изначальному двудольному графу и принадлежащих найденному максимальному потоку минимальной стоимости. Данные ребра являются наибольшим паросочетанием заданного двудольного графа.

В данном разделе используются источники [10, 11, 12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача о нахождении паросочетаний в различных графах. Некоторые из задач, относящиеся к паросочетаниям, имеют полиномиальные алгоритмы. Так, например, решение задачи о максимальном паросочетании можно найти простым жадным способом. Данная работа посвящена проблеме поиска наибольших паросочетаний в двудольных взвешенных и невзвешенных графах.

В работе изучены различные задачи о паросочетаниях в графах и разработана программа на языке Java, позволяющая находить наибольшее паросочетание в двудольных графах, а также реализован пользовательский интерфейс для удобства работы с этой программой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 *Arunkumar*, B.R. Application of bipartite graph in diverse fields including cloud computing. [Text] / B.R. Arunkumar, R. Komala. IJMER Journal, 2015. Vol 5, Iss. 7. P. 1-7
- 2 *Басакер*, Р. Конечные графы и сети [Текст] / Р. Басакер, Т. Саати. Москва : Наука, 1973. -368 с.
- 3 *Богомолов*, А.М. Алгебраические основы теории дискретных систем [Текст] / А.М. Богомолов, В.Н. Салий. Москва : Физматлит, 1997. -368 с.
- 4 *Кристофидес*, Н. Теория графов. Алгоритмический подход [Текст] / Н. Кристофидес. Москва : Мир, 1978. -432 с.
- 5 *Ахо*, А. Структуры данных и алгоритмы [Текст] / А. Ахо, Д. Хопкрофт, Д. Ульман. Москва : Вильямс, 2003. -382 с.
- 6 *Шилдт*, Г. Java. Руководство для начинающих [Текст] / Г. Шилдт. Москва : Вильямс, 2012. -624 с.
- 7 *Эккель*, Б. Философия Java [Текст] / Б. Эккель / полное изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2015. -1168 с.
- 8 Продукты и разработки [Электронный ресурс] / JetBrains / URL: <https://jetbrains.ru/products/idea/> (дата обращения 17.03.2019). Загл. С экрана. Яз. рус.
- 9 *Шилдт*, Г. Swing. Руководство для начинающих [Текст] / Г. Шилдт. Москва : Вильямс, 2007. -704 с.
- 10 *Скиена*, С. Алгоритмы. Руководство по разработке [Текст] / Стивен С. Скиена. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. -719 с
- 11 *Кормен*, Т. Алгоритмы. Построение и анализ [Текст] / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. Москва : Вильямс, 2005. -1296 с.
- 12 *Bellman*, R. On a Routing Problem [Text] / R. Bellman. Quarterly of Applied Mathematics, 1958. Vol 16, No. 1. P. 87-90