МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Численное моделирование радиотехнического генератора,
название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом
демонстрирующего переход к гиперболическому хаосу

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 431 группы
направления (специальности) 09.03.02 «Информационные системы и технологии»
код и наименование направления (специальности)
факультета нелинейных процессов
наименование факультета, института, колледжа
Дригунца Владислава Николаевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ____________________ Д.В. Савин
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой физики открытых систем
д. ф.-м. н., профессор ____________________ А.А. Короновский
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов 2019 год

Введение

Генераторы с хаотической динамикой являются перспективными объектами для применения в схемах передачи информации. В частности, одним из преимуществ является то, что они генерируют широкополосный сигнал и, следовательно, могут обеспечить функционирование систем связи при малой мощности сигнала в каждом из частотных диапазонов [1].

При рассмотрении схем передачи информации, основанных на синхронизации колебаний приемника и передатчика, важным является вопрос об устойчивости схемы при изменении параметров передатчика и приемника. В таком случае является целесообразным изучать такие схемы передачи информации, в которых свойства аттрактора не будут меняться при вариациях параметров. Этому свойству удовлетворяет генератор гиперболического хаоса. Аттрактор, описывающий поведение системы, демонстрирующей гиперболический хаос, называется гиперболическим.

Гиперболические аттракторы являются структурно устойчивыми. Это означает нечувствительность структуры аттрактора в фазовом пространстве по отношению к вариации уравнений системы. Свойство структурной устойчивости, таким образом, полезно для потенциальных приложений хаоса [2].

Таким образом, как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения интересно реализовать гиперболический хаос в физических системах, имеющих приложение в информационных системах и технологиях, и исследовать структуру пространства параметров таких систем.

В последнее время были предложены подходы к построению систем с гиперболическим хаотическим аттрактором типа соленоида Смейла-Вильямса. Примером системы с аттрактором Смейла-Вильямса является схема на основе двух генераторов Ван дер Поля – генератор Кузнецова [2].

Целью данной работы является анализ устройства пространства параметров математической модели радиотехнического генератора, демонстрирующего гиперболический хаос, в том числе в окрестности границы области гиперболического хаоса.

В разделе 1 этой работы рассматривается такой метод численного исследования нелинейных динамических систем, как расчёт ляпуновского показателя. В разделе 2 рассматривается понятие о гиперболическом хаосе, приводится пример системы, способной генерировать гиперболические хаотические колебания, и описывающие её уравнения, приводятся результаты численного моделирования, в частности, карта ляпуновских показателей.

1 Методы исследования хаотических систем

Чтобы исследовать систему на наличие гиперболического хаоса необходимо использовать соответствующие методы исследования хаотических систем.

Одним из таких методов является вычисление старшего ляпуновского показателя, который нужен для определения типа динамики аттрактора. Определив знак старшего показателя Ляпунова, можно определить, присуще ли системе хаотическое поведение.

Показатель Ляпунова характеризует скорость удаления друг от друга изначально близких траекторий на аттракторе. Будем одну из них называть исходной, а другую возмущённой. Тогда в более строгом виде определение ляпуновского показателя можно записать как [3]:

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ln \frac{||\tilde{x}_n||}{\varepsilon}, \tag{1}$$

где

$\tilde{x}_n$ – вектор возмущения через n итераций в случае, если динамическая система задана дискретным отображением, и через время эволюции n – в случае, если речь идет о потоковой системе,

ε – норма начального (стартового) вектора возмущения.

Далее перейдем к рассмотрению алгоритма вычисления показателя Ляпунова, представленного следующей процедурой — она обычно называется алгоритмом Бенеттина [3]. Сначала составим систему уравнений в вариациях. Затем в данном алгоритме берется точка на аттракторе и точка, соответствующая состоянию возмущения. Далее исходные уравнения системы и уравнения для векторов возмущения решаются численно на интервале времени T и находится вектор состояния и вектор возмущения. Затем происходит перенормировка всех векторов возмущения. Описанная процедура повторяется достаточно большое число раз M и подсчитывается сумма:

$$S = \sum_{i=1}^{M} ln \frac{||\tilde{x}_i||}{\varepsilon}, \tag{2}$$

где $\tilde{x}_i$ – вектор возмущения.

Последним шагом является расчет ляпуновского показателя по формуле:

$$\Lambda = \frac{S}{MT}. \tag{3}$$

2 Пространство параметров генератора гиперболического хаоса

Рассмотрим понятие гиперболического аттрактора. Гиперболический аттрактор – это аттрактор, все траектории которого являются гиперболическими. Это означает, что среди возмущенных по отношению к данной траекторий в линейном приближении можно выделить класс траекторий (I), которые приближаются к исходной, причем в среднем по экспоненте, и класс траекторий (II), приближающихся к исходной в обратном времени, тоже в среднем по экспоненте [3].

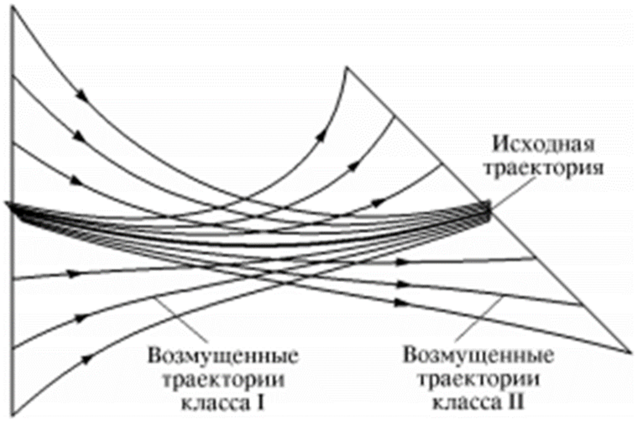


Рисунок 1 - К пояснению устройства окрестности гиперболической траектории. (рисунок взят из книги [3])

Примером гиперболического аттрактора является аттрактор Смейла – Вильямса. Он строится для отображения трехмерного пространства в себя, определенного следующей процедурой. Рассмотрим область в форме тора, растянем ее в длину, сложим вдвое и вложим в исходный тор. При каждой следующей итерации количество «витков» удваивается. Объект, который получается в пределе большого числа итераций, называют соленоидом Смейла – Вильямса [2].

В работе [4] была предложена система, способная демонстрировать аттрактор Смейла – Вильямса — т. н. генератор Кузнецова.

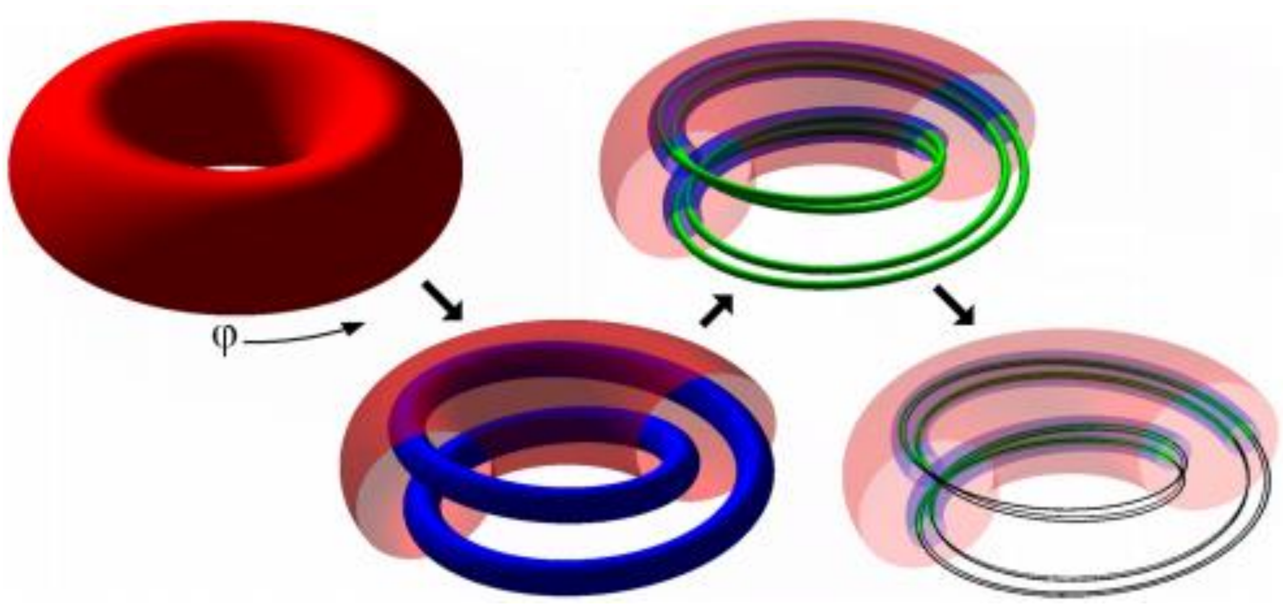


Рисунок 2 - Процесс построения соленоида Смейла-Вильямса (рисунок взят из книги [3])

Далее рассмотрим математическую модель генератора Кузнецова, описываемую следующими уравнениями [5]:

$$\ddot{x} - \left(h_1 + A_1 cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) - x^2\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon_1 y cos\omega t, \tag{4}$$

$$\ddot{y} - \left(h_2 - A_2 cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) - y^2\right)\dot{y} + (2\omega_0)^2 x = \varepsilon_2 x^2, \tag{5}$$

где h_1, h_2 – управляющие параметры,

A_1, A_2 – амплитуды внешнего воздействия на управляющий параметр,

T – период внешней модуляции,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры связи,

ω, ω_0 – характеристические частоты.

Это модель состоит из двух подсистем (осцилляторов Ван-дер-Поля) с характеристическими частотами ω_0 и $2\omega_0$. Переменные x и y являются обобщенными координатами осцилляторов. Параметр, отвечающий за диссипацию, вынужден медленно варьироваться в противоположных фазах в одной и другой подсистеме с периодом T и амплитудами A_1 и A_2 вокруг средних значений h_1 и h_2. Из-за модуляции подсистемы становятся активны по очереди [5].

Чтобы увидеть структуру, присущую аттрактору Смейла - Вильямса, нужно построить стробоскопическое сечение, где отображены точки через период внешней модуляции T.

Построение стробоскопического сечения происходит следующим образом: при интегрировании уравнений системы через равные промежутки времени, соответствующие в нашем случае периоду внешнего воздействия, запоминаются значения переменных. Таким образом, можно получить отображение, позволяющее определять тип наблюдаемого режима.

В ходе работы были построены стробоскопические сечения генератора Кузнецова и его временные реализации и при различных наборах параметров (рис. 3 — 4).

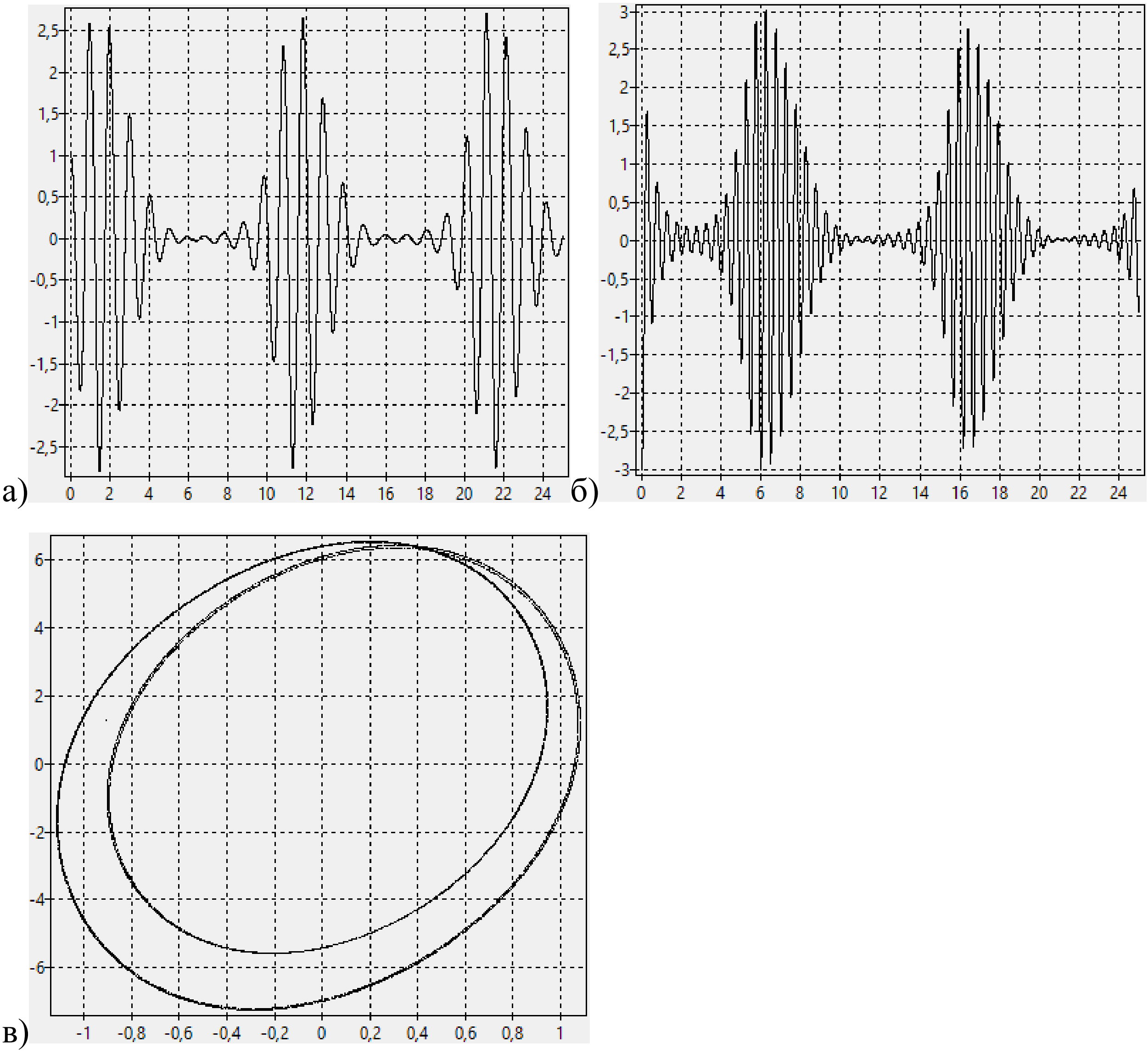
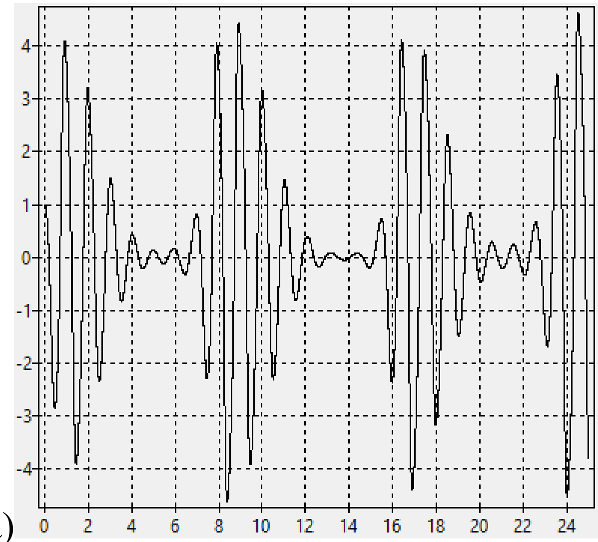
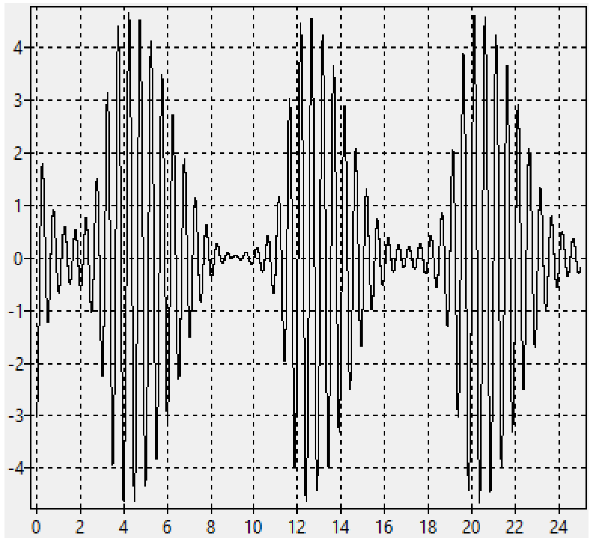


Рисунок 3 - Временные реализации (а – в плоскости (x, t), б - в плоскости (y, t)) и стробоскопическое сечение (в) в плоскости $(x, \dot{x})$ при параметрах $a = 3; h_{1,2} = 0; \varepsilon_{1,2} = 0{,}5; \omega = 2\pi, T = 10$

а)  б) 

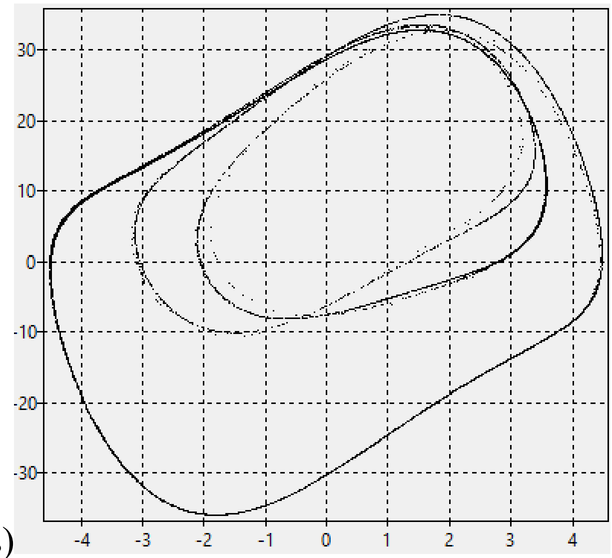
в) 

Рисунок 4 - Временные реализации (а – в плоскости (x, t), б - в плоскости (y, t)) и стробоскопическое сечение (в) в плоскости $(x, \dot{x})$ при параметрах $a = 4; h_{1,2} = 1{,}5; \varepsilon_{1,2} = 0{,}5; \omega = 2\pi, T = 8$

На рисунке 3 изображены временные реализации и стробоскопическое сечение для гиперболического аттрактора — видно, что аттрактор имеет характерный вид двойной петли. На рисунке 4 гиперболический аттрактор не наблюдается.

Также была построена карта показателя Ляпунова для стробоскопического сечения на плоскости параметров.

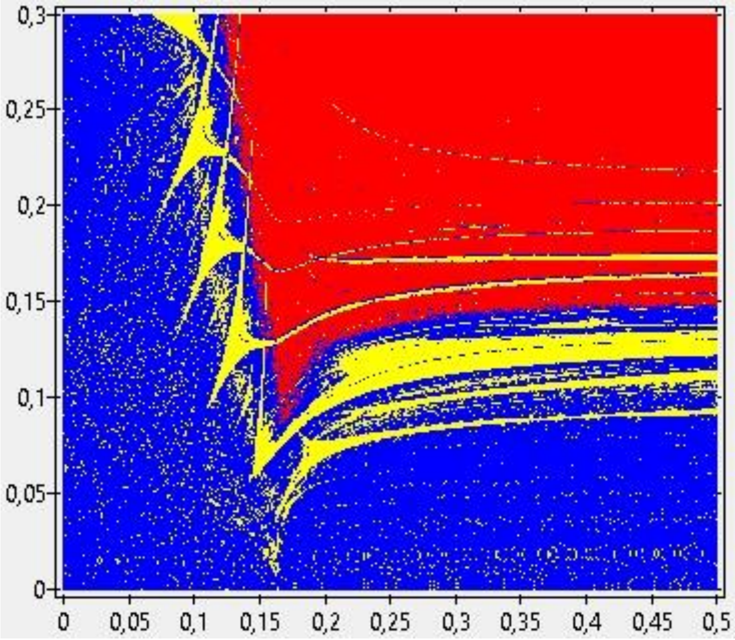


Рисунок 5 - Карта показателя Ляпунова системы, описываемой уравнениями (4) и (5), в плоскости параметров $(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$. Синим цветом отмечена область, где показатель Ляпунова равен нулю, красным цветом отмечена область, где показатель Ляпунова больше нуля, а желтым цветом отмечена область, где показатель Ляпунова отрицательный. Карта построена при параметрах $a = 4; h_{1,2} = 1; \omega = 2\pi, T = 8$.

На карте видим, что при небольших значениях параметра связи система демонстрирует квазипериодическую динамику. В квазипериодической области присутствуют языки синхронизации – области периодической динамики характерной треугольной формы. Они расположены преимущественно вблизи границы областей квазипериодической и хаотической динамики. Далее в области больших значениях параметров связи наблюдается хаотическая динамика, и затем, если увеличивать параметры связи, видим, что хаотическая область становится однородной, без окон периодичности. На границе перехода к хаосу наблюдается хаотическая динамика с окнами периодичности.

При расчете показателя Ляпунова для стробоскопического сечения в этом случае уравнения в вариациях не использовались, а вместо этого были взяты две копии динамической системы с близкими начальными условиями, и отслеживался характер эволюции расстояния между изображающими точками во времени [3].

Из-за погрешностей было необходимым подобрать правильные параметры для вычислений и сравнить полученные результаты с результатами в статье [5], чтобы убедиться в достоверности результатов. Также очень важным было найти область на карте, в которой ляпуновский показатель обращался в нуль или был примерно равен нулю, для этого следовало определить точность расчета.

В результате был выбраны следующие параметры расчёта: длина временной реализации M = 100000 итераций стробоскопического сечения, величина переходного процесса 40000 итераций, перенормировка производилась раз в 10 периодов.

Далее были построены графики зависимости показателя Ляпунова от параметра ε_1 при параметрах ε_2, соответствующих области квазипериодической динамики (рис. 6), границе возникновения хаоса (рис. 7) и области развитого (в данном случае — гиперболического) хаоса (рис. 8).

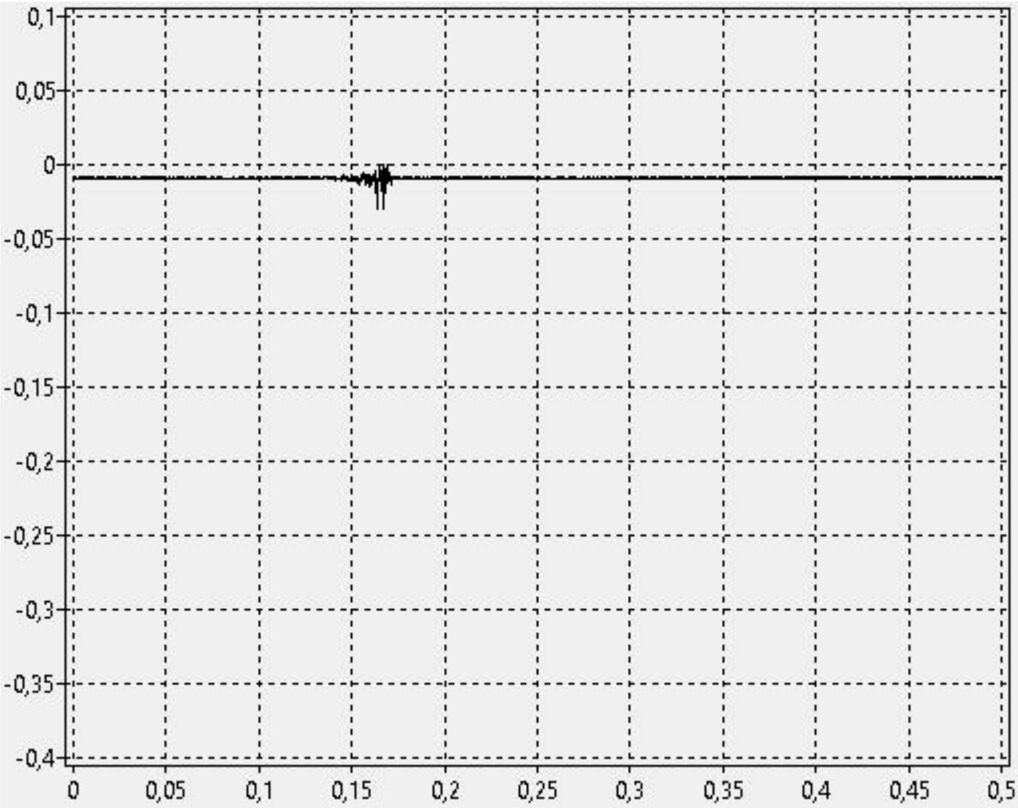


Рисунок 6 - График зависимости показателя Ляпунова от параметра ε_2 в плоскости (ε_2, l) для стробоскопического сечения. Значение параметраε_2 меняется от 0 до 0,5. График построен при параметрах $a = 4; \varepsilon_1 = 0{,}03; h_{1,2} = 1; \omega = 2\pi, T = 8$.

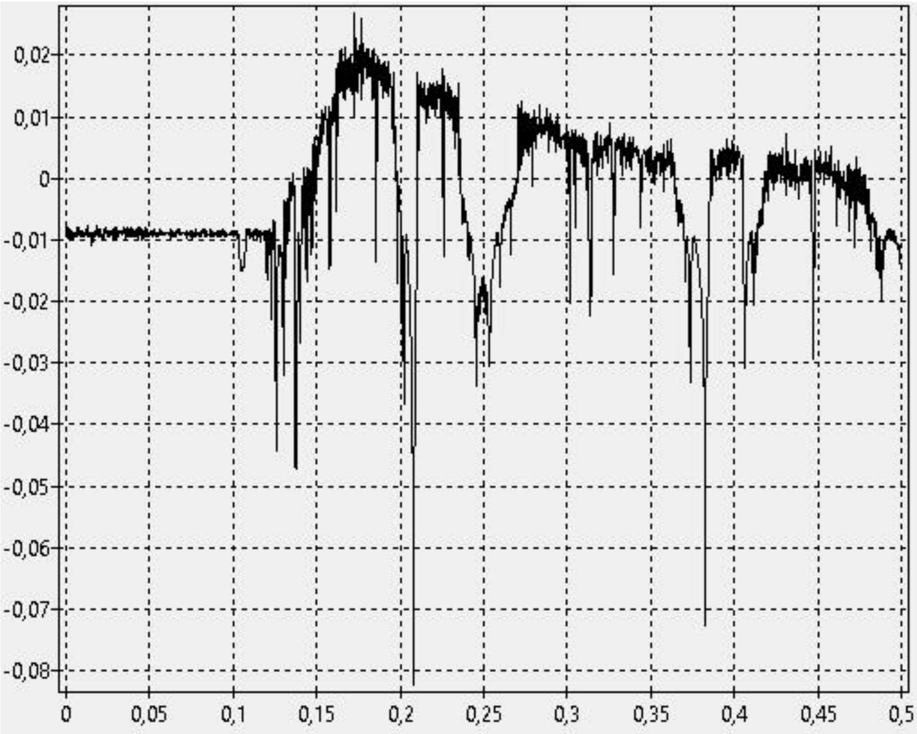


Рисунок 7 - График зависимости показателя Ляпунова от параметра ε_2 в плоскости (ε_2, l) для стробоскопического сечения. Значение параметраε_2 меняется от 0 до 0,5. График построен при параметрах $a = 4; \varepsilon_1 = 0{,}14; h_{1,2} = 1; \omega = 2\pi, T = 8$.

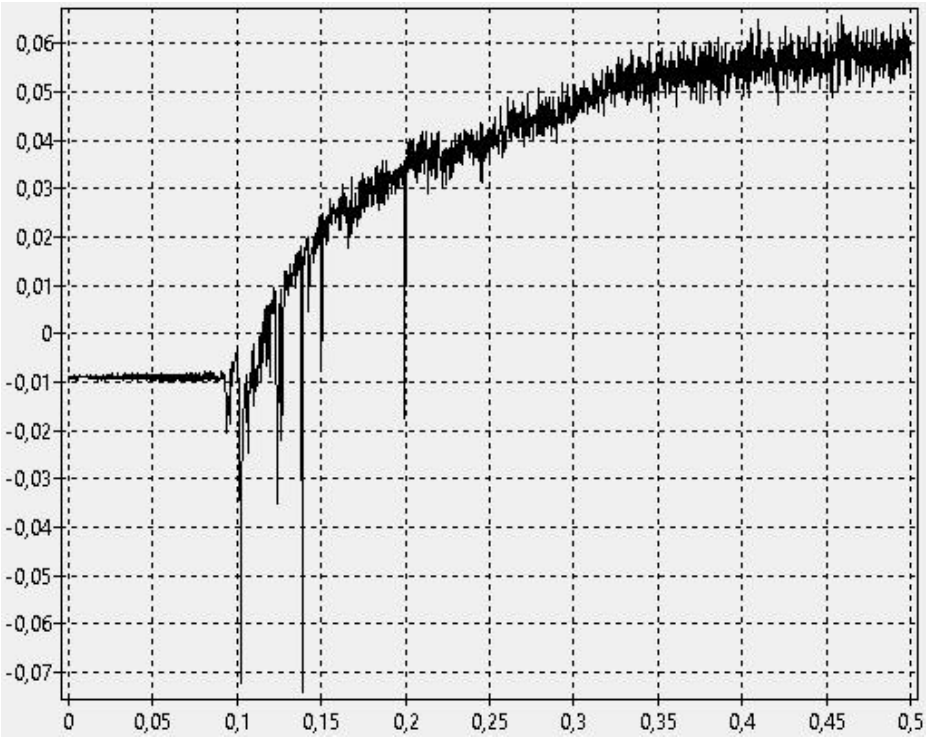


Рисунок 8 - График зависимости показателя Ляпунова от параметра ε_2 в плоскости (ε_2, l) для стробоскопического сечения. Значение параметраε_2 меняется от 0 до 0,5. График построен при параметрах $a = 4; \varepsilon_1 = 0{,}26; h_{1,2} = 1; \omega = 2\pi, T = 8$.

На рисунке 6 видим, что показатель Ляпунова примерно равен нулю, что соответствует области квазипериодической динамики. На рисунке 7 наблюдаем резкий разброс значений показателя Ляпунова, как в области значений больше нуля, так и в области значений меньше нуля — этот график соответствует хаотическому режиму с окнами периодичности. На рисунке 8 видим, что при $\varepsilon_2 \approx 0.2$ график становится относительно гладким, что соответствует возникновению структурно устойчивого режима.

Заключение

В ходе данной работы были рассмотрено такое понятие как гиперболический хаос. Были построены временные реализации, стробоскопические сечения для генератора Кузнецова и карта показателя Ляпунова от параметров, на которой видно, что при больших значениях параметров связи наблюдается хаотическая динамика, и затем, если увеличивать параметры связи, хаотическая область становится однородной, без окон периодичности. Также были построены графики зависимости ляпуновского показателя от параметра, демонстрирующих наличие различных динамических режимов, в том числе структурно устойчивого (гиперболического) хаоса.

Список использованных источников

1 Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 252 с.

2 С.П. Кузнецов Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике: Институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2013, 488 с.

3 Кузнецов С.П. Динамический хаос, М.: Физматлит, 356 с., 2006

4 S.P.Kuznetsov. Example of a Physical System with a Hyperbolic Attractor of the Smale-Williams Type. Phys. Rev. Lett., 95, 2005, 144101

5 Olga B. Isaeva, Sergey P. Kuznetsov, Igor R. Sataev, Dmitry V. Savin, and Eugene P. Seleznev Hyperbolic Chaos and Other Phenomena of Complex Dynamics Depending on Parameters in a Nonautonomous System of Two Alternately Activated Oscillators, 2015.