МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра _физики открытых систем_

Разработка и численная реализация методов расчета спектра показателей Ляпунова и их применение для анализа поведения систем по временным рядам и диагностики режима обобщенной синхронизации в связанных системах

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента _4______ курса _431______ группы

направления 09.03.02«Информационные системы и технологии»
факультета нелинейных процессов
Евстифеева Евгения Валентиновича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ___________________ О.И. Москаленко
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор______ ___________________ А.А. Короновский
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2019 год

Введение

Хаотическая синхронизация является фундаментальным явлением радиофизики [1]. На данный момент известно несколько типов хаотической синхронизации: фазовая синхронизация [2], синхронизация с запаздыванием [3], полная [4] и обобщенная [5] синхронизация. Наибольший интерес для исследователей представляет обобщенная хаотическая синхронизация, которая может возникать между системами с различной размерностью фазового пространства [6]. Явление обобщенной синхронизации успешно применяется для исследования взаимосвязи биологических, химических и физических систем [7], скрытой передачи информации [8], создания нелинейных антенн гига- и терагерцового диапазона [9] и т.д.

Под обобщенной хаотической синхронизацией понимают установление функционального соотношения (функционала) между состояниями взаимодействующих систем после переходного процесса. Это соотношение может быть как гладким, так и фрактальным [10], вследствие чего выделяют сильную и слабую обобщенную синхронизацию. В данной работе исследуется режим слабой обобщенной синхронизации.

Как правило, обобщенная синхронизация рассматривается для двух однонаправленно связанных хаотических систем [11,12], при этом одну систему называют ведомой, а другую – ведущей. Однако, существуют работы, в которых показано, что явление обобщенной синхронизации может наблюдаться и в случае взаимной связи [5, 13-14]. При такой связи ряд методов и подходов, справедливых для однонаправленно связанных систем, оказывается неприменимым, в связи с чем возникают многие трудности касательно диагностики режима обобщённой синхронизации.

Целью настоящей бакалаврской работы является изучение методов диагностики обобщенной синхронизации, а также разработка и численная реализация методов расчета старшего ляпуновского показателя по временным рядам.

Бакалаврская работа содержит 43 страницы, приведённый список литературы включает 27 наименований.

Основное содержание работы

В первой главе рассматриваются основные методы диагностики режима обобщенной синхронизации: метод вспомогательной системы [15], метод ближайших соседей [11], метод фазовых трубок [5] и метод расчета спектра ляпуновских показателей [10]. Ляпуновский показатель определяется по формуле [17]:

$$\Lambda_i = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \ln ||\tilde{x}_i(T)||, \qquad (1)$$

где Λ_i – ляпуновский показатель, T – безразмерное время, $\|\ldots\|$ - Евклидова норма, $\tilde{x}_i(T)$ – вектор возмущения. В случае потоковой системы, если показатель больше нуля, то с течением времени небольшое возмущение будет возрастать, а если меньше нуля – убывать. Таким образом, положительный ляпуновский показатель характеризует хаотическую динамику системы, а отрицательный – устойчивую (периодическую) [17]. Для диагностики обобщенной синхронизации в случае однонаправленно связанных (как правило, трехмерных) систем требуется рассчитать старший ляпуновский показатель для ведомой системы (так называемый старший условный ляпуновский показатель), а в случае взаимной связи – второй по старшинству показатель Ляпунова. В обоих случаях переходу к обобщенной синхронизации будет соответствовать переход этого показателя Ляпунова в область отрицательных значений [10,18]. Для расчета спектра ляпуновских показателей используется алгоритм Бенеттина с ортогонализацией Грама-Шмидта [17].

Во второй главе рассматриваются основные методы расчета ляпуновских показателей по временным рядам. В первом разделе описывается метод восстановления фазового пространства системы при помощи метода запаздываний [17,19]. Если имеется дискретный сигнал $x(t)$, то можно построить ряд $x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau)$, где τ – величина задержки, m – размерность вложения. Элементы данного ряда являются компонентами m-мерного вектора $\boldsymbol{X}(t)$, описывающего восстановленный фазовый портрет.

Для определения оптимальной величины задержки [19] требуется рассчитать функцию автокорреляции восстановленного сигнала при различных значениях задержки. Далее выбирается такое значение величины задержки, при котором либо наблюдается первый минимум функции автокорреляции, либо величина функции убывает с 1 до значения 1-1/e.

Для определения размерности вложения [17,19] сначала задается начальное значение размерности вложения и вычисляется корреляционный интеграл. Затем, при помощи метода средних квадратов оценивается корреляционная размерность, которая будет увеличиваться до определенного значения размерности вложения, которое не превышает $2D_{max}+1$ [16]. Для успешного применения данного метода необходимо выполнение оценки Экмана-Рюэля [16]: $D_{max} \approx 2lgM$, где M – количество используемых точек.

Во втором разделе второй главы представлены методы расчета старшего ляпуновского показателя: метод Вольфа [20] с накоплением по времени и по величине вектора возмущения [17], а также метод Розенштейна [21]. Метод Розенштейна был разработан для того, чтобы получить возможность расчета ляпуновского показателя по временным рядам, если к последним был добавлен стационарный шум. Для каждой точки (опорной) восстановленного аттрактора производится поиск ближайших точек, а затем рассматривается эволюция расстояния от опорной точки до ближайших с течением времени, затем оно усредняется и производится вычисление следующей зависимости от времени [21]:

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t}\langle ln\, d_j(i)\rangle, \tag{2}$$

где $d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)}$ – расстояние между j-й группой ближайших точкек и опорной в момент времени $i\Delta t$, Δt – период дискретизации временного ряда, C_j- неопределенный коэффициент, λ_1- старший ляпуновский показатель. Ляпуновский показатель является угловым коэффициентом полученной зависимости и определяется при помощи метода средних квадратов.

Самый распространенный метод – это метод Вольфа [17,20]. Данный метод является успешной попыткой модифицировать алгоритм Бенеттина для применения ко временным рядам. Расчет старшего ляпуновского показателя производится по формуле [17]:

$$\Lambda = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \ln(\varepsilon'_k/\varepsilon_k)}{\sum_{k=1}^{N} T_k}, \tag{3}$$

где $N -$ общее число ступеней алгоритма $\varepsilon_k -$ расстояние k-й пары в начале $\varepsilon'_k -$ расстояние k-й пары в конце интервала, T_k- интервалы накопления.

Можно выделить несколько достоинств данного метода. Во-первых, он легко реализуется и позволяет с достаточной точностью оценить старший ляпуновский показатель. Во-вторых, его можно модифицировать для определения нескольких старших показателей Ляпунова. Несмотря на все достоинства данный метод не обладает устойчивостью к шуму, и ляпуновский показатель будет слишком сильно возрастать с ростом амплитуды шумового воздействия.

Третий раздел второй главы посвящён методам оценки спектра ляпуновских показателей по временным рядам [20, 22-24]. В отличии от метода расчета старшего ляпуновского показателя по временным рядам, при оценке спектра ляпуновских показателей возникают существенные трудности. Они заключаются в том, что погрешность вычисления старших показателей Ляпунова существенно увеличивается с ростом их номера.

Сначала рассматривается метод Вольфа. Схема метода для оценки двух ляпуновских показателей представлена на рисунке 1. Формула для оценки суммы показателей Ляпунова выглядит следующим образом [20]:

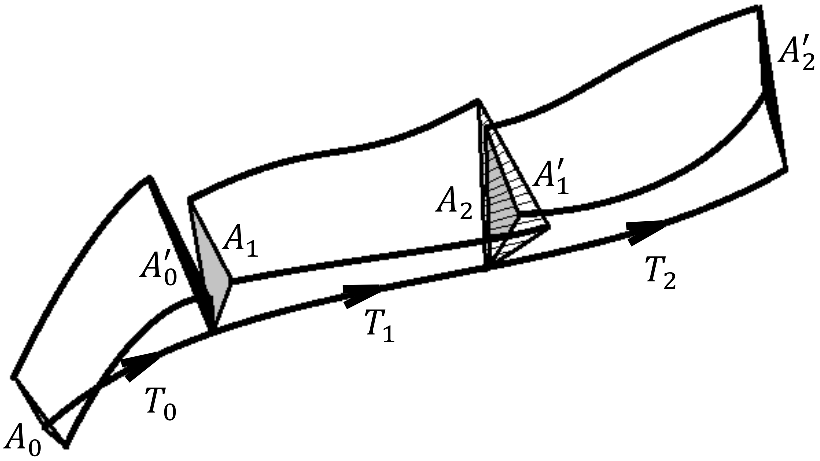

Рисунок 1 – Схема-иллюстрация метода Вольфа для оценки двух ляпуновских показателей. A_k, A_k' – площади возмущенных фигур между k-й парой траекторий в начале интервала накопления T_k и в конце.

$$\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \ln(A_k'/A_k)}{\sum_{k=0}^{N-1} T_k}, \tag{4}$$

где m – размерность фазового пространства исследуемой системы, A_k, A_k' – площади возмущенных фигур между k-й парой траекторий в начале интервала накопления T_k и в конце.

Так как результатом будет являться сумма нескольких старших ляпуновских показателей то для оценки n ляпуновских показателей необходимо применить метод Вольфа n раз с возмущёнными фигурами различной размерности.

Также рассматривается метод преобразования непрерывной динамической системы в отображение [22-25], который предполагает расчет спектра ляпуновских показателей методом Вольфа после преобразования исходных данных. Сперва вводится сечение Пуанкаре [17]: $x(t) = \theta$. Затем, определяется время между двумя последовательными пересечениями фазовой траекторией данной плоскости в одном направлении. Далее, производится построение нового временного ряда с точками, определяемыми формулой [21-23]:

$$\omega(T_i) = \frac{2\pi}{I_i}, \tag{5}$$

где T_i – предыдущее время пересечения плоскости сечения, $I_i = T_{i+1} - T_i$ – временной интервал между двумя последовательными пересечениями в одном направлении, $\omega(\dots)$ – мгновенная частота хаотических колебаний, усредненных за время I_i. Значения $\omega(T_i)$ численно совпадают с мгновенной частотой, полученной преобразованием Гильберта [26] с усреднением и переменным окном. Если восстановить исходный сигнал и при помощи интерполяции ввести одинаковые временные интервалы, то получится временной ряд, который и анализируется. Однако, даже такие манипуляции не обеспечивают достаточную точность вычисления второго старшего показателя Ляпунова.

Также, имеется метод расчета спектра ляпуновских показателей, основанный на поиске коэффициентов матрицы Якоби [25]. Главным недостатком такого подхода является то, что нужные коэффициенты могут не быть обнаружены.

В третьей главе представлены результаты численного моделирования. В качестве исследуемых систем были взяты система Лоренца [17, 22], системаРесслера [17, 23] и две системы Ресслера, связанные однонаправленно [18] и взаимно [27]. Они описываются следующими уравнениями:

$$\begin{gathered} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(R - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz, \end{gathered} \tag{10}$$

где σ = 16, R = 45.92, b = 4.

$$\begin{gathered} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{gathered} \tag{11}$$

где a = 0.15, b = 0.2, c = 10.

$$\dot{x_1} = -\omega_1 y_1 - z_1 + \varepsilon(x_2 - x_1)$$
$$\dot{x_2} = -\omega_2 y_2 - z_2$$
$$\dot{y_{1,2}} = \omega_{1,2} x_{1,2} + a_{1,2} y_{1,2} \tag{12}$$
$$\dot{z_{1,2}} = b + z_{1,2}(x_{1,2} - c),$$

где $a_1 = 0.15, a_2 = 0.09(0.15), b = 0.2, c = 10, \omega_1 = 0.99, \omega_2 = 0.95.$

$$\dot{x_{1,2}} = -\omega_{1,2} y_1 - z_1 + \varepsilon(x_2 - x_1)$$
$$\dot{y_{1,2}} = \omega_{1,2} x_{1,2} + a y_{1,2} \tag{13}$$
$$\dot{z_{1,2}} = b + z_{1,2}(x_{1,2} - c),$$

где $a = 0.15, b = 0.2, c = 10, \omega_1 = 0.99, \omega_2 = 0.95.$

Сначала была произведена оценка оптимальной величины задержки и оценка размерности вложения. Затем были построены восстановленные фазовые портреты систем методом запаздывания. Далее было проведено сравнение значений старшего ляпуновского показателя, рассчитанных методами по временным рядам с величиной, полученной с помощью алгоритма Бенеттина (см. таблицу 1).

Таблица 1 – Сравнение значений старшего показателя Ляпунова, рассчитанного различными методами по временным рядам, с показателем, рассчитанным при помощи алгоритма Бенеттина с использованием метода Рунге-Кутта. В качестве ошибки представлено относительное отклонение от значений показателя, рассчитанного методом Бенеттина.

	Метод Вольфа с накоплением по времени	**Метод Вольфа с накоплением по расстоянию**	**Метод Розенштейна**	**Алгоритм Бенеттина**
Система Ресслера	0,085	0,083	0,082	0,089
Ошибка, %	4,49	6,74	7,87	-

Система Лоренца	1,565	1,524	1,485	1,503
Ошибка, %	4,12	1,39	1,2	-

Затем, зависимость старшего ляпуновского показателя, рассчитанного методом Вольфа, была сопоставлена со спектром показателей, полученным при помощи алгоритма Бенеттина с ортогонализацией Грама-Шмидта (см. рисунок 2).

a b

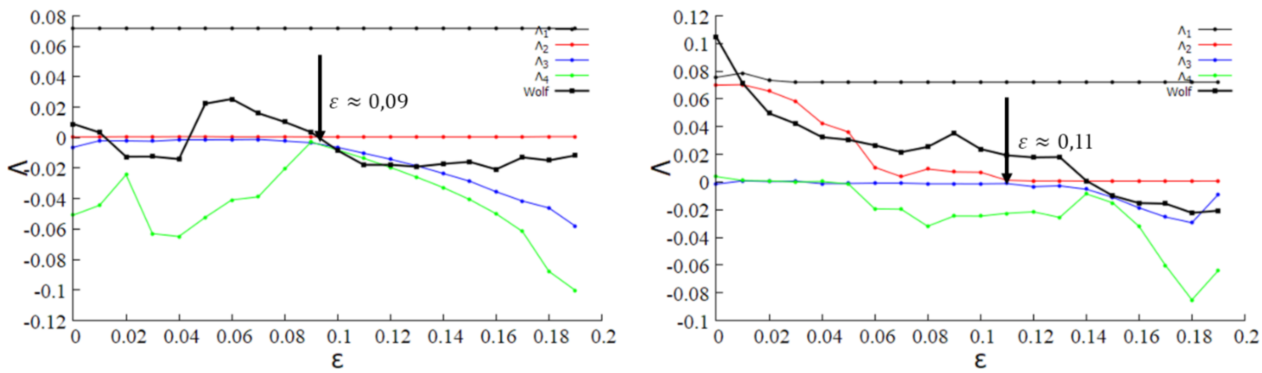

Рисунок 2 – Сравнение старшего ляпуновского показателя, рассчитанного методом Вольфа и при помощи алгоритма Бенеттина. Здесь представлены спектры показателей Ляпунова для однонаправленно связанных систем Ресслера с $a_2 = 0.09$ и $a_2 = 0.15$.

Видно, что во втором случае значение параметра связи, соответствующее переходу к режиму обобщенной синхронизации, полученное методом Вольфа, оказалось несколько больше, чем значение, полученное классическим методом. Это можно объяснить тем, что метод Вольфа недостаточно точен.

На рисунке 3 представлены зависимости относительного отклонения старшего ляпуновского показателя, рассчитанного каждым методом, от отношения амплитуды белого шума к размеру аттрактора. Видно, что значения относительного отклонения старшего ляпуновского показателя, рассчитанные методами Вольфа и Розенштейна, отличаются не только величиной, но и характером поведения. При использовании методов Вольфа насыщение старшего ляпуновского показателя не наблюдается. На графиках, полученных методом Вольфа с нефиксированным интервалом накопления, имеется разрыв, обусловленный тем, что не удается обнаружить нужные точки для новых векторов возмущения.

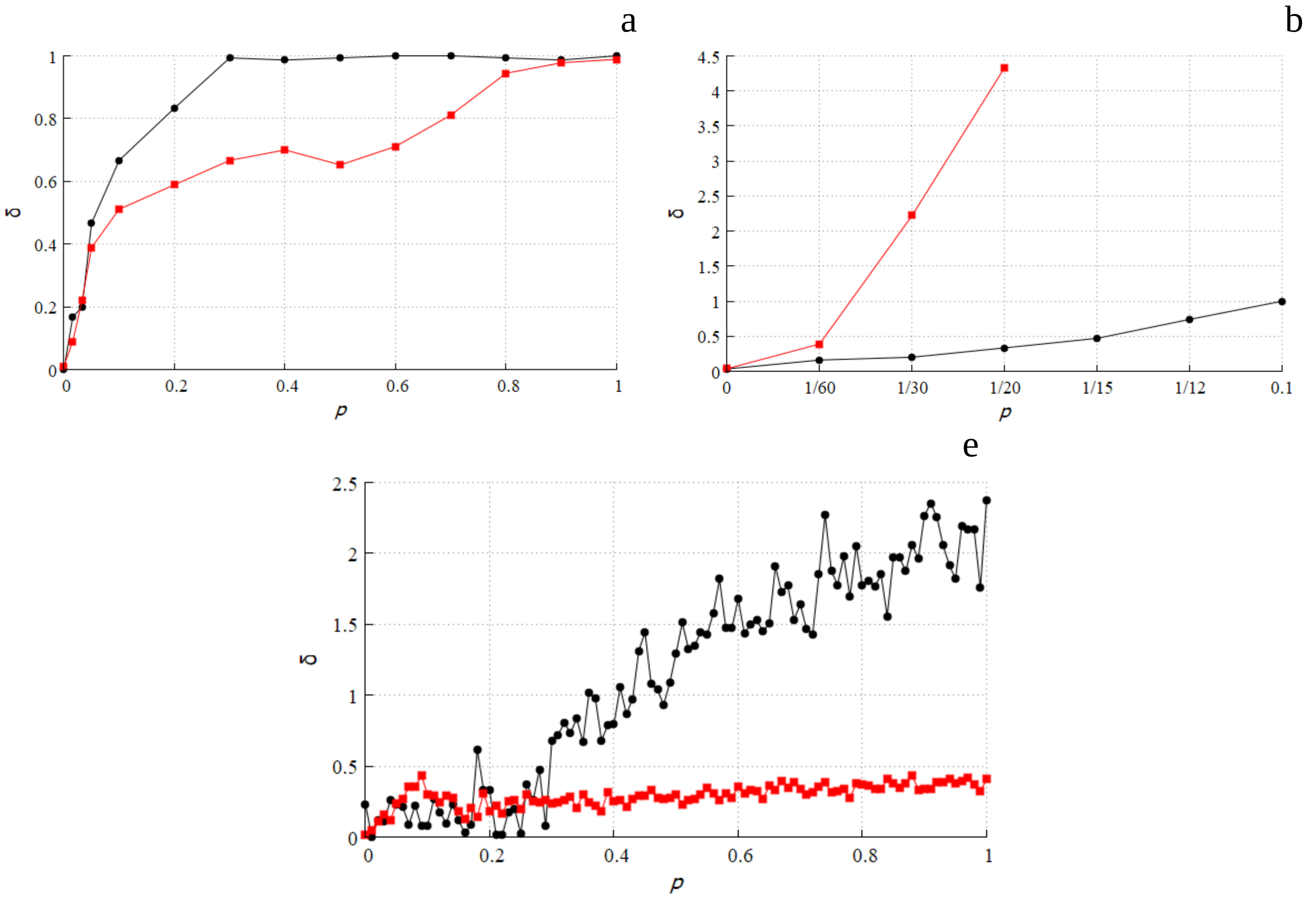

Рисунок 4 – Зависимость относительного отклонения старшего ляпуновского показателя Λ системы Лоренца, рассчитанного методом Розенштейна (a) и методом Вольфа с переменным (b) и фиксированным (c) интервалом накопления

Заключение

В ходе бакалаврской работы были рассмотрены основные методы диагностики обобщенной синхронизации, такие, как метод вспомогательной системы, метод ближайших соседей, метод фазовых трубок и метод расчета ляпуновских показателей (алгоритм Бенеттина). Были представлены методы расчета старшего ляпуновского показателя по временным рядам (метод Вольфа и метод Розенштейна), а также методы определения спектра показателей Ляпунова (метод Вольфа и метод преобразования системы в отображение). Был подробно рассмотрен метод запаздываний, используемый для восстановления фазового пространства исследуемой системы. Была представлена процедура выбора оптимальной величины задержки и метода оценки размерности вложения.

Методы расчета старшего ляпуновского показателя по временным рядам были использованы для изучения динамики хаотических систем Ресслера и Лоренца, а также для определения порогового значения параметра связи, соответствующего переходу к режиму обобщенной синхронизации. Также были продемонстрированы результаты вычисления старшего показателя Ляпунова при добавлении к исходным данным стационарного шума.

Было показано, что наиболее точным является метод Вольфа с фиксированным интервалом накопления в случае однородного аттрактора системы. В противном случае, более точными оказались метод Вольфа с накоплением по расстоянию и метод Розенштейна. Также было установлено, что порог обобщенной синхронизации увеличивается с ростом интервала накопления, а модуль ляпуновского показателя уменьшается.

Метод Розенштейна также показал лучшую устойчивость к стационарному шуму по сравнению с другими подходами, а метод Вольфа с нефиксированным интервалом накопления – худшую.

Метод Вольфа с фиксированным интервалом накопления позволяет получить значение параметра связи, соответствующее переходу к обобщенной синхронизации, с небольшой погрешностью при малой амплитуде шумовых помех во входном сигнале.

Итоговые зависимости методов определения спектра ляпуновских показателей не были представлены в связи с недостаточной точностью.

Результаты работы могут быть использованы при анализе устойчивости системы, а также диагностики обобщенной синхронизации.

Список использованной литературы

1. *S. Boccaletti et al.* The synchronization of chaotic systems // Physics Reports. 2002. V. 366. P. 1.
2. *M. G. Rosenblum et al.* Phase Synchronization of Chaotic Oscillators. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76, № 11. P. 1804.
3. *M. G. Rosenblum et al.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78, № 22. P. 4193.
4. *L. M. Pecora et al.* Driving systems with chaotic signals // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. P. 2374.
5. *A. A. Koronovskii et al.* Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization // Phys. Rev. E. 2011. V. 84, № 3. P. 037201.
6. *А. А. Короновский и др.* О механизмах, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 2. С. 1.
7. *M. G. Rosenblum et al.* Synchronization approach to analysis of biological systems // Fluct. Noise Lett. 2004. V. 4, № 1. P. L53.
8. *O. I. Moskalenko et al.* Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise // Phys. Lett. A. 2010. V. 374, Issue 29. P. 2925.
9. *B. K. Meadows et al.* Nonlinear antenna technology // Proc. IEEE. 2002. V. 90. P. 882.
10. *K. Pyragas et al.* Weak and strong synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. R4508.
11. *Rulkov, N. F.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. V. 51, № 2. PP. 980–994.
12. *Короновский А.А. и др.* Теоретическое исследование обобщенной синхронизации диссипативно связанных хаотических систем в присутствии шума // Изв. РАН. Сер. физическая. 2009. Т. 73, № 12. С. 1723.
13. *Tao Deng et al.* Chaos synchronization in mutually coupled semiconductor lasers with asymmetrical bias currents//Opt.Express.2011.V. 19, Issue 9.P. 8762.
14. *O. I. Moskalenko et al.* Generalized synchronization in mutually coupled

oscillators and complex networks // Phys. Rev. E. 2012. V.86 P. 036216.
15. *H.D. I Abarbanel et al.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys Rev E. 1996. V. 53, № 5. P. 4528.
16. *O.I. Moskalenko* et al. Inapplicability of an auxiliary-system approach to chaotic oscillators with mutual-type coupling and complex networks // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. P. 064901.
17. *С.П. Кузнецов* “Динамический хаос” М:ФИЗМАТЛИТ, 2006.
18. *A. E. Hramov etc.* Analytical expression for zero Lyapunov exponent of chaotic noised oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. 2015. Vol. 78. PP. 118-123.
19. *В.В. Сычев* “Вычисление стохастических характеристик и физиологических данных” Пущино, 1999.
20. *A. Wolf et al.* Determining lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. V. 16. PP. 285-317.
21. *M.T. Rosenstein et al.* A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data series // Physica D. 1993. V. 65, Issues 1-2. P. 117.
22. *A. N. Pavlov et al.* Characterization of the chaos-hyperchaos transition based on return times // PHYSICAL REVIEW E. 2015. V. 91. P. 022921.
23. *A. N. Pavlov etc.* Quantifying chaotic dynamics from integrate-and-fire processes. // Chaos. 2015. V. 25. P. 013118.
24. *A. N. Pavlov etc.* Determining the largest Lyapunov exponent of chaotic dynamics from sequences of interspike intervals contaminated by noise // Eur. Phys. J. B. 2017. 90:61.
25. *Ю.А. Передерий.* Метод оценки спектра ляпуновских показателей по временной реализации // Изв. вузов «ПНД». 2012. т. 20, вып. 1. С. 99.
26. *N. B. Janson et al.* Reconstruction of dynamical and geometrical properties of chaotic attractors from threshold-crossing interspike intervals // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. R4.
27. *А. А. Короновский и др.* Обобщенная синхронизация в сетях со сложной топологией межэлементных связей // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 5. С. 507.