

МИНОБРАНУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

**Решение задачи формирования оптимального портфеля ценных
бумаг по критерию минимизации условного капитала под риском**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 561 группы

направления 09.03.03 – Прикладная информатика

механико-математического факультета

Горемыкиной Екатерины Юрьевны

Научный руководитель

доцент, к.э.н

_____ А.Р. Файзлиев
подпись, дата

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н, профессор

_____ С.И. Дудов
подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Оптимизация портфеля прошла долгий путь от оригинальной работы Марковица (1952), основана на максимизации доходности (среднего значения) и минимизации риска (дисперсии доходности).

Развитие оптимизации портфеля стимулируется двумя основными требованиями:

1. адекватное моделирование функций полезности, рисков и ограничений;
2. эффективность, то есть способность обрабатывать большое количество инструментов и сценариев.

Действующие правила для финансовых предприятий формулируют некоторые требования по управлению рисками в терминах процентных распределений убытков. Верхний процент распределения потерь называется Value-at-Risk (VaR).

Помимо VaR рассматривается, еще один процентный риск CVaR, который называется условной стоимостью риска. Мера риска CVaR тесно связана с VaR. Для непрерывных распределений - CVaR определяется как условная ожидаемая потеря, придерживаясь условия, что оно превышает VaR.

Основным целями работы является:

1. Математическая формализация Value-at-Risk (VaR);
2. Математическая формализация Conditional Value - at - Risk (CVaR);
3. Применение данных подходов по оптимизации портфеля ценных бумаг, на практике.

Портфельное инвестирование Управляя капиталом, профессиональный инвестор сталкивается с множеством сложных проблем при формировании и оценке портфеля. При этом возникает множество вопросов:

1. Чему уделить основное внимание: риску всего портфеля или отдельных активов, входящих в него?
2. Как количественно измерить риск портфеля?
3. Можно ли снизить риск портфеля, изменяя веса активов в нем?
4. Если да, то, как добиться снижения риска, обеспечив доходность портфеля, сравнимую с доходностью составляющих его активов? [1]

При формировании инвестиционного портфеля следует руководствоваться следующими соображениями:

- безопасность вложений (неуязвимость инвестиций от возможных потрясений на рынке);
- стабильность получения дохода;
- ликвидность вложений, то есть их способность участвовать в немедленном приобретении товара (работ, услуг), или быстро и без потерь в цене превращаться в наличные деньги. [1]

Основную проблему, которую необходимо решать при формировании портфеля ценных бумаг, составляет задача распределения инвестором определенной суммы денег по различным альтернативным вложениям (например, акции, облигации, наличные деньги и др.) так, чтобы наилучшим образом достичь своих целей. В первую очередь инвестор стремится к получению максимального дохода за счет: выигрыша от благоприятного изменения курса акций, дивидендов, получения твердых процентов и т.д. С другой стороны, любое вложение капитала связано не только с ожиданием получения дохода, но и с постоянной опасностью проигрыша, а значит, в оптимизационных задачах по выбору портфеля ценных бумаг необходимо учитывать риск.

Как известно, инвестиционный портфель можно рассматривать в качестве набора финансовых или реальных инвестиций. В узком понимании инвестиционный портфель - это совокупность ценных бумаг разного вида, степени ликвидности и срока действия, принадлежащая одному инвестору и управляемая как единое целое.

В 1952 г. Гарри Марковицем была опубликована фундаментальная работа, являющаяся основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования инвестиционного портфеля. Подход Марковица основывается на предположении, что инвестор в данный настоящий момент времени имеет определенную сумму денег для инвестирования. Данная сумма будет инвестирована на конкретный промежуток времени, который назван периодом владения. В конце этого периода инвестор продает ценные бумаги, которые были изначально куплены, после чего:

1. использует полученный в результате инвестирования доход на текущее потребление;
2. реинвестирует полученный доход;
3. делает то и другое одновременно.

Инвестор при выборе портфеля стремится прежде всего:

1. максимально увеличить ожидаемую доходность;
2. максимально снизить неопределенность.

Данные цели противоречат друг другу, но они должны быть учтены при принятии решения о покупке ценных бумаг в момент времени $t = 0$. Проблема выбора инвестиционного портфеля изложена в подходе Марковица к принятию решения о приобретении ценных бумаг, позволяющем адекватно сбалансировать и учесть обе цели.

По сути инвестор не имеет сведений о будущей доходности большинства портфелей. Таким образом, он рассматривает уровень доходности, связанный с любым из портфелей, случайной переменной. Как известно, случайные переменные имеют ряд своих характеристик, некоторые из них - математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Гарри Марковиц утверждает, что решение инвестора должно основываться исключительно на этих характеристиках. То есть он должен оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого портфеля, а затем выбрать «наилучший» из них.

Математическое ожидание представляет собой меру потенциального вознаграждения, связанную с конкретным портфелем, а среднее квадратическое отклонение выступает в качестве меры риска.

Модель стоимостной меры риска (Value-at-Risk). Пусть R_x — случайная переменная, выражающая прибыльность портфеля x за некоторый временной период, $A = a \in (0, 1)$ — процент «наихудших» случаев получения прибыли R_x (то есть неприемлемых с точки зрения инвестора). Значения α близкие к 0 представляют для нас интерес (например, $\alpha = 0.01 = 1\%$, $\alpha = 0.05 = 5\%$).

Вычисленное значение Value-at-Risk (VaR) при заданном уровне α случайной величины R_x (или портфеля x) показывает, что с вероятностью, по крайней мере $(1-\alpha)$, потенциальные убытки не превзойдут величину VaR за указанный временной период. В то же время, вероятность того, что потенциальные потери превзойдут VaR, строго больше α .

Математически величина VaR с уровнем α величины R_x определяется с использованием понятия α -квантиля. Ниже приведены определения и свой-

ства квантилей, которые важны для понимания смысла величины VaR. Далее F — интегральная функция распределения случайной величины R_x .

Модель условного капитала под риском (Conditional Value-at-Risk). В этой главе рассматривается модель выбора портфеля, в которой каждый портфель $(x_1, \dots, x_n)$ характеризуется тремя статистическими величинами: ожидаемым значением доходности, стандартным отклонением и значением Conditional Value-at-Risk (CVaR) с уровнем достоверности $\alpha \in (0, 1)$. В работе отмечается, что рассмотрение трех параметров вместо двух только положительно скажется на модели. Предложенная модель может дать лучшее решение тогда, когда эффективный портфель Mean-Variance имеет слишком большое значение CVaR, а эффективный портфель CVaR имеет слишком большое отклонение.

Различные идеи ограничения риска предлагались математиками при решении задачи выбора оптимального инвестиционного портфеля. Ими были предложены различные способы ограничения риска с использованием нескольких критериев для его оценки. Так, модель Mean-Variance-Skewness («среднего значения-отклонения-асимметрии»), была предложена Конно. Он максимизировал третий момент прибыли портфеля при ограничениях на среднее значение и абсолютное отклонение от прибыли портфеля. Им был предложен оптимизационный подход, в котором соответствующие кубические и квадратические функции аппроксимировались линейными функциями.

VaR и CVaR широко используются в финансовой инженерии в области управления портфелем ценных бумаг.

CVaR используется в сочетании с VaR и применяется для оценки риска с несимметричным распределением затрат. Портфель является оптимизированным путем расчета VaR и минимизация CVaR одновременно. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ - уровень достоверности. Процентные показатели риска, VaR и CVaR можно определить как показано в соответствии с рисунком (1).

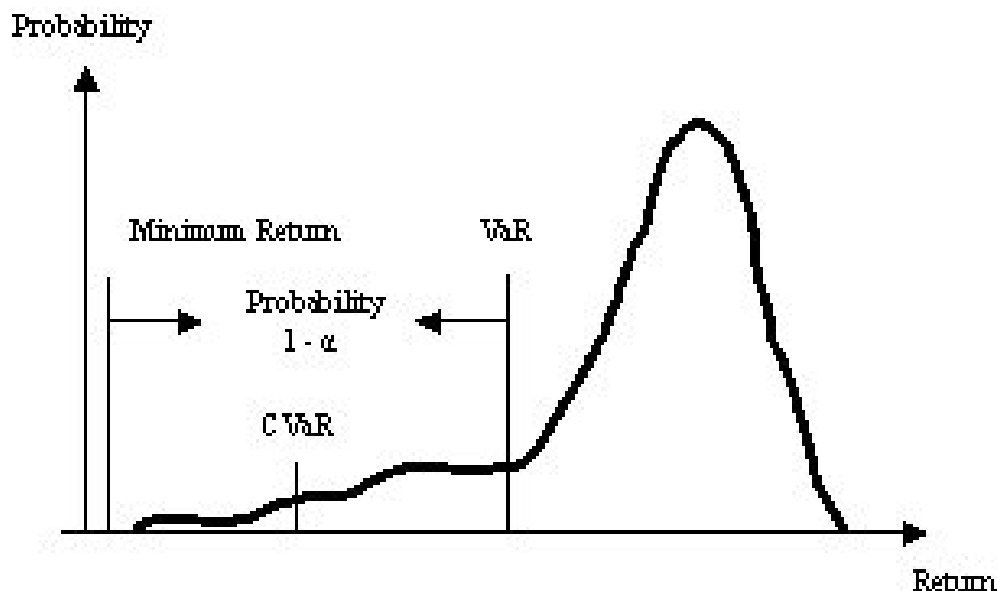


Рисунок 1: VaR и CVaR.

Вонг предложил модель, в которой прибыль портфеля зависит от отклонения, значения VaR и максимальной возможной доходности при накладываемых условиях. Однако способ применения этой модели на практике им найден так и не был.

Кемпбелл Харвей предложил модель, в которой в качестве параметров оптимизации рассматривались ожидаемое значение доходности портфеля, отклонение и асимметрия. Таким образом, он использовал две меры риска: стандартное отклонение и отрицательную часть асимметрии, чтобы определить выбор портфеля.

Филипп Джорион рассматривал модель, в которой распределение прибыли портфеля основывается на отклонении и на ошибке, связанной с нестабильностью отклонения портфеля от базового значения доходности с максимально возможной прибылью при этих условиях.

Есть множество формулировок задач выбора портфеля как моделей многоцелевой оптимизации. Тем не менее, использование CVaR вместе с отклонением в пределах многопризнаковой модели являлось новшеством.

Библиография, упорядоченная по категориям приемов решения задач многокритериального выбора в финансовом деле, представлена в работе Ральфа Стера и Пола На.

существуют различные модели CVaR, рассмотрим их более подробно. Например: Модель CVaR, в которой желаемое отношение между случайными величинами определяется следующим образом: в модели CVaR случайная величина R_x предпочтительней случайной величины R_y (соответственно портфель x предпочтительней портфеля y) тогда и только тогда, когда:

1. $E(R_x) \geq E(R_y)$ — ожидаемое значение доходности портфеля X не менее ожидаемой доходности портфеля Y .
2. $CVaR_\alpha(R_x) \leq CVaR_\alpha(R_y)$.

с как минимум одним строгим неравенством.

Таким образом, не доминирующие эффективные по Парето решения модели CVaR есть эффективные решения многокритериальной задачи оптимизации, в которой ожидаемое значение доходности максимизируется, в то время как отклонение (риск) и CVaR минимизируются:

$$(E(R_x) - CVaR_\alpha(R_x)) \rightarrow \max, x \in A. \quad (1)$$

Для иллюстрации эффективных решений модели в пространстве среднего значения-отклонения-CVaR необходимо построить поверхность, так называемую «эффективную границу» модели CVaR.

Описание программного продукта и применение его на практике

Для создания программы использовался язык программирования - AMPL.

AMPL — язык программирования высокого уровня, созданный в Bell Laboratories с целью описания и решения сложных задач оптимизации и теории расписаний.

Для составления портфеля, будем использовать данные московской биржи, за период с января 2018 года по 24 мая 2019 года. Стоимости акций за рассматриваемый период, смогут предоставить нам достоверную информацию для построения портфеля ценных бумаг.

Были рассмотрены следующие компании:

1. Сбербанк;
2. Газпром;
3. Лукойл;

4. Алроса;
5. МТС;
6. Магнит;
7. Северсталь;
8. Полюс.

Описательная статистика логорифмических доходностей рассматриваемых акций приведены в таблице (1). Как можно заметить, мы выбираем компании самых разных отраслей, чтобы увидеть достоверную картину обработки исходных данных.

Сбербанк	Газпром	Лукойл	Алроса	МТС	Магнит	Северсталь	Полюс
-0,0124	0,0004	-0,0048	-0,0024	-0,0026	0,0071	-0,0141	0,0174
0,0001	-0,0011	-0,0061	-0,0147	0,0078	0,0165	0,0155	0,0036
-0,0058	0,0032	0,0564	-0,0014	0,0604	0,0071	0,0150	-0,0052
0,0284	0,0100	0,0142	-0,0050	0,0130	0,0176	-0,0023	0,0004
-0,0279	-0,0197	-0,0049	-0,0225	-0,0104	0,0162	-0,0133	-0,0038
-0,0208	-0,0240	-0,0111	-0,0352	-0,0188	-0,0001	-0,0469	0,0072
-0,0284	0,0012	-0,0066	-0,0012	-0,0175	-0,0146	0,0111	-0,0135
0,0187	0,0046	-0,0100	0,0271	-0,0136	-0,0039	0,0280	-0,0380
0,0235	0,0112	0,0346	0,1118	0,0080	0,0134	0,0287	-0,0321
-0,0007	0,0009	-0,0038	0,0016	0,0147	0,0077	0,0285	0,0303
-0,0098	0,0045	-0,0147	-0,0177	-0,0108	-0,0119	0,0145	-0,0031
0,0053	0,0133	0,0117	0,0177	0,0068	-0,0101	0,0079	-0,0045
-0,0010	-0,0038	0,0052	0,0150	0,0095	-0,0060	0,0110	0,0097
0,0027	-0,0036	-0,0029	0,0038	-0,0217	0,0023	0,0075	-0,0171
0,0179	0,0057	0,0119	0,0128	-0,0299	0,0216	0,0437	0,0084
-0,0109	0,0029	0,0263	0,0223	0,0131	-0,0035	0,0227	0,0007
-0,0118	-0,0045	-0,0005	-0,0017	-0,0045	-0,0396	0,0233	-0,0420
0,0124	-0,0056	-0,0002	-0,0115	0,0021	0,0084	0,0026	-0,0147

Таблица 1 — Статистика логорифмических доходностей.

	Сбербанк	Газпром	Лукойл	Алроса	МТС	Магнит	Северсталь	Полюс
Min	-0,1760	-0,0433	-0,0754	-0,0882	-0,0909	-0,1189	-0,0566	-0,1986
Max	0,0773	0,1524	0,0690	0,1118	0,0604	0,0790	0,0690	0,0564
Mean	0,0011	0,0015	0,0017	0,0007	0,0006	-0,0017	0,0014	0,0006
Median	0,0003	0,0004	0,0009	0,0006	0,0007	-0,0015	0,0005	0,0004
Variance	0,0004	0,0002	0,0002	0,0003	0,0002	0,0004	0,0002	0,0003
Standard Deviation	0,0191	0,0150	0,0136	0,0159	0,0144	0,0199	0,0134	0,0186
Kurtosis	15,2234	21,7572	3,9881	6,8591	5,2793	6,7772	1,8743	27,2341
Skewness	-1,5103	2,5030	0,3234	0,3675	-0,3784	-0,9581	0,0881	-2,5418

Таблица 2 — Подсчет значений.

Можно отметить, что средняя доходность всех акций была положительна за исключением акций магнит. Как мы видим, значение эксцесса и коэффициента асимметрии для большинства компаний достаточно большие, это свидетельствует о том, что доходности активов имеют распределения с «толстыми хвостами», что является типичным для доходностей активов.

В вычислительных экспериментах применялись пять уровней уровня достоверности $\alpha \in 0,99, 0,95, 0,90, 0,75, 0,50$ и для взвешенной суммы программа подмножество недоминируемых решений были рассчитаны путем параметризации на $\lambda \in 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1$

Сила представленного портфельного подхода продемонстрирована на вычислительных примерах, рисунки (2-4).

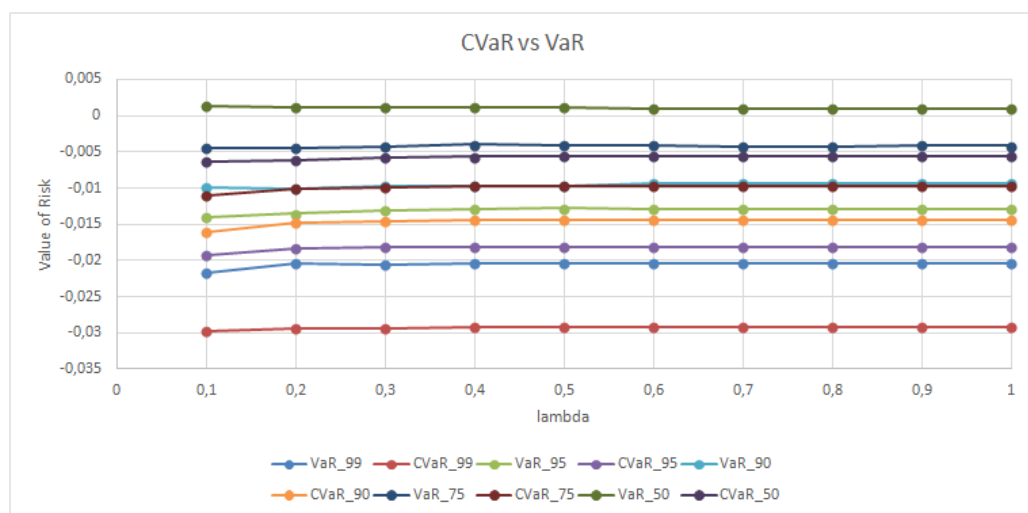


Рисунок 2: CVaR и VaR.

Соотношение ожидаемой доходности представлена, в соответствии с рисунком (2).

Нет смысла после 0.3 увеличивать λ , так как величина риска не меняется. Для любого уровня α это наблюдается.

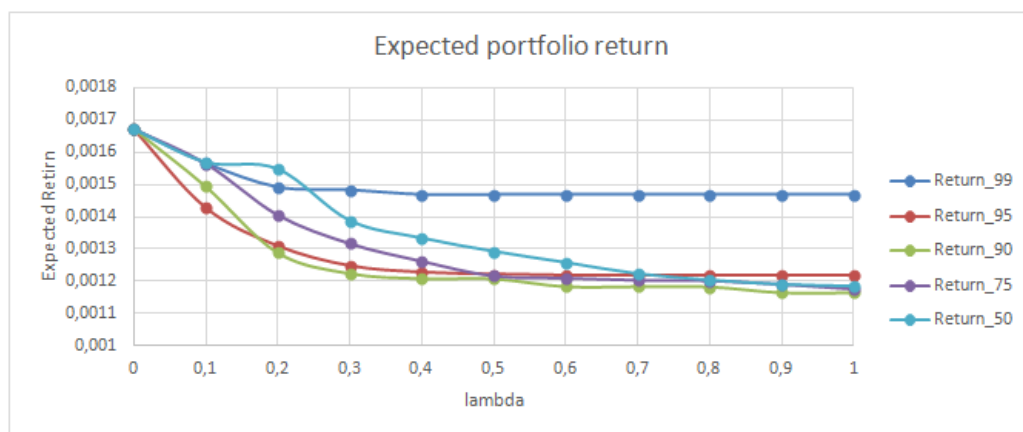


Рисунок 3: Ожидаемая доходность портфеля.

На рисунке (3) приводится ожидаемая доходность портфеля от параметра λ .

Как видно, вполне логично, что при увеличении λ мы получаем портфель с меньшей доходностью. Эти графики дают наглядную иллюстрацию для инвесторов. Они могут сделать выбор: склонность или несклонность.

Граница Парето по имеющимся данным выглядит следующим образом, в соответствии с рисунком (4).

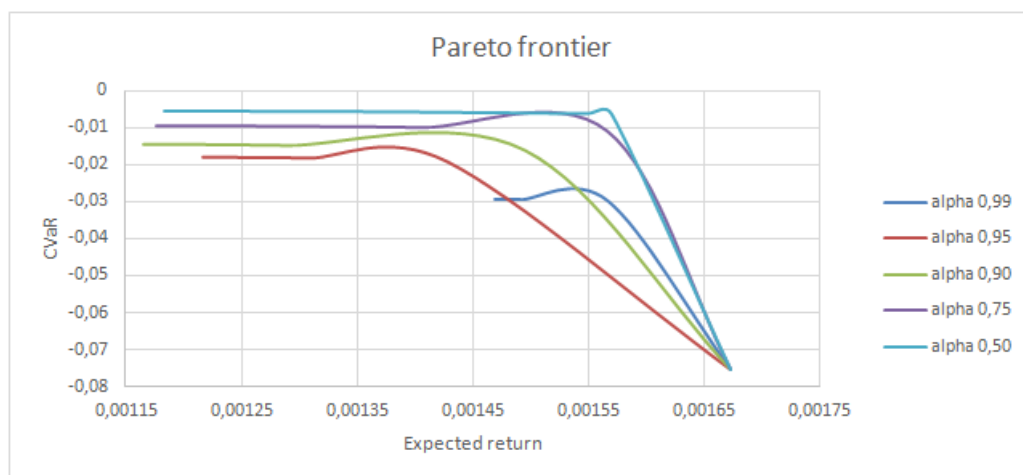


Рисунок 4: Граница Парето.

Приведены границы фронт Парето – это оптимальная граница, но на практике мы будем ориентироваться на 0.99, 0.95, 0.90, 0.95 – видно резкое увеличение риска в точке -0.02, рост доходности падает, эта точка является оптимальным значением.

Работа на реальных данных помогает применить два метода портфельного инвестирования VaR и CVaR. Вычислительные эксперименты позволяют показать, каким образом распределяется доходность в тот или иной период времени, и на каком уровне находится риск вложения своего капитала. Инвесторы не готовые сильно рисковать, будут минимизировать риски.

Вогнутые эффективные границы иллюстрируют компромисс между условным риском и ожидаемой доходностью портфеля. Во всех случаях увеличивается время процесса, когда уровень достоверности уменьшается. Количество ценных бумаг, выбранных для оптимального портфеля не влияет на количество акций.

Конечным результатом подсчета структуры портфеля ценных бумаг представлены в таблице (3)

alpha 0,95											
lambda	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Return	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
VaR	-0.075	-0.014	-0.014	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013	-0.013
CVaR	-0.075	-0.019	-0.018	-0.018	-0.018	-0.018	-0.018	-0.018	-0.018	-0.018	-0.018
St.Dev.	0.000184912	0.000101	0.000095	0.000092	0.000091	0.000091	0.000090	0.000090	0.000090	0.000090	0.000090
Сбербанк	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Газпром	0.000	0.185	0.205	0.143	0.170	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162
Лукойл	1.000	0.407	0.360	0.333	0.290	0.293	0.289	0.289	0.289	0.289	0.289
Алроса	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.009	0.012	0.012	0.012	0.012	0.012
МТС	0.000	0.077	0.108	0.174	0.172	0.169	0.170	0.170	0.170	0.170	0.170
Магнит	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Северсталь	0.000	0.289	0.187	0.220	0.223	0.219	0.221	0.221	0.221	0.221	0.221
Полус	0.000	0.042	0.139	0.129	0.145	0.147	0.146	0.146	0.146	0.146	0.146

Таблица 3 — Структура портфеля.

Заключение. Портфельный подход, представленный в работе, позволил найти применение двум популярным мерам риска:

- значение риска (VaR);
- условное значение риска (CVaR).

Вычислительные эксперименты показывают, что предложенный подход предоставляет лицу, принимающему решение, простой инструмент для оценки взаимосвязи между ожидаемой и наихудшей доходностью портфеля.

Лицо, принимающее решение, может оценить величину доходности портфеля и уровень риска, а также решить, как инвестировать в сложившейся

ситуации по сравнению с идеальными (оптимальными) портфельными решениями.

Лицо, принимающее решение, склонное к риску, буде нацелен на максимизацию условной стоимости под риском. Поскольку величина, на которую потери в каждом сценарии превышают VaR, является положительной, представленные модели пытаются увеличить VaR и, следовательно, положительно влияют на целевые функции. Тем не менее, значительное увеличение VaR может привести к большому количеству исторических портфелей (сценариев) с потерей хвоста, уравнивающего этот эффект.

Вогнутые эффективные границы иллюстрируют компромисс между условной стоимостью под риском и ожидаемой доходностью портфеля. Во всех случаях число итераций для нахождения портфеля увеличивается, когда уровень доверия α уменьшается. Количество ценных бумаг, выбранных для оптимального портфеля, варьируется от 1 до 6 активов. При этом присутствует небольшая зависимость от уровня доверия и размера исторического портфеля, используемого в качестве входных данных. В тоже время весовой параметр λ оказывает влияние на количество акций, выбранных для оптимального портфеля.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Малыхин, В. И. Финансовая математика : учеб. пособие для вузов / В. И. Малыхин ; под общ. ред. Д. Эриашвили. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Юнити, 2003. 237 с.
2. Буренин, А. Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов: учебное пособие / А. Н. Буренин. М. : Первая федеративная книготорговая палата, 1998. 352 с.
3. О'Брайен, Дж. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами (FAST). / Дж. О'Брайен , С. Шривастава. М.: Дело, 1995.156 с.
4. Медведев, Г. А. Математические модели финансовых рисков. / Г. А. Медведев. М. : Минск: БГУ, 1999. 704 с.
5. Сидоров, С. П. Модели оптимального портфельного инвестирования: Учеб. пособие./ С. П. Сидоров. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. — 112 с
6. Дудов, С. И. Оптимальное портфельное инвестирование / С. И. Дудов. Саратов : Саратовский государственный Университет, 2008. 71 с.
7. Четыркин, Е. Н. Методы финансовых и коммерческих расчетов. / Е. Н. Четыркин. М. : Дело, 1992. 378 с.
8. Сухарев, А. Г. Курс методов оптимизации / А. Г. Сухарев А. В. Тимохов , В. В. Федоров. М. : Наука, 1986. 325 с.
9. Первозванский, А. А. Финансовый рынок: расчет и риск / А. А. Первозванский, Т. Н. Первозванская. М. : Инфра-М, 1994. 192 с.
10. Шарп, У. Ф. Инвестиции / У. Ф. Шарп, Г. Дж. Александер, Дж. В. Бейли. М. : Инфра-М, 1997. 1028 с.