МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра **Математической экономики**

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ СГЛАЖИВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 247 группы

направления **09.04.03 – Прикладная информатика в экономике**

механико-математического факультета

Ухановой Ксении Александровны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ____________ А. Ю. Трынин

Зав. кафедрой
профессор, д.ф.-м.н. ____________ С. И. Дудов

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью магистерской работы является исследование свойств синк-аппроксимаций на отрезке функций применительно к анализу котировок валюты и анализ аппроксимативных свойств оператора (1):

$$Ln(f,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi} + \frac{(-1)^{k+1}\sin(nx)}{nx-(k+1)\pi} f\frac{k\pi}{n}. \qquad (1)$$

Актуальность выбранной темы обусловлена рядом объективных факторов, в числе которых можно отметить активное развитие российского фондового рынка с 1998 года. Кроме постоянного увеличения стоимости ценных бумаг российских компаний можно говорить об активном развитии рыночной инфраструктуры и новых формах взаимодействия инвесторов, брокеров и торговых площадок.

Объектом исследования является российский рынок ценных бумаг. Предметом исследования являются колебания котировок ценных бумаг. Источниками исследования являются учебные пособия, научные статьи, интернет-ресурсы и др.

Научная новизна данного исследования заключается в разработке интегрированного инструментария для математического моделирования и сглаживания временных рядов котировок ценных бумаг с целью выявления тенденции роста и падения курса валюты за определенный интервал времени, которая покажет общую картину изменения котировки.

Работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Введение раскрывает актуальность, определяет объект, предмет и цель исследования.

В заключении подводятся итоги исследования, формируются окончательные выводы по рассматриваемой теме.

В приложении представлен исходный код реализованной программы.

Результаты исследований были доложены на научной студенческой конференции «Математика. Механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» механико-математического факультета в городе Саратове. По их результатам сделаны два доклада:

1. Секция: «Математическая экономика и негладкий анализ»
   - Название доклада: «Математическое моделирование трендов котировок ценных бумаг»
   - Научный руководитель: профессор, доктор физико-математических наук Трынин А.Ю.
   - Докладчики: Трынин А.Ю., Уханова К.А.
2. Секция: «Некорректные задачи и вычислительная математика»
   - Название доклада: «О построении одной модели тренда экономических процессов»
   - Научный руководитель: профессор, доктор физико-математических наук Трынин А.Ю.
   - Докладчик: Уханова К.А.

По данной тематике было принято участие в III Международной открытой конференции «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях». По итогам конференции опубликован сборник: Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2018 г. № 6 (42) (Volume 6, issue 6):

- Секция: теория функций и функциональный анализ.
- Публикация: Трынин А. Ю., Уханова К. А. "О явлении Гиббса для одной модификации операторов синк-аппроксимаций стр. 375. [1]

Также по итогам проделанной работы было принято участие в Международной молодежной научно-практической конференции «Школа молодых ученых: достижения в области науки и техники». По итогам конференции опубликован сборник: Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2019 г. № 1 (44) (Volume 7, issue 1):

- Секция: функционально-дифференциальные уравнения и краевые задачи.
- Публикация: Трынин А. Ю., Уханова К. А. "Математическое моделирование трендов котировок ценных бумаг стр. 439. [2]

Данные сборники имеют ISSN и включены в базу данных РИНЦ.

Основное содержание работы

Магистерская работа содерждит следующие разделы:

1. Моделирование трендов и прогнозирование движения рынка;
2. Сглаживание стохастического характера котировок ценных бумаг.

В первом разделе описывается взаимосвязь волнового анализа и математики Фибоначчи, взаимосвязь волновой теории и фундаментального анализа, сравнительный анализ теоретических основ построения "волновой модели". Представлена волновая модель рыночного ценообразования в виде дифференциального уравнения, вид которого определяется характеристиками рынка. При определенных параметрах решение уравнения согласуется с такими инструментами описания поведения рынка, как волны Эллиотта и уровни Фибоначчи. Также было выполнено создание интегрированного инструментария математического моделирования и прогнозирования колебаний котировок ценных бумаг на основе волновой теории Эллиотта для повышения доходности операций инвесторов на фондовом рынке. Волновая теория, разработанная Ральфом Нельсоном Эллиоттом, признается одним из наиболее точных инструментов прогнозирования ситуации на рынке ценных бумаг. С 1983 г. в США функционирует Институт волн Эллиотта (Elliott wave institute) - исследовательская организация, занимающаяся изучением волновой теории и методов ее применения на фондовом рынке.

Была рассмотрена равновесная система, всякая вершина которой характеризуется абсолютной стоимостью, а всякая пара – котировкой. Была построена модель, которая описывает два объекта: цены и предложения на какой-нибудь товар, услугу, ценные бумаги, фьючерсы или опционы.

При построении модели были построены некоторые предположения (аналогично классической системе "хищник-жертва"), которые адекватно описывают данный закон связи между ценой и предложением в следующем виде (система уравнений (2)):

$$\begin{cases} q' = \varphi(t) - \alpha p(t), \\ p' = \psi(t) + \beta q(t). \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, q - цена, p - предложение.

Интересно отметить, что экономическое исследование такого же рода проводил Канторович Леонид Витальевич в своём труде "О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели".

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – это некоторые заданные функции, которые связаны со спецификой товара или ценной бумаги, а также состоянию на данный момент рынка, например, индекс биржи. С точки зрения нашей модели – это известные функции, которые определяются экспериментальным путём. Если речь идет о количестве товаров, то есть существует ли возможность покупать этот товар или нет, возможность поставить этот товар или нет, то это некоторая величина, которая пропорциональна нашей производной, т.е. чем больше $\varphi(t)$, тем больше скорость изменения цен, например. $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – есть ли возможность покупать эти акции или нет, в каком объеме. Нам нужны не конкретные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, а $f(t)$.

Предположительно эта кривая достаточно гладкая (рисунок 1), а не меняется скачкообразно (излом) (рисунок 2).

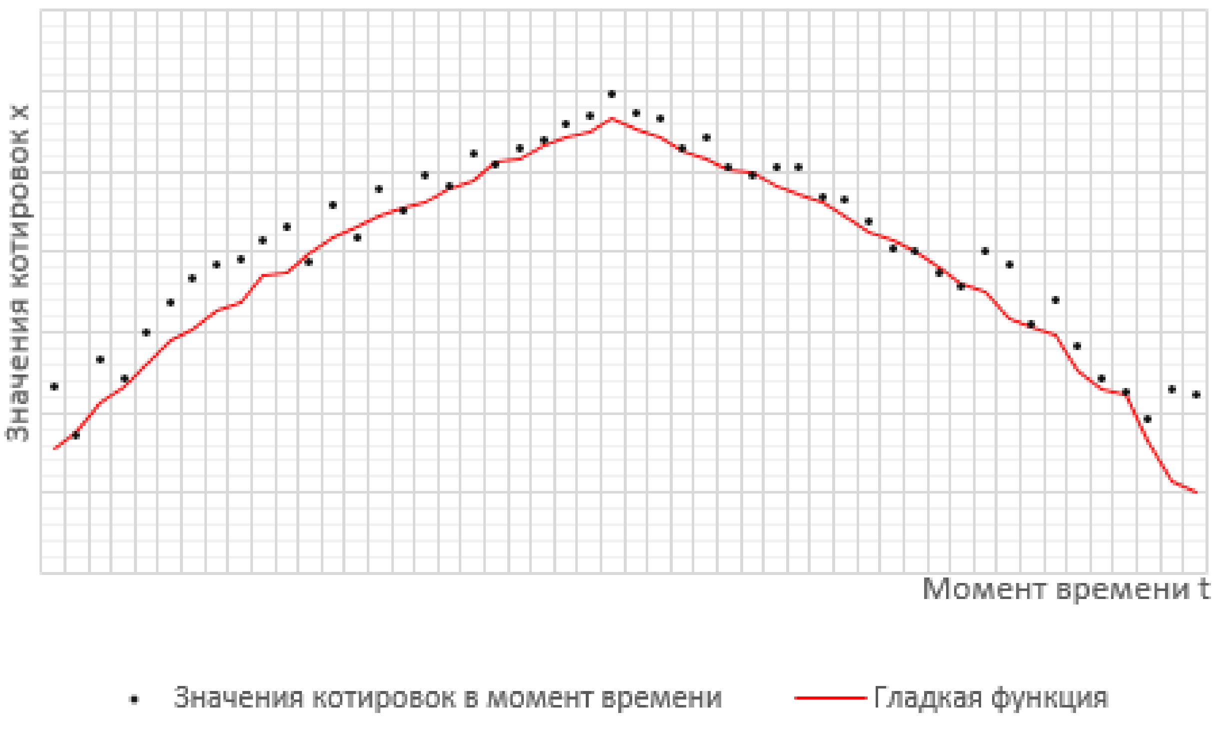

Рисунок 1 — Гладкая функция

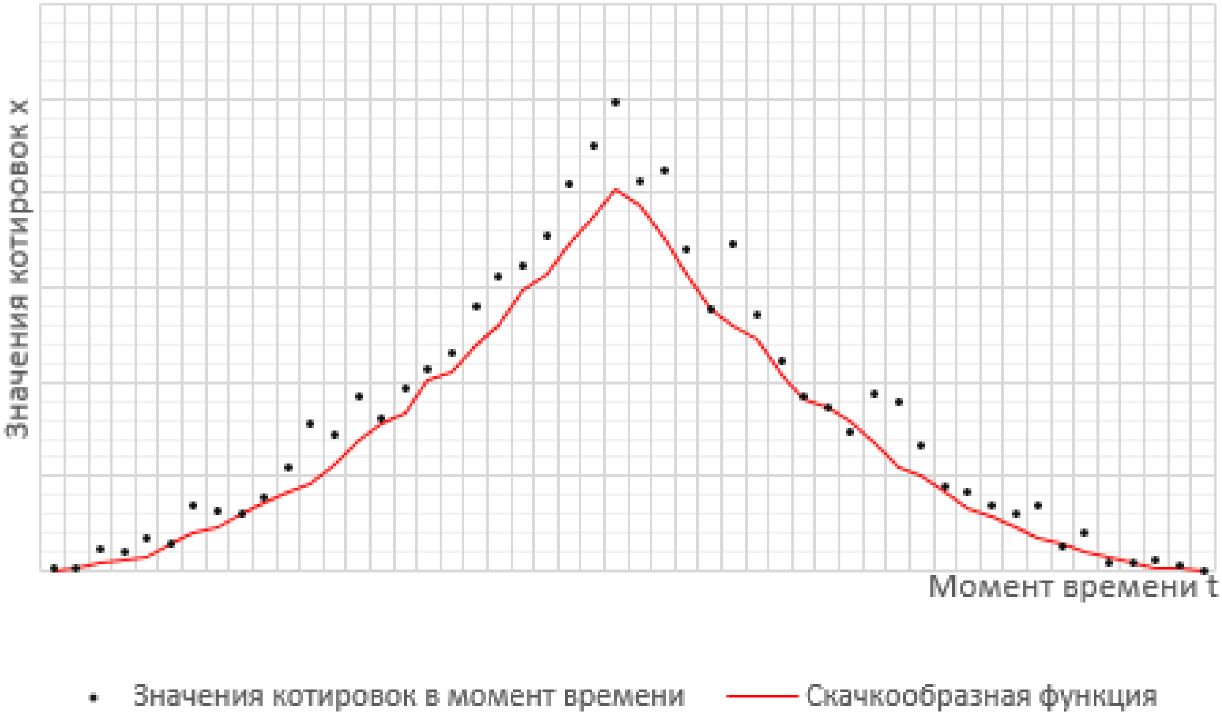

Рисунок 2 — Скачкообразная функция

Построенная математическая модель динамической системы «цена-предложение» после всех преобразований представлена уравнением (3):

$$q'' + aq = f(t) \tag{3}$$

Такого же типа уравнение было предложено в статье преподавателя Московского автомобильно-дорожного института (ГТУ) Н. Л. Брошковой «Математическая теория волн Эллиотта как инструмент анализа фондового рынка» [3], но обоснование того, что это уравнение действительно описывает моделируемый процесс вызывает сомнения. В статье были использованы физические законы, которые в экономике еще не встречались. Наше уравнение имеет тот же вид, но мы по-другому обосновываем адекватность нашей модели.

Во втором разделе приведены необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации, рассмотрена расходимость интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, описаны технологии программирования, используемые при разработке приложения.

Данный раздел посвящен изучению аппроксимированных свойств синк-приближений в тереме Уиттекера-Котельникова-Шеннона ([4] - [7]). Понятие кардинальной функции, сужение с оси на отрезок $[0, \pi]$, которое ввели Э. Борель и Е. Т. Уиттекер, в связи с необходимостью развития теории кодирования сигналов выглядит следующим образом (4):

$$Ln(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f(\frac{k\pi}{n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi} f(\frac{k\pi}{n}). \tag{4}$$

При построении различных численных методов математической физики и приближения функций одной и нескольких переменных [8] в теории квадратурных формул [9] применяются синк-приближения. Интересно отметить, что такой способ приближения используется в теории всплесков [4], [5], [7] или вейвлет-преобразований. Модификации синк-приближений (4), с помощью которых можно приближать ограниченные на оси, произвольные равномерно непрерывные функции, изучаются в [10].

Синк-приближения довольно часто рассматриваются на всей числовой оси, и в данном случае синк-аппроксимации позволяют приближать функции с достаточно высокой точностью для многих классов аналитических функций. Но если рассматривать ограниченный интервал, то синк-аппроксимации могут приводить к большим погрешностям. Изучению явления Уилбрейама-Гиббса при использовании классических синк-аппроксимаций посвящены работы [11] , [12] . Результаты, полученные в этих работах говорят о том, что скачки оператора (4) резко возрастают вблизи концов отрезка $[0, \pi]$.

Насколько известно, до появления работ [12], [13] приближение такими операторами на отрезке, или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций [4], [14] сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. В [13] получена оценка сверху наилучшего приближения непрерывных, исчезающих на концах отрезка $[0, \pi]$, функций линейными комбинациями синков.

Проблемой при использовании оператора (4) является не только ограниченность области. При попытке синк-приближения произвольных негладких непрерывных функций (например, фракталов) возможно появление "резонанса"(представлено в [15]), что приводит к неограниченному росту погрешности аппроксимации на всём интервале $(0,\pi)$. Отсутствие равносходимости значений операторов (4) и рядов или интегралов Фурье на классе непрерывных функций установлено в этой же работе [15].

Различные модификации синк приближений (4), позволяющие приближать произвольные непрерывные функции на отрезке $(0,\pi)$ предложены в [16], [17]. Сделать вывод о тщетности попыток построить оператор в виде линейных комбинаций синков, допускающий возможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции на отрезке, позволяет исследование полноты системы синков (4) в [16] в пространствах $C[0,\pi]$ и $C_0[0,\pi] = \{f : f \in [0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$. Работы [16], [17] посвящены изучению равномерной сходимости. В последнем источнике установлены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости синк-приближений (4) и некоторых их модификаций на отрезке $[0,\pi]$.

Исследованию аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с дифференциальными выражениями второго порядка посвящена работа [18]. Обобщением классических синк-приближений (4) являются операторы, предложенные в [18]. Ряд приложений приводится в [19] результатов работы [18] к исследованию аппроксимативных свойств классических алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей узлов интерполирования, каждая строка которой состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha_n,\beta_n}$ с параметрами, зависящими от n.

Начиная с известной работы Крамера [20] изучаются также аналоги теорем отсчётов для операторов интерполяции Лагранжа по узлам из спектра задачи Штурма-Лиувилля, например, [21].

Серьезная связь имеется между синк-приближениями и интерполяционными процессами Лагранжа, построенными по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Г.И. Натансоном в [22] получен признак Дини-Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0,1)$, процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля.

При сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма-Лиувилля (потенциала q или констант h) аппроксимативные свойства процессов Лагранжа-Штурма-Лиувилля могут сильно измениться. Данный вывод следует из проведенных исследований в [23]. В работе [24] устанавливается существование непрерывной на $[0, \pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа-Штурма-Лиувилля которой неограниченно расходится почти всюду на $[0, \pi]$.

Был проведен численный эксперимент для динамики изменения курса доллара (USD) по дням, месяцам и годам. Падение доллара может быть вызвано геополитическими факторами или опубликованием данных по американскому рынку, которые не оправдали ожидания экспертов и инвесторов.

Курс доллара может подрасти в связи со спросом на валюту или в период выплат компаниями своих внешних долгов. Снижение стоимости нефти на мировых рынках, публикация позитивных статистических показателей по американскому рынку и рост фондовых индексов США также часто сопровождается укреплением доллара.

Отношение курса доллара США к национальным валютам определяется Центральными банками стран мира, которые опираются на результаты валютных торгов на фондовых рынках в своих государствах. В России средневзвешенный курс доллара к рублю определяется также спросом и предложением на биржевых торгах, спекулятивными трендами и различными бизнес-факторами. Например, в день выплаты налогов в рублях в России, доллар может дешеветь.

Анализ динамики изменения курса доллара проводился с помощью написанной программы на языке Java в среде IntelliJ IDEA. Java — сильно типизированный объектно-ориентированный язык программирования, разработанный компанией Sun Microsystems (в последующем приобретённой компанией Oracle). Приложения Java обычно транслируются в специальный байт-код, поэтому они могут работать на любой компьютерной архитектуре с помощью виртуальной Java-машины. Дата официального выпуска — 23 мая 1995 года. На 2019 год Java — один из самых популярных языков программирования.

Программы на Java транслируются в байт-код Java, выполняемый виртуальной машиной Java (JVM) — программой, обрабатывающей байтовый код и передающей инструкции оборудованию как интерпретатор.

Достоинством подобного способа выполнения программ является полная независимость байт-кода от операционной системы и оборудования, что позволяет выполнять Java-приложения на любом устройстве, для которого существует соответствующая виртуальная машина.

В реализованной программе были использованы следующие библиотеки:

1. JFreeChart - java библиотека, которая позволяет разработчикам легко отображать диаграммы профессионального качества в своих приложениях. Обширный набор функций JFreeChart включает в себя:
   - согласованный и хорошо документированный API, поддерживающий широкий спектр типов диаграмм;
   - гибкий дизайн, который легко расширять и предназначенный как для серверных, так и для клиентских приложений;
   - поддержка многих типов вывода, включая компоненты Swing и JavaFX, файлы изображений (включая PNG и JPEG) и форматы векторных графических файлов (включая PDF, EPS и SVG);
   - JFreeChart - это программное обеспечение с открытым исходным кодом или, в частности, бесплатное программное обеспечение.
2. java.io - java библиотека, предназначенная в основном для чтения и записи данных в ресурс:
   - файл;
   - при работе с сетевым подключением;
   - System.err, System.in, System.out;
   - при работе с буфером.

   Процесс чтения данных из ресурса и запись их в назначенное место показан на рисунке 3.

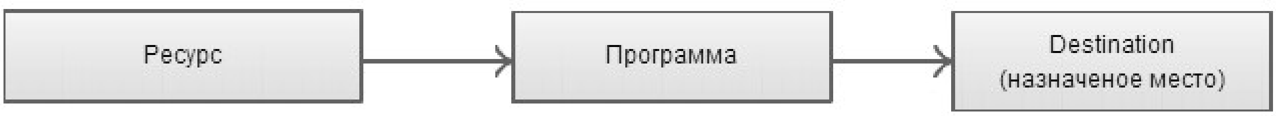

Рисунок 3 — Схема процесса чтения записи данных из ресурса

Программа, которая должна считать данные с потока и записать в поток показана на рисунке 4.

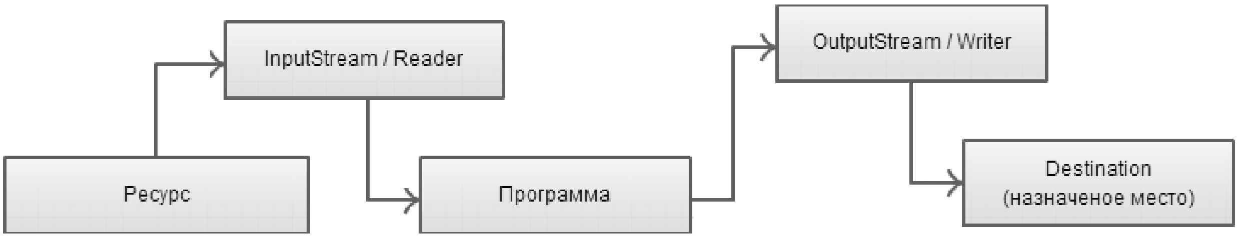

Рисунок 4 — Схема процесса чтения записи данных с использованием потоков

Ресурс связан с InputStream/Reader, а он в свою очередь связан с программой и через него программа получает поток данных. Программа связанна с OutputStream/Writer, и с его помощью есть возможность записывать данные, которые отдала программа в Destination.

В данном классе также используется библиотека JExcel. Библиотека JExcel позволяет легко создавать, изменять или отображать файлы Microsoft Excel.

В программе были написаны следующие классы и ресурсы:

1. LineChart – класс, который используется для построения графиков функций, аргументы и значения которых передаются на вход данному классу. В классе была использована библиотека диаграмм JFreeChart.
2. QuotesReader – класс, который считывает входные данные в формате xls, которые представляют собой динамику изменения курса доллара за определенное время. В данном классе используется библиотека Java IO.
3. Main – является основным классом программы и точкой входа в нее. Данный класс реализует аппроксимацию функции динамики изменения курса доллара на временном отрезке. Значения узлов аппроксимации определяются результатом работы класса QuotesReader. Также в данном классе реализован синк-аппроксимирующий оператор. Результаты аппроксимаций передаются в класс LineChart, посредством передачи входных аргументов и значений в них.
4. usd_quotes_days_before.xls – ресурс, который содержит значения курса доллара до дефолта по дням с 1992 года по 1997 год.
5. usd_quotes_days_after.xls – ресурс, который содержит значения курса доллара после дефолта по дням с 1998 года по 2019 год.

6. usd_quotes_month_before.xls - ресурс, который содержит значения курса доллара до дефолта по месяцам с 1992 года по 1997 год.
7. usd_quotes_month_after.xls - ресурс, который содержит значения курса доллара после дефолта по месяцам с 1998 года по 2019 год.
8. usd_quotes_years_before.xls - ресурс, который содержит значения курса доллара до дефолта по годам (1992г.-1997г.).
9. usd_quotes_years_after.xls - ресурс, который содержит значения курса доллара после дефолта по годам (1998г.-2019г.).

Пример результата работы программы представлен на рисунке 5. Пример данных по динамике изменения курса доллара по годам, месяцам и дням в формате xls, использованные при анализе в программе, представлен на рисунке 6.

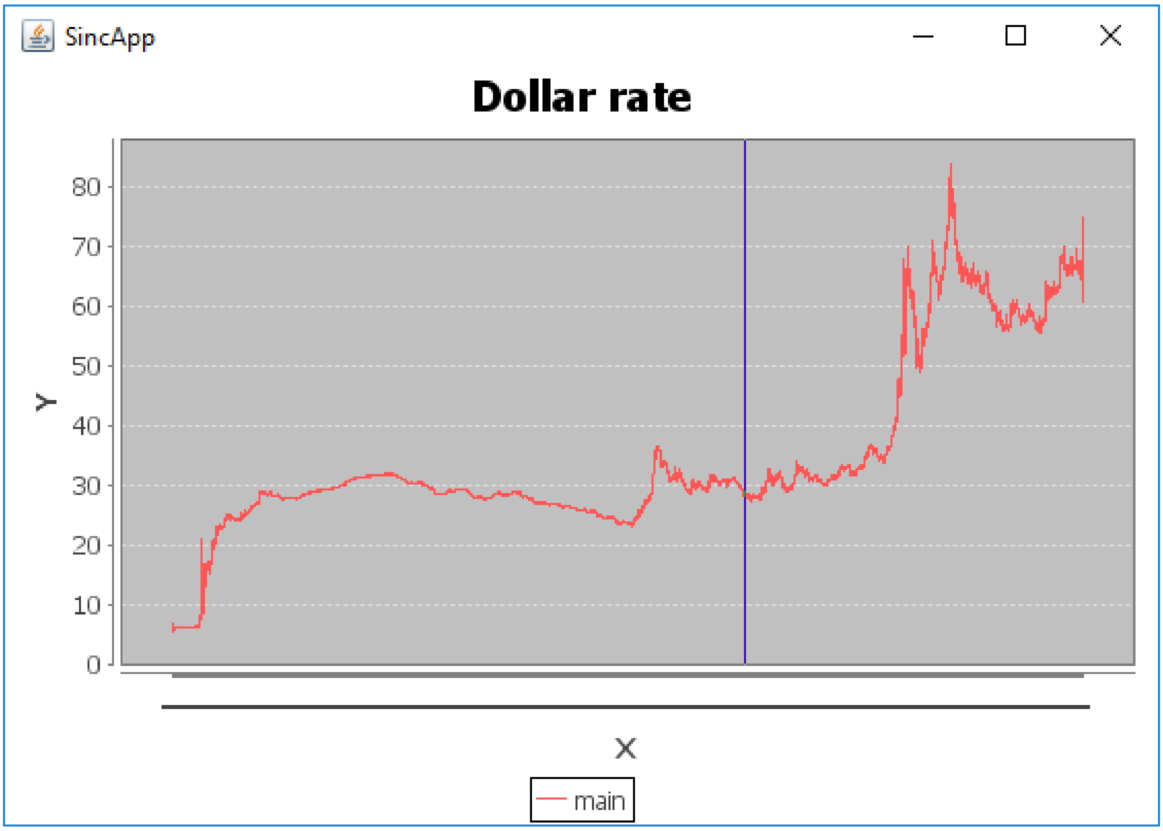

Рисунок 5 — Результат аппроксимации динамики курса доллара по месяцам после дефолта при n=75000

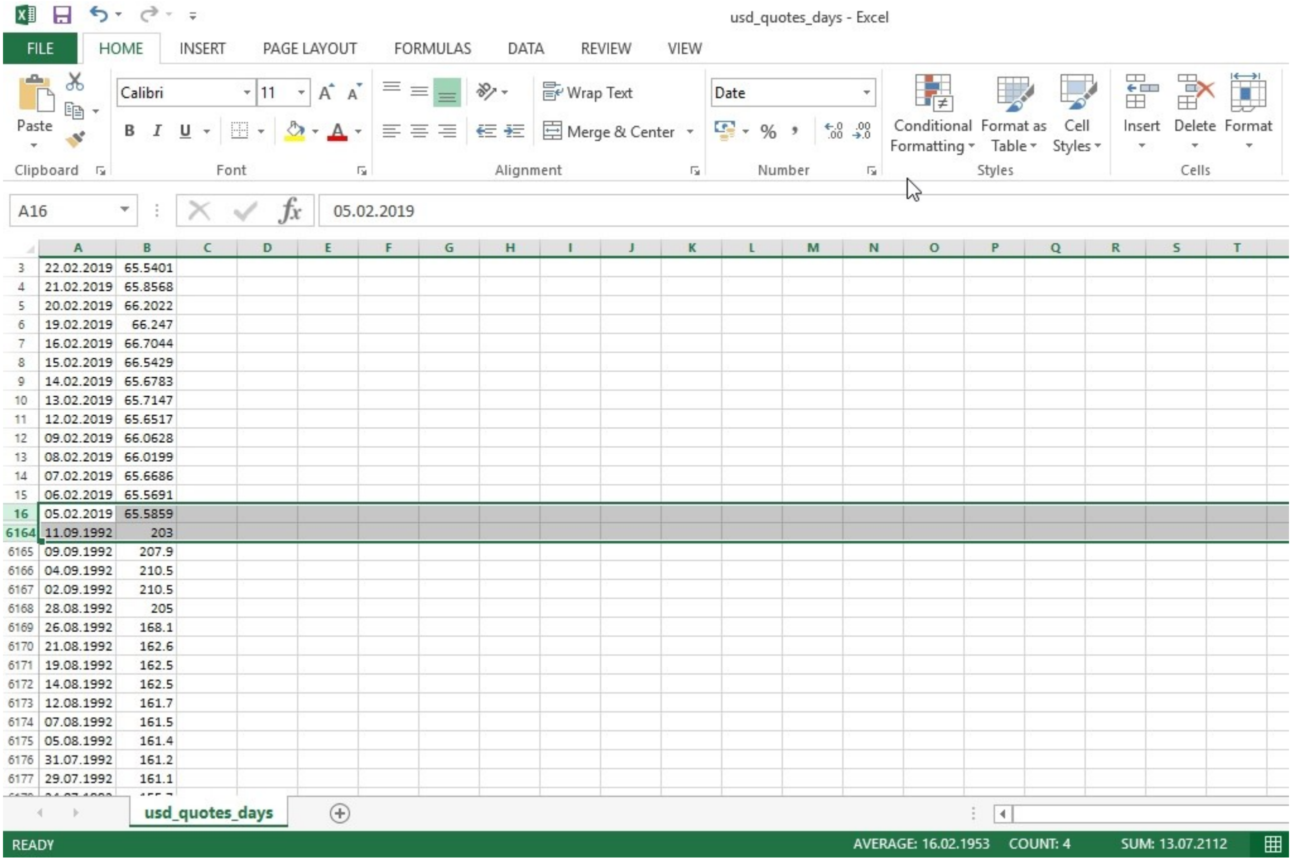

Рисунок 6 — Данные по динамике изменения курса доллара по дням в формате xls

На результат аппроксимации динамики изменения курса доллара влияет как увеличение входных значений, т.е. статистических данных по годам, месяцам и дням, так и увеличение частоты дискретизации. Были получены следующие результаты:

- для динамики изменения курса доллара по годам меньшая погрешность приближения наблюдается при частоте дискретизации n=50 и n=200, а большая погрешность наблюдается при n=25 и n=70, а затем n=10 и n=35 (до и после дефолта).
- для динамики изменения курса доллара по месяцам меньшая погрешность приближения наблюдается при частоте дискретизации n=500 и n=1000, а большая погрешность наблюдается при n=200 и n=500, а затем n=90 и n=350 (до и после дефолта).
- для динамики изменения курса доллара по дням меньшая погрешность приближения наблюдается при частоте дискретизации n=75000, а большая погрешность наблюдается при n=30000, а затем n=15000.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части магистерской работы было выполнено построение математической модели волновых колебаний трендов котировок ценных бумаг, которое описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка для среднего значения цены.

На основании проделанной работы во второй части и по результатам численного эксперимента можно сделать вывод, что оператор имеет более высокие аппроксимативные свойства при увеличении частоты дискретизации.

Расхождение между значениями функции и полученным приближением вблизи концов отрезка можно объяснить явлением Гиббса. Явлением Гиббса называется особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции, впервые обнаруженная Уилбрейамом в 1848 г. и позже переоткрытая Гиббсом в 1898 г.

Оператор синк-аппроксимаций применим к задачам сглаживания временных рядов, что позволяет узнать промежуточные значения котировок валют, не имея полных входных данных динамики изменения данных котировок. При использовании оператора синк-аппроксимаций важным моментом является выбор частоты дискретизации, иначе увеличивается погрешность приближения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сборник Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. № 6 (42) (Volume 6, issue 6), 2018. - 375 с.

2. Сборник Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. № 1 (44) (Volume 7, issue 1), 2019. - 439 с.

3. Брошкова, Н.Л. Математическая теория волн Эллиота как инструмент анализа фондового рынка. Научно-практический журнал "МИР"(Модернизация. Инновации. Развитие) / Н.Л. Брошкова. - М.: ООО Издательский Дом «Наука», 2012. - 67 с.

4. Кашин, Б.С. Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян. - М.: АФЦ, 1999. - 496 с.

5. Новиков, И.Я. Основы теории всплесков. Успехи математических наук. / И.Я. Новиков, С.Б. Стечкин, Т. 53. Выпуск 6(324), 1998. - 12 с.

6. Stenger, F. Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions. / F. Stenger, N.Y., Springer Ser. Comput. Math., 20 Springer-Verlag, 1993. - 4 p.

7. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. - Ижевск, "Регулярная и хаотическая динамика 2001. - 461 с.

8. Livne Oren, E. MuST: The multilevel sinc transform, SIAM J. on Scientific Computing / Oren E. Livne , Brandt Achi, 33(4), 2011. - 1738 p.

9. Stenger, F. Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions. / F. Stenger, N.Y., Springer Ser. Comput. Math., 20 Springer-Verlag, 1993. - 4 p.

10. Kivinukk, A. Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approximation theoremerties, Sampl. Theory Signal Image Process. / A. Kivinukk, G. Tamberg, 8 (1), 2009. - 95 p.

11. Jerri Abdul, J. Lanczos-Like σ-Factors for Reducing the Gibbs Phenomenon in General Orthogonal Expansions and Other Representations / J. Jerri Abdul, Journal of Computational Analysis and Applications, 2(2), 2000. - 127 p.

12. Trynin, A.Yu. Error of sinc approximation of analytic functions on an interval, Sampling Theory in Signal and Image Processing / A. Yu. Trynin, V. P. Sklyarov, 7 (3), 2008. - 270 p.

13. Sklyarov, V.P. On the best uniform sinc-approximation on a finite interval, East Journal on Approximations / V.P. Sklyarov, 14 (2), 2008. - 192 p.

14. Mohsen, A. A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations / A. Mohsen, M. El-Gamel, Z. angew. Matth. Phys. , 1-11, DOI 10.1007/ s00033-006-5124-5, 2006. - 7 p.

15. Трынин, А.Ю. О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ / А.Ю. Трынин, Алгебра и анализ, 22 (4), 2010. - 256 с.

16. Трынин, А.Ю. О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций / А.Ю. Трынин, Алгебра и анализ, 2015. - 194 с.

17. Трынин, А.Ю. Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков / А.Ю. Трынин, Известия высш. уч-ых заведений. Математика., № 3, 2016. - 81 с.

18. Трынин, А.Ю. Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке / А.Ю. Трынин, Математический сборник, 200(11), 2009. - 108 с.

19. Трынин, А.Ю. Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби / А.Ю. Трынин, Известия Российской Академии Наук. Серия математическая, 75(6), 2011. - 162 с.

20. Kramer, H.P. A generalized sampling theorem / H.P. Kramer, J. Math. Phus., 1959. - 72 p.

21. Zayed, A.I. On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems. SIAM J. / A.I. Zayed, G. Hinsen, P.L. Butzer, Appl. Math. 50, No.3, 1990. - 909 p.

22. Натансон, Г.И. Об одном интерполяционном процессе / Г.И. Натансон, Учён. записки Ленинград. пед. ин-та. Т. 166, 1958. - 219 с.

23. Трынин, А.Ю. Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин, Известия высш. уч-ых заведений. Математика., 9(460), 2000. - 73 с.

24. Трынин, А.Ю. О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля / А.Ю. Трынин, Известия высш. уч-ых заведений. Математика., 11, 2010. - 85 с.