

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СТРАХОВОМ БИЗНЕСЕ
АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 248 группы
направления 09.04.03 — Прикладная информатика
механико-математического факультета
Свечникова Егора Александровича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н., доцент

В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ	2
1 Общая характеристика работы	4
2 Основное содержание работы	6
3 Заключение	11

ВВЕДЕНИЕ

Страхование, как известно, специальный механизм перераспределения риска между сторонами при заключении страховой сделки. Обычная схема такой сделки состоит в следующем. В качестве покупателя риска (иными словами, возможного ущерба) выступает страховая компания (страховщик); продавцами риска является группа независимых индивидуумов (клиентов, или страхователей), каждый из которых в соответствии со своей системой предпочтений оценивает угрозу реализации в будущем своего индивидуального риска. Содержание сделки состоит в том, что клиент, желая избавиться от риска и иметь компенсацию в случае возможного ущерба, платит страховой компании определенную сумму и, тем самым, покупает себе “спокойный сон” на весь оговоренный период страхования. Страховая компания, получив такие взносы от клиентов, полагает: вероятность того, что у значительной части клиентов произойдут страховые случаи и придется выплачивать огромную сумму компенсаций, мала, и поэтому суммарных взносов хватит, чтобы покрыть реализовавшиеся ущербы клиентов и собственные издержки. Условие совершения сделки выгодно ее как для клиентов, так и для страховщика, причем решение об этом каждый участник принимает в соответствии со своей системой предпочтений. Для формализации этих предпочтений (которая необходима в нашем случае, когда имеется целью количественный анализ принятия решений) служит теория полезности. В страховой практике также используются инструменты управления риском. Таким инструментом на уровне отношений “страховая компания — отдельный клиент” служит франшиза, под которой понимается определенного вида дележ риска между ними. Следующей ступенью в страховых отношениях является перестрахование: участник сделки здесь с одной стороны, покупатель риска (перестраховочная компания) и, с другой стороны, группа из независимых страховых компаний, каждая из которых хотела бы избавиться от определенной доли риска, заплатив приемлемую фиксированную сумму. Таким образом, в данном случае страховые компании выступают как специальный тип клиентов в сделке по страхованию их рисков. Говоря о риске, мы, следуя подходу, сложившемуся в математической теории страхования, будем подразумевать наличие в модели случайного фактора, т.е. случайной величины (или набора случайных

величин) в строгом понимании этого термина в рамках теории вероятностей. Поскольку в силу своей природы страхование имеет дело с категорией вероятности, то количественный анализ страховых задач неизбежно приводит к использованию методов и понятий теории вероятностей, математической статистики и, в случае динамических моделей, теории случайных процессов. В этой работе основное внимание уделено статической модели, которая, с одной стороны, является базовой и включает в себя многие элементы более общей теории динамических моделей, а с другой - достаточно наглядна для демонстрации возможностей математических методов в количественном анализе рискованных ситуаций, возникающих в страховании. Изложение материала в работе следует описанной выше логике перехода от простых схем страхования к более сложным. Первый раздел содержит базовую терминологию математической теории страхования, которая используется на протяжении всей книги. Второй раздел знакомит с инструментами анализа задач оптимизации рискованных ситуаций. Сюда включены элементы линейной теории полезности и теоретический минимум по анализу экстремальных задач для вогнутых и унимодальных функций. В следующем разделе "стандартная" проблема актуария — задача выбора размеров страховых взносов — рассматривается с двух точек зрения: линейной теории полезности и эвристических принципов, принятых в актуарной практике. Обсуждается связь и различия этих двух подходов. Четвертый раздел посвящен вопросам аппроксимации распределения суммарного риска. Дается описание и условия применимости пуассоновского, сложно-пуассоновского и нормального приближений. В разделе "Франшизы" рассмотрены хорошо известные в страховой практике виды дележа риска между клиентом и страховщиком: безусловная и условная франшизы. Выведены выражения для математического ожидания и дисперсии ущерба и страховых выплат при франшизе, получены соотношения между ними и моментами исходного риска. Заключительная тема — это основные модели перестрахования, здесь обсуждаются эксцедентное перестрахование (stop-loss reinsurance), пропорциональная схема и перестрахование индивидуальных рисков. Приводимые результаты главным образом касаются вычисления моментов и функций распределения после дележа риска между страховщиком и перестраховщиком.

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования Рассматривается актуальная для экономики и менеджмента хозяйствующих субъектов проблема совершенствования организации управления страховыми рисками на российских предприятиях. В спектре рисков любого предприятия всегда присутствует группа страховых рисков, к которым, по определению, применим только один способ управления - передача на рынки страхования. В этой группе, прежде всего, те неблагоприятные случайные события, что характеризуются достаточно низкой вероятностью, но значительными по размеру потенциальными ущербами: стихийные бедствия, техногенные аварии и риски возникновения ответственности (куда входят риски нанесения вреда третьим лицам, окружающей среде и ответственность производителя за некачественный товар). Существенно то, что помимо прямых потерь по таким рискам предприятия несут значительные косвенные убытки, связанные с простоем производства, нарушением процедур управленческого и финансового учета, потерей заказчиков и, возможно даже, ухудшением деловой репутации. Поэтому, как бы дорого ни стоила страховая защита для предприятия, обойтись без нее невозможно. Следовательно, проблема разработки политики и конкретных планов страховой защиты для предприятий всегда актуальна. При этом процесс передачи рисков можно и нужно оптимизировать, чем в практике экономически развитых стран занимаются рискменеджеры или руководители внутренних отделов контроллинга предприятий.

Особенность предлагаемой работы Акцент на постановки и решения задач оптимизации параметров схемы страхования. Представляется, что помимо создания математической модели для выбранной фиксированной схемы страхования и расчета в ее рамках требуемых вероятностных показателей, в область деятельности актуария должны быть включены также и задачи выбора наилучшего в определенном смысле варианта схемы страхования из возможных на данном страховом рынке. Для этого в работе вводится понятие допустимой рискованной ситуации и для нескольких основных типов страховых схем аналитически исследуются задачи нахождения параметров, которые давали бы оптимальную (в смысле заданного критерия) рискованную ситуацию. В качестве инструментов управления риском используются: коэффициент нагруз-

ки страховщика, определяющий спрос на страховые услуги: функция дележа риска между клиентом и страховщиком при франшизе; функция дележа при перестраховании. По типу критерия оптимальности задачи разделяются на две группы: оптимизация резерва страховщика и оптимизация функционала ожидаемой полезности, максимум которого ищется на множестве допустимых рискованных ситуаций. Приведенные теоретические результаты по построению и оптимизации моделей иллюстрированы примерами. Предлагаемый анализ нескольких “характерных” типов экстремальных задач, конечно, не исчерпывает весь круг проблем при оптимизации принятия решений в страховании. В реальности при решении задачи управления рискованной ситуацией часто приходится принимать во внимание сразу несколько критериев (которые нередко трудно формализуемы, т.е. представимы в строго-математической форме) и ряд внешних ограничений на набор варьируемых параметров.

Структура работы. Магистерская работа состоит из введения, девяти разделов, списка обозначений, приложения и списка использованных источников.

Цель работы. Цель работы, изучить актуальность системы страхования информационных систем в современном мире. Понять, как она работает? Какие требования нужны для работы? Описать метод наименьших квадратов (МНК). Расписать основные виды функций полезности. Показать стандартизованную функцию полезности и привести пример использования функции полезности. Показать возможности методов оптимизации при выборе наилучшей страховой схемы, главным образом, в несколько идеализированной и упрощенной постановке одномерной экстремальной задачи.

2 Основное содержание работы.

Элементы теории принятия решений в условиях риска. Сравнение качества или полезности разных вариантов рискованной ситуации, отвечающих различным схемам страхования (страховым сделкам), происходит для каждого ее участника согласно собственной шкале предпочтений. Описываются Аксиомы:

- Первая - сравнимости выигрышей. Для любых двух выигрышей Y_1 и Y_2 ИПР всегда может указать, какой ему более предпочтителен, $Y_1 > Y_2$ или $Y_2 > Y_1$, или же они оба эквивалентны $Y_1 \sim Y_2$.
- Вторая - транзитивности. Если $Y_1 > Y_2$ и $Y_2 > Y_3$, то $Y_1 > Y_3$. Аналогично для соотношения эквивалентности: если $Y_1 \sim Y_2$ и $Y_2 \sim Y_3$, то $Y_1 \sim Y_3$.
- Третья - независимости. Пусть $Y_1 > Y_2$, и Y_3 — произвольный случайный выигрыш из $\{Y_a\}_{a \in A}$. Тогда для любого $\alpha \in (0, 1)$ выигрыш $Y_{1,3}^\alpha$, который определяется как равный с.в. Y_1 с вероятностью α и равный с.в. Y_3 с вероятностью $1 - \alpha$, предпочтительнее $Y_{2,3}^\alpha$, аналогично составленного из Y_2 и Y_3 .
- Четвёртая - устойчивости предпочтений. Пусть для некоторых трех выигрышей выполнено $Y_1 > Y > Y_2$. Тогда найдутся числа $\alpha, \beta \in (0, 1)$, такие, что $Y < Y_{1,2}^\alpha$ и $Y < Y_{1,2}^\beta$. В частности, это предположение говорит о том, что если не самый "худший" выигрыш из всех $Y_1 < Y$ то никакой другой выигрыш Y_2 не может быть полезным настолько, чтобы для любой (малой) вероятности $1 - \beta > 0$, приписанной Y_2 , выполнялось бы $Y < Y_{1,2}^\beta$.

Проблема определения размеров страховых взносов. Участники страховой сделки: страховщик и страхователи — для того, чтобы сделка состоялась, должны прийти к взаимоприемлемому решению о величине взносов (другими словами, тарифов); при этом страховщика, принимающего суммарный риск, интересует прежде всего суммарный взнос D , а каждого отдельного клиента — величина его индивидуального взноса d_i . Формализация понятия "взаимоприемлемости" и составляет предмет изучения в данном разделе. Ниже будут рассмотрены: вычисление D и d_i как Парето-оптимального решения некоторой многокритериальной задачи, а также установившийся в страховой

практике способ расчета взносов начислением рисковой надбавки (нагрузки) с помощью экзогенного показателя типа коэффициента нагрузки.

Также в этом разделе представлена задача выбора страхового взноса в рамках теории полезности.

$$Eu_0(S + D - X) \geq u_0(S)$$

$$J_0(d) \equiv Eu_0(S + \sum_1^n d_i - X) \rightarrow \max$$

$$J_i(d) \equiv u_i(S_i - d_i) \rightarrow \max$$

$$i = 1, \dots, n$$

Теорема 9 Пусть d^0 является решением задачи

$$\begin{cases} \sum_0^n \lambda_i J_i(d) \rightarrow \max & \text{где } \lambda_i \text{ — произвольные константы, такие что} \\ d \in A \end{cases}$$

$\lambda_i > 0, \sum_0^n \lambda_i = 1$ Тогда d^0 — одна из Парето-оптимальных точек в зада-

че.

В этом разделе описывается понятие риска и его виды.

1. Страховой риск — предполагаемое вероятное событие или совокупность событий, на случай наступления которых проводится страхование
2. Страховое событие — событие, указанное в договоре страхования, по поводу наступления которого заключен договор.
3. Страховой случай — свершившееся событие, предусмотренное законом (при обязательном страховании) или договором страхования (при добровольном страховании), при наступлении которого и
4. соблюдении условий договора страховщик обязан сделать страховую выплату.
5. Риск-менеджмент — представляет собой комплекс мероприятий, направленный на уменьшение вероятности возникновения риска или компенсацию последствий его реализации. Процесс
- 6.
7. управления риском состоит из нескольких последовательных этапов:
8. Анализ риска.
9. Выбор методов воздействия на риск при оценке их сравнительной эффективности.
10. Принятие решения.

11. Воздействие на риск.

12. Контроль и оценка результатов процесса управления

Оптимальный выбор параметров рискованной ситуации I тип оптимизационной задачи

$$\begin{cases} J(a) \equiv J[S_a, D_a, F_a(*)] \rightarrow \max \\ P\{S_a + D_a \geq a\} \geq \beta; \alpha \in A \end{cases} \quad \text{где функционал } J \text{ имеет смысл средней}$$

прибыли или средней полезности рискованной ситуации, множество задано

внешними ограничениями на возможные решения α Последний тип функции

$J(a)$ будет подробнее рассмотрен в разделе "Перестрахование". Отметим

лишь, что в частном случае, когда минимизируются только вмененные из-

держки $I(\hat{a}) \equiv S\theta$ на множестве параметров $\hat{a} = (S, a) \in R \times A$, то

минимальное S , при котором выполняется $P\{S + D \geq X\} \geq \beta$, очевидно есть

$S_a(a) = x_\beta^\alpha - D_a$, где x_β^α — квантиль порядка β распределения суммарного

риска X_a . Тогда задача

$$\begin{cases} J(a) \equiv J[S_a, D_a, F_a(*)] \rightarrow \max \\ P\{S_a + D_a \geq a\} \geq \beta; \alpha \in A \end{cases} \quad \text{сводится к задаче минимизации необходи-$$

мого объема собственных средств $S_*(a) \rightarrow \min, a \in A$

II тип оптимизационной задачи заключается в том, что вместо введения

жесткого ограничения на вероятность неразорения $\beta: P\{S + D \geq X\} \geq \beta$ мы

будем неявно учитывать нежелательность превышения $X > S + D$, используя

в максимизируемой ожидаемой полезности $Eu(S + D - X)$ функцию $u(y)$,

убывающую при отрицательных y .

В этом параграфе мы будем использовать определение допустимой риско-

вой ситуации, принятое в I типе задач, т.е. в смысле выполнения неравенства

$$P\{S + D \geq X\} \geq \beta.$$

Раздел, где описываем метод наименьших квадратов и пример решения

задачи. (МНК) — математический метод, применяемый для решения различ-

ных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений неко-

торых функций от искомым переменных. Он может использоваться для «ре-

шения» переопределенных систем уравнений (когда количество уравнений

превышает количество неизвестных), для поиска решения в случае обычных

(не переопределенных) нелинейных систем уравнений, для аппроксимации

точечных значений некоторой функции. МНК является одним из базовых

методов регрессионного анализа для оценки неизвестных параметров регрессионных моделей по выборочным данным.

В седьмом разделе представлены основные виды функций полезности, а именно линейную функцию полезности и функцию полезности Леонтьева.

Стандартизированная функция полезности Требуется построить функцию полезности $u(u)$ некоторого ИПР, если известно, что его неприятие риска не зависит от величины капитала, и экспериментально получен ряд значений $u(y)$ в десяти точках:

X	0	0,34	0,42	0,5	0,73	0,75	0,89	0,92	0,95	1
Y	-5	1	4	5	10	12	13	16	17	20

Этот раздел, раздел обозначений.

- X_i - случайная величина (с.в.), равная ущербу i -го клиента на страховом периоде
- X_i^0 страховая выплата или ущерб i -го клиента при условии, что страховым случаем произошёл
- X - суммарный ущерб группы клиентов
- EX - математическое ожидание (среднее) X
- $VarX$ дисперсия X
- M_1 - средний ущерб клиента (из однородной группы)
- σ_1^2 - дисперсия ущерба клиента
- $\lambda(x)$ - интенсивность распределения страховой выплаты
- $F(x)$ - функция распределения (ф.р.) суммарного ущерба X $1 - F(x)$
- χ_β - квантиль порядка β распределения $F(x)$
- $F_1(x)F_i^0(x)$ - функции распределения, соответственно, ущерба и страховой выплаты клиента
- $suppF_1$ - носитель (спектр) распределения ущерба $F_i(x)$
- IS - страховая сумма или верхняя грань спектра $F_i(x)$
- $\phi_{m,\sigma}(x)$ - нормальный закон распределения со средним M и дисперсией σ^2 стандартный нормальный закон распределения $\phi() = \phi_0, 1 ()$ и его плотность $beta^N$ - квантиль порядка (3 стандартного нормального распределения)

- $P(\lambda)$ - пуассоновское распределение с параметром λ сложно-пуассоновское распределение с параметром λ числа слагаемых и ф.р. $G(x)$ одного слагаемого
- d - индивидуальный страховой взнос
- D - суммарный страховой взнос
- S - собственный капитал страховой компании (страховщика)
- S_* - минимальный собственный капитал страховщика, обеспечивающий заданную вероятность неразорения
- - принимающий решения индивидуум
- $u(y)$ - функция полезности • •
- A - множество допустимых решений
- $a \vee b$ - $\max a, b$,
- $a \wedge b$ - $\min a, b$
- $\widehat{X}_1(X_1(k))$ - часть риска клиента, погашаемая страховщиком при договоре с франшизой (уровня k)
- \widehat{Z}_1 - часть риска, остающаяся у клиента при договоре с франшизой суммарный риск, погашаемый страховщиком при франшизе часть исходного риска X , погашаемая страховщиком при перестраховании (с параметром r)
- $\widehat{X}(X(r))$ - часть исходного риска X , передаваемая на перестрахование плата за перестрахование

3 Заключение

На протяжении всего изложения промежуточные выкладки и итоговые результаты приводятся с использованием функций распределения индивидуальных рисков, т.е., ущербов отдельных клиентов. Таким образом, распределения вероятностей этих случайных величин (или их вероятностные характеристики) а priori предполагаются известными. Мы намеренно отказались от освещения вопросов, связанных с организацией сбора статистических данных и методами получения оценок вероятностных характеристик рисков, поскольку в виду обширности и разнообразия задач страховой статистики эта проблематика заслуживает отдельного рассмотрения. Единственное отступление от этого правила — статистический анализ данных по реальному страховому портфелю, проведенный в приложении. Он включен в работу с целью иллюстрации применения теоретических результатов на примере решения от начала и до конца конкретной задачи по оптимизации страховой схемы, где распределение индивидуальных рисков строится на основе статистических данных об ущербах клиентов — информации, которой обычно обладает страховая компания.