

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»  
(СГУ)

Кафедра теоретических основ  
компьютерной безопасности и  
криптографии

**Минимальные расширения ориентаций циклов**

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы  
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность  
факультета компьютерных наук и информационных технологий

Ислямгалиева Тимура Булатовича

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

М. Б. Абросимов

18.01.2019 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

М. Б. Абросимов

18.01.2019 г.

Саратов 2019

## ВВЕДЕНИЕ

В наше время вычислительные системы используются практически во всех областях жизни, поэтому их надежность является крайне важным свойством. Особую роль надежность играет в критических областях: авиация, космические полеты, энергетика, военная промышленность. На практике элементами таких систем могут являться процессоры или компьютеры в распределенных вычислениях или интеллектуальные агенты в многоагентных системах.

В 1976 году Джоном Хейзом была предложена графовая модель для исследования отказоустойчивости технических систем. Особое внимание было оказано системам, представимым циклами: были предложены схемы оптимальной 1-отказоустойчивой реализации (минимального 1-расширения) цикла [1]. В 1993 году Хейз совместно с Харари предложил понятие *реберной отказоустойчивости*, обобщив модель на случай отказа связей между элементами системы. Позже было предложено называть модель отказоустойчивости, в которой рассматриваются исключительно отказы элементов, *вершинной отказоустойчивостью* [2, 3].

Задача проверки вершинных и реберных  $k$ -расширений графов является NP-полной задачей, а значит, не известно полиномиального алгоритма для построения оптимальной  $k$ -отказоустойчивой реализации графов. В данной работе рассматривается задача генерации всех минимальных 1-расширений ориентаций циклов и ее составная задача – генерация 1-расширений неориентированных циклов.

Цель работы – на основе алгоритмов поиска гамильтоновых циклов реализовать алгоритм генерации всех минимальных вершинных и реберных 1-расширений ориентаций циклов на языке программирования C++ и применить его на практике, получить каталог всех минимальных 1-расширений ориентаций циклов с числом вершин до 10. Проанализировать результаты, привести статистическую информацию и структурные особенности полученных минимальных 1-расширений ориентаций циклов.

Дипломная работа состоит из введения, 7 разделов, заключения, списка использованных источников и 10 приложений. Общий объем работы – 88 страниц, из них 31 страница – основное содержание, включая 6 рисунков и 17 таблиц, список использованных источников из 17 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В разделе 1 «Основные определения и понятия» приводятся определения из теории графов, используемые в работе. Основными считаются определения ориентированного и неориентированного графов, гамильтоновости графа и минимального вершинного и реберного  $k$ -расширения графа.

Раздел 2 «Поиск гамильтонова цикла в графах с максимальной степенью вершин 3» посвящен задаче поиска гамильтонова цикла в кубических графах. В разделе сформулирован алгоритм Эпштейна [8] для проверки графа на гамильтоновость, доказана корректность основных шагов алгоритма.

В разделе 3 «Генерация 1-расширений циклов» рассматривается задача генерации 1-расширений для неориентированных циклов. Приводятся основные достижения по данной задаче: в 2016 году были получены результаты для 28-вершинных минимальных 1-расширений циклов, расчеты проводились на кластере высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ. [9]

В подразделе 3.1 «Кубические минимальные 1-расширения циклов» рассматриваются вершинные 1-расширения циклов с нечетной длиной и реберные 1-расширения циклов с четной длиной. В подразделе описаны основные идеи применения алгоритма Эпштейна для получения всех кубических минимальных 1-расширений соответствующих циклов.

Подраздел 3.2 «Минимальные 1-расширения с вектором степеней  $(4, 3^n)$ » посвящен неориентированным циклам и их минимальным вершинным и реберным 1-расширениям с нечетным числом вершин. Приведено описание проверки наличия гамильтонова цикла в таких графах. Сформулирован общий подход к получению всех минимальных вершинных и реберных 1-расширений циклов.

Заключительный подраздел 3.3 «1-расширения циклов с максимальной степенью вершин» обобщает подходы первых двух подразделов на задаче поиска вершинных и реберных 1-расширений циклов с максимальной степенью вершин, не превышающей заданной. Данные расширения необходимы для

перехода к ориентированным графам и поиска минимальных 1-расширений ориентаций циклов.

Раздел 4 «Генерация минимальных 1-расширений ориентаций циклов» посвящен основной задаче дипломной работы – получению всех минимальных вершинных и реберных 1-расширений ориентаций циклов с помощью полученных 1-расширений циклов из раздела 3. Описана сложность перехода от неориентированных графов к ориентированным из-за их сильно возросшего количества. Рассмотрен общий случай поиска минимальных 1-расширений ориентаций циклов. Сформулированы и доказаны леммы для оптимизации общего случая поиска.

**Лемма 4.1.** Пусть  $\vec{G}^*$  – минимальное вершинное  $k$ -расширение орграфа  $\vec{G}$ . Тогда симметризация орграфа  $\vec{G}^*$  является вершинным  $k$ -расширением симметризации орграфа  $\vec{G}$ .

**Следствие.** Пусть граф  $G^*$  является минимальным вершинным  $k$ -расширением графа  $G$ , диграф  $H$  есть некоторая ориентация графа  $G$ , а диграф  $H^*$  есть некоторая ориентация графа  $G^*$ . Тогда если  $H^*$  является вершинным  $k$ -расширением диграфа  $H$ , то  $H^*$  является и минимальным вершинным  $k$ -расширением диграфа  $H$ .

**Лемма 4.2.** Если диграф  $G$  с числом вершин  $n$  является минимальным вершинным 1-расширением контура с числом вершин  $n-1$ , то сумма степени исхода и степени захода любой его вершины не меньше 4.

**Лемма 4.3.** Если диграф  $G$  с числом вершин  $n$  является минимальным реберным 1-расширением контура с числом вершин  $n$ , то сумма степени исхода и степени захода любой его вершины не меньше 4.

Приведена дополнительная структурная оптимизация баз 1-расширений циклов. Рассмотрен общий принцип работы полученного генератора минимальных вершинных и реберных 1-расширений ориентаций циклов.

Раздел 5 «Реализация алгоритма генерации 1-расширений цикла» посвящен программной реализации генератора из раздела 3 на языке

программирования C++. Описаны основные функции программы и приведены статистические данные по результатам ее работы. Основная задача данной программы – генерация баз 1-расширений циклов, которые будут использованы в поиске минимальных вершинных и реберных 1-расширений ориентаций циклов.

Раздел 6 «Реализация алгоритма генерации минимальных 1-расширений ориентаций циклов» описывает программную реализацию на языке программирования C++ генератора минимальных вершинных и реберных 1-расширений ориентаций циклов из раздела 4. В разделе рассмотрены основные функции программы и принцип их работы.

Раздел 7 «Анализ результатов тестирования программы» посвящен результатам работы программы из раздела 6, получен каталог минимальных вершинных и реберных 1-расширений ориентаций циклов с числом вершин до 10 [15]. Рассмотрены статистические закономерности в полученных результатах, сформулированы выводы и выполнена оценка эффективности предложенных подходов решения задачи.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена задаче генерации и вычисления количества неизоморфных минимальных вершинных и реберных 1-расширений ориентаций циклов. В теоретической части была выявлена зависимость минимальных 1-расширений ориентаций циклов от 1-расширений неориентированных циклов. Данная зависимость позволяет значительно снизить объем работы для данной задачи. Однако практические вычисления показали, что даже с примененными оптимизациями, количество ориентаций 1-расширений растет крайне быстро с увеличением числа вершин графа.

Выполнена и применена на практике программная реализация описанных генераторов на языке программирования C++. Получен каталог минимальных вершинных и реберных 1-расширений ориентаций циклов с числом вершин до 10. Проанализировав полученный каталог, были сформулированы некоторые закономерности, которые подтверждаются статистическими данными.

Для минимальных вершинных 1-расширений ориентаций циклов сделаны следующие выводы:

- 1) Сумма степеней исхода и захода любой вершины в минимальных вершинных 1-расширениях ориентаций циклов не превышает 4;
- 2) Количество ориентаций циклов, для которых минимальные вершинные 1-расширения представляют собой ориентацию кубических или ( $4, 3^n$ ) графов, мало (около 10%);
- 3) Все минимальные вершинные 1-расширения ориентаций циклов могут быть найдены без перебора около трети всех ориентаций вершинных 1-расширений цикла с максимальной степенью вершин 4.

Для минимальных реберных 1-расширений ориентаций циклов сделаны следующие выводы:

- 1) Сумма степеней исхода и захода любой вершины в минимальных реберных 1-расширениях ориентаций циклов не превышает 4;
- 2) Количество ориентаций циклов, для которых минимальные

реберные 1-расширения представляют собой ориентацию кубических или  $(4, 3^n)$  графов, более 50%;

3) Все минимальные реберные 1-расширения ориентаций циклов могут быть найдены без перебора более 80% ориентаций реберных 1-расширений цикла с максимальной степенью вершин 4.

При анализе результатов также замечено, что число дополнительных дуг, необходимых для нахождения минимальных 1-расширений ориентаций циклов, не большое. Это позволяет выдвинуть предположение о количестве этих дуг в общем случае.

Введённые в теории оптимизации работы генератора позволяют значительно снизить время работы программы: по проведенным подсчетам для минимальных вершинных 1-расширений объем вычислений снижен примерно на 40%, а для минимальных реберных 1-расширений на 80% от объема вычислений на всех вершинных и реберных 1-расширениях циклов.

Поставленные задачи решены, цель работы достигнута.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Hayes, J. P. A graph model for fault-tolerant computing system / J. P. Hayes // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol.C. 25, № 9. P. 875–884. Яз. англ.
- 2 Harary, F. Edge fault tolerance in graphs / F. Harary, J. P. Hayes // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142. Яз. англ.
- 3 Harary, F. Node fault tolerance in graphs / F. Harary, J. P. Hayes // Networks. 1996. Vol. 27. P. 19–23. Яз. англ.
- 4 Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М. : Наука. Физматлит, 1997. 368 с. Яз. русский.
- 5 Абросимов, М. Б. Практические задания по графам : учеб. пособие / М. Б. Абросимов, А. А. Долгов. Саратов : Изд-во «Научная книга», 2009. 76 с. Яз. русский.
- 6 Емеличев, В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев и др. М. : Наука, 1990. 384 с. Яз. русский.
- 7 Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. М. : Едиториал, 2003. С. 28. Яз. русский.
- 8 Eppstein, D. The traveling salesman problem for cubic graphs / D. Eppstein // Journal of Graph Algorithms and Applications. 2007. P. 61–81. Яз. англ.
- 9 Абросимов, М. Б. О количестве минимальных 1-расширений циклов с числом вершин до 26 и 28 / М. Б. Абросимов, Г. Бринкман, С. А. Сухов // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Междунар. науч. коф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2016. С. 9–11. Яз. русский.
- 10 Абросимов, М. Б. Графовые модели отказоустойчивости / М. Б. Абросимов. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с. Яз. русский.
- 11 Cubic graphs: Minibaum generator [Электронный ресурс]. URL: <http://saagt.ugent.be/minibaum/> (дата обращения 8.09.2018). Загл. с экрана. Яз. англ.

- 12 Nauty and Traces: graph canonical labeling and automorphism group computation [Электронный ресурс]. URL: <http://pallini.di.uniroma1.it> (дата обращения 8.09.2018). Загл. с экрана. Яз. англ.
- 13 Boost C++ Libraries [Электронный ресурс]. URL: <https://www.boost.org/> (дата обращения 1.10.2018). Загл. с экрана. Яз. англ.
- 14 Description of graph6, sparse6 and digraph6 encodings [Электронный ресурс]. URL: <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.txt> (дата обращения 1.12.2018). Загл. с экрана. Яз. англ.
- 15 Минимальные вершинные и реберные 1-расширения ориентаций циклов (до 10 вершин) [Электронный ресурс]. URL: <https://yadi.sk/d/LAVY2ур6ketn0Q> (дата обращения 19.12.2018). Загл. с экрана. Яз. русский.
- 16 NetworkX: Software for complex networks [Электронный ресурс]. URL: <https://networkx.github.io/> (дата обращения 14.12.2018). Загл. с экрана. Яз. англ.
- 17 Matplotlib: Python plotting [Электронный ресурс]. URL: <https://matplotlib.org/> (дата обращения 14.12.2018). Загл. с экрана. Яз. англ.