МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
(СГУ)

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Расширения гиперкубов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Лобова Александра Андреевича

Научный руководитель зав. кафедрой, д. ф.-м. н., доцент	___________ 18.01.2019 г.	М. Б. Абросимов
Заведующий кафедрой д. ф.-м. н., доцент	___________ 18.01.2019 г.	М. Б. Абросимов

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Способность системы оставаться в работоспособном состоянии после отказа элементов или связей между ними называется отказоустойчивостью. Отказ элементов или связей вычислительных систем электростанций, воздушного и наземного транспорта, спутников и ракет может привести к катастрофическим последствиям. Существует несколько возможных методов повышения надёжности: первый – это совершенствование качества элементов системы, второй – добавление в неё избыточных элементов и связей. В данной работе будет рассматриваться именно второй подход.

Задача поиска вершинных и рёберных расширений графа [2] является математической моделью задачи построения системы, устойчивой к отказу элементов [3, 4] и связей между ними [5] соответственно. При построении отказоустойчивой системы также стоит задача минимизации количества дополнительных элементов.

В работе исследуется топология гиперкуба, которая нашла своё применение в построении вычислительных систем. Так, например, в технологиях nCUBE одноимённой компании и Gigacube фирмы Parsytec данная топология была использована для организации связей между вычислительными элементами. В настоящее время в процессорах компании IBM, используемых в архитектуре построения высокопроизводительных вычислительных комплексов Blue Gene/Q была использована отказоустойчивая реализация 16-вершинного гиперкуба [2]. Если в процессоре неисправно одно ядро, то оно может быть заменено запасным, поэтому процессор сохранит останется работоспособным.

Ранее, в работе [6] был описан способ построения одного минимального рёберного 1-расширения произвольного гиперкуба с количеством вершин не менее 4.

У каждого графа, в том числе и у гиперкуба, есть тривиальное вершинное 1-расширение с количеством дополнительных рёбер равном количеству вершин. В работе [7] было показано, что для гиперкубов с количеством вершин не менее

8 существует хотя бы одно вершинное 1-расширение, количество дополнительных рёбер в котором на 1 меньше, чем в тривиальном.

В данной работе рассматриваются неприводимые вершинные и минимальные рёберные 1-расширения всех гиперкубов, а также, в частности, минимальные вершинные и рёберные k-расширения 8- и 16-вершинных гиперкубов.

Дипломная работа состоит из введения, 8 разделов, заключения, списка использованных источников и 3 приложений. Общий объем работы – 88 страниц, из них 40 страниц – основное содержание, включая 12 рисунков, список использованных источников из 13 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1 Гиперкубы

Определим *гиперкуб* следующим образом: пусть K_2 является одномерным гиперкубом Q_1, тогда для $N > 1$ $Q_N = K_2 \times Q_{N-1}$ – N-мерный гиперкуб или N-куб, где $\times$ – декартово произведение.

Приведём некоторые параметры N-куба: количество вершин: $n = 2^N$, вектор степеней: (N^n), количество рёбер: $N \cdot 2^{N-1}$, диаметр: N. Также граф является двудольным и гамильтоновым, что указывается в [8].

2 Многослойные графы

Для описания В-1Р гиперкуба необходимо определить понятие *многослойных графов*.

Определение. Пусть $k \geq 2$. Будем называть граф *k-слойным* если его вершины можно раскрасить ровно в k цветов $(1, \ldots, k)$ таким образом, чтобы для каждого ребра графа модуль разности цветов вершин на его концах равняется 1. Множество вершин цвета s будем называть слоем s.

Через L_k (*k-layer*) будем обозначать множество всех k-слойных графов.

Лемма 1. L_2 совпадает с множеством двудольных графов.

Лемма 2. При $k \geq 2$ $L_{k+1} \subseteq L_k$. Это означает, что множества k-слойных графов образуют иерархию на множестве двудольных графов.

Теорема 1. Связный двудольный граф G с диаметром d является k-слойным $(k \geq 2)$ тогда и только тогда, когда $d \geq k - 1$.

Теорема 2. Пусть G – двудольный граф, состоящий из N компонент связности. Диаметры каждой из компонент равны соответственно $D_1, D_2, \ldots, D_N$. G является k-слойным тогда и только тогда, когда $D_1 + \ldots + D_N + N \geq k$.

3 Вершинные 1-расширения 4-слойных графов

Теорема 3 (О вершинном 1-расширении 4-слойных графов). Для каждого n-вершинного 4-слойного графа существует В-1Р с 1 дополнительной вершиной и $n - 1$ дополнительными рёбрами. Данное В-1Р можно построить по алгоритму 1. [7]

Алгоритм 1 – Построение В-1Р 4-слойного графа

Вход: 4-слойный граф $G = (V, \alpha)$, раскраска графа G в смысле 4-слойного графа, вершины u и v из слоёв 1 и 4 соответственно.

Выход: G^* – В-1Р графа G с 1 дополнительной вершиной и $n - 1$ дополнительными рёбрами.

1) Множество вершин, смежных с u обозначим как $\alpha(u)$, с v – как $\alpha(v)$, через $T(v)$ обозначим вершины слоёв 1 и 3, отличные от u и не имеющие метки $\alpha(v)$, а через $T(u)$ вершины слоёв 2 и 4, отличные от v и не имеющие метки $\alpha(u)$;
2) Результат $G^* = (V^*, \alpha^*)$, где $\alpha^* = V \cup \{w\}$, $\alpha^* = \alpha \cup \{\{u, v\}\} \cup \cup \{\{w, x\} \mid x \in \alpha(u)\} \cup \{\{w, x\} \mid x \in \alpha(v)\} \cup \{\{u, x\} \mid x \in T(u)) \cup \cup \{\{v, x\} \mid x \in T(v)\}$.

На рисунке 1 показан 4-слойный граф (3-куб) и его В-1Р, полученное с помощью алгоритма 1. Все рисунки в работе были созданы с помощью [9].

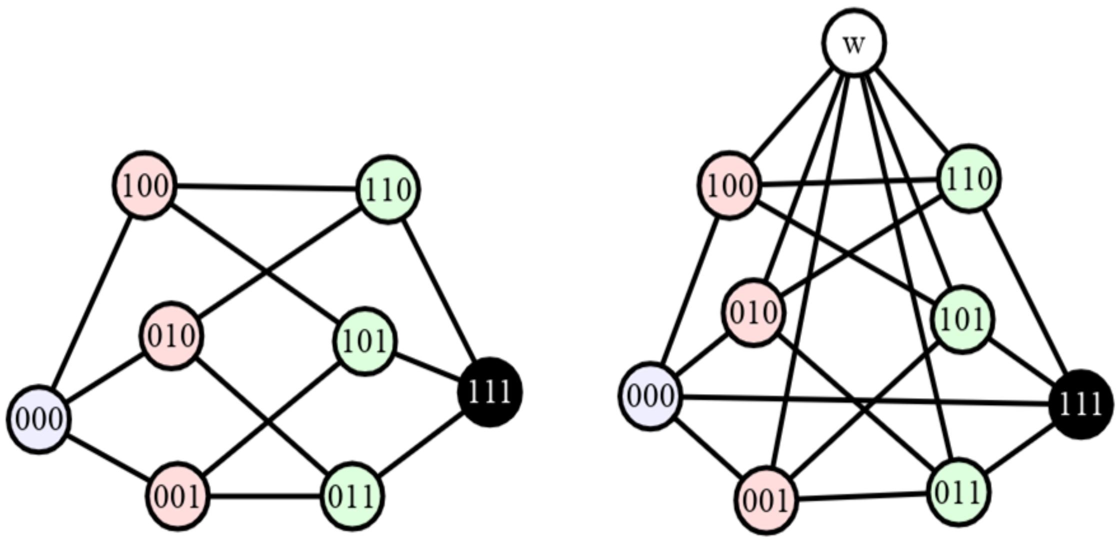

Рисунок 1 – 4-слойный граф (слева) и его В-1Р (справа)

Теорема 4 (Структура множества 4-слойных графов). Граф G является 4-слойным тогда и только тогда, когда G – двудольный граф, не являющийся полным двудольным графом, и количество вершин в нём не менее 4. [10]

По теореме 4 при $N \geq 3$ N-куб является 4-слойным графом, поэтому к нему применим алгоритм 1.

4 Автоморфизмы гиперкуба

Лемма 3. Гиперкуб является вершинно-симметричным графом.

Определение. Расстояние между двумя вершинами u и v обозначим как $d(u, v)$. Граф G называется *дистанционно-транзитивным*, если выполняется условие: если $d(u_1, u_2) = d(v_1, v_2)$, то существует автоморфизм φ графа G такой, что $\varphi(u_1) = v_1$ и $\varphi(u_2) = v_2$.

Лемма 4. Гиперкуб – дистанционно-транзитивный граф**.**

Леммы 3 и 4 упрощают проверку вложения N-куба в произвольный граф.

5 Неприводимые вершинные 1-расширения гиперкуба

Лемма 5. Пусть $G = (V, \alpha)$ – 4-слойный граф и существует автоморфизм φ графа G, такой, что $\varphi(u_1) = u_2$ и $\varphi(v_1) = v_2$, тогда для каждого В-1Р $G_1 = (V \cup \{w\}, \alpha_1)$, построенного с помощью алгоритма 1 для графа G при $u = u_1$, $v = v_1$ существует изоморфный ему граф $G_2 = (V \cup \{w\}, \alpha_2)$, построенный с помощью того же алгоритма при $u = u_2$, $v = v_2$.

Лемма 6. Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное вершинное k-расширение G^* не содержит вершин степени ниже $d + k$. [2]

Лемма 7. Если G – регулярный 4-слойный граф степени больше 0, то G^* – В-1Р, построенное по алгоритму 1 неприводимо тогда и только тогда, когда $G^* - \{u, v\}$ является В-1Р графа G.

Теорема 5 (О количестве неизоморфных вершинных 1-расширений гиперкуба, построенным по алгоритму «Построение В-1Р 4-слойного графа»). При $N \geq 3$ N-куб имеет $\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$ попарно-неизоморфных вершинных 1-расширений, построенных по алгоритму «Построение В-1Р 4-слойного графа».

Лемма 8. Если $G = (V, \alpha)$, $H = (W, \beta)$, автоморфизм $\varphi: V \rightarrow V$, вложение $\psi: V \rightarrow W$, то $\varphi \circ \psi$ тоже является вложением.

Теорема 6 (О неприводимости вершинных 1-расширений гиперкуба, построенному по алгоритму «Построение В-1Р 4-слойного графа»). Все В-1Р гиперкуба, построенные по алгоритму «Построение В-1Р 4-слойного графа» являются неприводимыми.

Теоремы 5 и 6 полностью описывают вершинные 1-расширения гиперкуба, построенные по алгоритму 1.

6 Вычисление минимальных вершинных 1-расширений графа

Задача проверки графа на соответствие расширению, принадлежит классу NP-полных задач. Для построения МВ-1Р был разработан алгоритм, не использующий проверку графов на расширение. Минимальные вершинные 1-расширения графа G строятся как объединение изоморфных G графов. Леммы 9 и 10 доказывают корректность такого построения.

Лемма 9. Если $G = (\{1, \ldots, n\}, \alpha)$, $G_i = (\{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1\}, \alpha_i)$, $G_i \cong G$, $1 \le i \le n+1$, то $E = G_1 \cup \ldots \cup G_{n+1}$ (с учётом того, что множества вершин пересекаются) – вершинное 1-расширение графа G.

Лемма 10. Если $G = (\{1, \ldots, n\}, \alpha)$ и E – неприводимое В-1Р графа G, то $E = G_1 \cup \ldots \cup G_{n+1}$ где $G_i = (\{1, \ldots, n+1\} \setminus \{i\}, \alpha_i)$, $G_i \cong G$, $1 \le i \le n+1$.

7 Минимальные вершинные расширения 8- и 16-вершинного гиперкуба

Было найдено единственное МВ-1Р 4-куба (рисунок 2), которое совпадает с тем, что построено с помощью алгоритма 1 (рисунок 3).

Для 3-куба были найдены минимальное вершинное 1-расширение (совпадающее с полученным по алгоритму 1 вершинным 1-расширением), 2 минимальных вершинных 2-расширения и 3 минимальных вершинных 3-расширения.

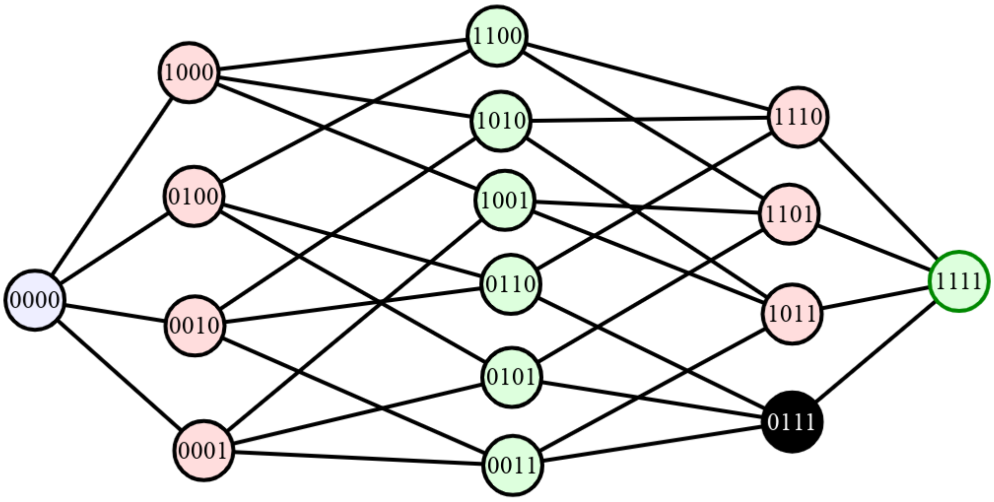

Рисунок 2 – Изображение 4-куба с раскраской 4-слойного графа

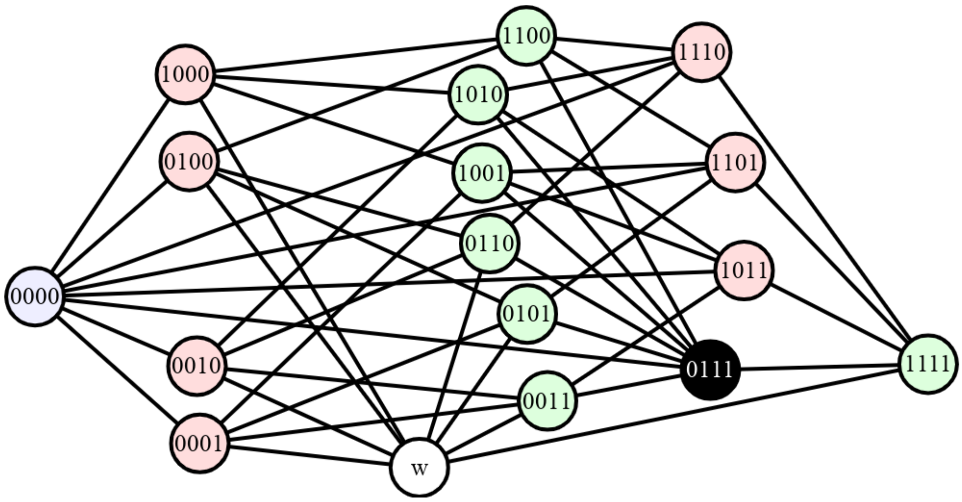

Рисунок 3 – Минимальное вершинное 1-расширение 4-куба

8 Минимальные рёберные расширения гиперкуба

Для минимальных рёберных расширений справедлива следующая лемма.

Лемма 11. Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его минимальное рёберное k-расширение не содержит вершин степени ниже $d + k$. [2]

Теорема 7 (о МР-1Р N-куба). При $N > 1$ для N-куба существует регулярный граф степени $N + 1$, который является его минимальным рёберным 1-расширением. Для получения этого расширения необходимо добавить рёбра между наиболее удалёнными вершинами (МР-1Р 4-куба показано на рисунке 10 и 4). [6]

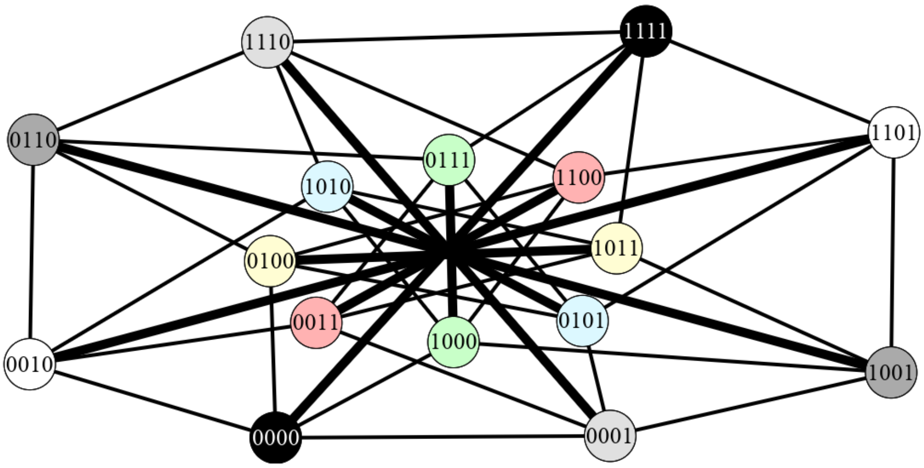

Рисунок 4 – МР-1Р 4-куба

Были найдены МР-2Р, МР-3Р (рисунок 5) и МР-4Р (граф K_8) 3-куба.

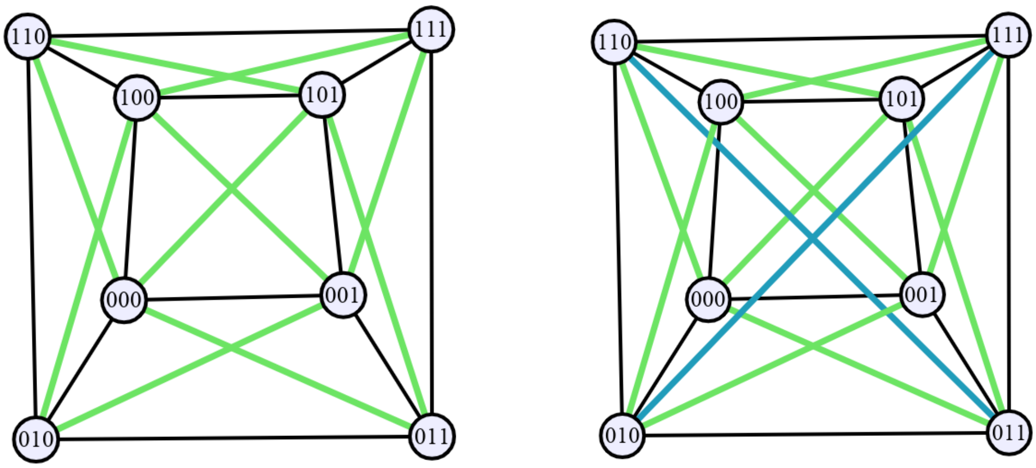

Рисунок 5 – Изображение МР-2Р 3-куба (слева) и МР-3Р (справа)

Обозначим $\delta(n, k) = \{(x, y) \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \mid D(x, y) = k\}$, где $D(x, y)$ – дистанция Хэмминга. N-куб можно определить как $Q_N = (\{0, 1\}^N, \delta(N, 1))$. Каждое найденное МР-$k$Р, являющееся регулярным графом, можно определить как $G = (\{0, 1\}^N, \delta(N, i_1) \cup \ldots \cup \delta(N, i_j))$.

Некоторые другие графы вида $G = (\{0, 1\}^N, \delta(N, i_1) \cup \ldots \cup \delta(N, i_k))$, возможно, также будут являться минимальными рёберными $(C_N^{i_1} + \cdots + C_N^{i_k})$-расширениями N-куба, так, например, проверено, что графы $H_4 = (\{0, 1\}^4, \delta(4, 1) \cup \delta(4, 3))$ и $H_6 = (\{0, 1\}^4, \delta(4, 1) \cup \delta(4, 2))$, являются МР-4Р и МР-6Р 4-куба соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена вершинным и рёберным расширениям гиперкубов. Получены как теоретические, так и практические результаты. Важнейшие результаты: для 16-вершинного гиперкуба удалось найти минимальное вершинное и рёберное 1-расширения.

Предложен новый класс графов – 4-слойные графы. Показано, что гиперкубы относятся к этому классу. Для 4-слойных графов предложен алгоритм построения вершинных 1-расширений. Теоретически обосновано количество неизоморфных вершинных 1-расширений гиперкуба, которые можно построить по этому алгоритму, а также доказывается их неприводимость.

Для 8-вершинного гиперкуба были найдены все неизоморфные минимальные вершинные 1-, 2- и 3-расширения, а также минимальные рёберные 1-, 2-, 3- и 4-расширения.

Для 16-вершинного гиперкуба были найдены одно МР-4Р и одно МР-6Р и предложена для дальнейшего изучения схема построения регулярных графов-кандидатов на минимальные рёберные *k*-расширения для некоторых значений *k*, которая является расширенной схемой построения минимального рёберного 1-расширения гиперкуба.

Полученные результаты можно использовать в реализации отказоустойчивых систем с одинаковыми элементами, выполненных по топологии гиперкуба.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1) Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М. : Изд-во Физматлит, 1997. 368 с.

2) Абросимов, М. Б. Графовые модели отказоустойчивости / М. Б. Абросимов. Саратов : Издательство Саратовского университета, 2012, 192 с. Яз. рус.

3) Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system / J. P. Hayes // IEEE Transactions on Computers, 1976. T. C-25, № 9. C. 875–884.

4) *Harary, F.* Node fault tolerance in graphs / *F. Harary, J. P. Hayes* // Networks. 1996. Т. 27. С. 19–23.

5) *Harary, F.* Edge fault tolerance in graphs / *F. Harary, J. P. Hayes* // Networks. 1993. Т. 23. С. 135–142.

6) Лобов, А. А. О минимальном рёберном 1-расширении гиперкуба / А. А. Лобов, М. Б. Абросимов. // ТРУДЫ Всероссийской конференции «XVII Сибирская научная школа-семинар с международным участием “Компьютерная безопасность и криптография” — SIBECRYPT’18». Томск: Издательский Дом Томского государственного университета, 2018. С. 109-111.

7) Лобов, А. А. О вершинном 1-расширении гиперкуба / А. А. Лобов, М. Б. Абросимов // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Междунар. науч. конф. — Саратов : Издат. центр «Наука», 2018. С. 249-251.

8) Harary, F. A survey of the theory of hypercube graphs / F. Harary, J. P. Hayes, H.-J. Wu // Computers & Mathematics with Applications. 1988. T. 15, вып. 4. C. 277–289. Яз. англ.

9) Абросимов, М. Б. Мир графов [Электронный ресурс] : сайт для работы с графами / М. Б. Абросимов, А. А. Лобов URL: http://graphworld.ru (дата обращения: 20.12.2018). Загл. с экрана. Яз. рус.

10) Лобов, А. А. О вершинных 1-расширениях двудольных графов / А. А. Лобов // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета : материалы итоговой студенческой научной конференции. – Саратов : Изд-во Сарат. Ун-та, 2018. С. 24-25.

11) McKay, B. D. Description of graph6, sparse6 and digraph6 encodings [Электронный ресурс] / B. D. McKay URL: http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.txt (дата обращения: 20.12.2018). Загл. с экрана. Яз. англ.
12) McKay, B. D. Practical Graph Isomorphism, II / B. D. McKay, A. Piperno // Journal of Symbolic Computation, 2014. Т. 60, С. 94-112, Яз. англ.
13) Приволжский региональный центр новых информационных технологий, [Электронный ресурс] URL: http://prcnit.sgu.ru (дата обращения: 13.01.2019). Загл. с экрана. Яз. рус.