МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
(СГУ)

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Точные расширения графов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Рыбалко Александра Александровича

Научный руководитель
зав. кафедрой, д.ф.-м.н. ___________ М. Б. Абросимов
18.01.2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ___________ М. Б. Абросимов
18.01.2019 г.

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

В современных технологических устройствах все больше внимания уделяется созданию высоконадежных систем, которые способны сохранять работоспособность, даже если некоторые из их компонентов выйдут из строя.

В 1976 году Джон Хейз предложил модель отказоустойчивости, которая была основана на графах [1]. Технической системе $\sum$ сопоставляется граф $G(\sum)$, вершины которого соответствуют элементам системы $\sum$, ребра – связям между элементами. В общем случае элементы могут быть разного типа, однако чаще всего на практике элементы систем оказываются однотипными. Говорят, что система $\sum^*$ является k-отказоустойчивой реализацией системы $\sum$, если отказ любых k элементов системы $\sum^*$ приводит к графу, в который можно вложить граф системы $\sum$.

Предложенная модель может быть использована для исследования полной отказоустойчивой системы, то есть возможности ее функционирования без потери функциональных свойств при отказе одного или нескольких элементов.

В теории графов для формализации понятий отказоустойчивости системы используется конструкция, называемая расширением графа.

Данная работа посвящена двум частным случаям: точные вершинные и реберные 1-расширения графов. Понятие точного реберного расширения было введено впервые в 1993 году Харрари и Хейзом [2]. Теми же авторами понятие точного вершинного расширения впервые было упомянуто в статье 1996 года [3]. Описание точных вершинных 1-расширений неориентированных графов представлено в работе М.Б. Абросимова [4]. В работе А.А. Долгова были рассмотрены точные вершинные расширения турниров [5]. В работе М.Б. Абросимова и О.В. Моденовой было доказано, что среди всех ориентаций кубических графов только транзитивный 4-вершинный граф является точным вершинным 1-расширением [6].

Целью работы является нахождение точных 1-расширений графов с числом вершин до 11 и изучение их свойств.

В процессе работы необходимо выполнить следующие задачи:

- изучить основные материалы, связанные с понятием точных 1-расширений графов;
- разработать и реализовать алгоритм проверки графа на то, является ли он точным 1-расширением;
- найти всевозможные точные 1-расширения графов с числом вершин до 11;
- проанализировать полученные графы на предмет зависимостей относительно их свойств.

Дипломная работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и 2 приложений. Общий объем работы – 98 страниц, из них 35 страниц – основное содержание, включая 13 таблиц, список использованных источников из 10 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В разделе 1 описываются основные понятия теории графов, а также известные теоремы, связанные с точными расширениями графов.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *вершинным (реберным)* k*-расширением* (k– натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из графа G^*, удалением любых его k вершин (ребер). Очевидно, что k-расширение должно содержать не менее k дополнительных элементов – вершин или ребер соответственно.

Граф G^* называется *точным вершинным (реберным)* k*-расширением* графа G, если любой граф, получающийся удалением произвольных k вершин (ребер) графа G^*, изоморфен графу G.

Теорема 1 (Первое необходимое условие дополнительности расширения для графа, отличного от полного и вполне несвязного). Пусть граф G отличен от вполне несвязного и полного графов. Тогда для того, чтобы граф G обладал свойством дополнительности расширения, необходимо, чтобы граф G имел степенное множество вида $\{a, a-1\}$, причем число вершин степени $a-1$ должно в точности равняться a.

Теорема 2 (Второе необходимое условие дополнительности расширения для графа). Пусть G – некоторый граф, а G^* – его минимальное вершинное 1-расширение. Тогда для того, чтобы граф G обладал свойством дополнительности расширения, необходимо, чтобы граф G^* был однородным.

Теорема 3. Граф G является точным вершинным 1-расширением тогда и только тогда, когда он является вершинно-симметрическим.

Лемма 1. Пусть $\vec{G}^*$ – минимальное вершинное k-расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда симметризация орграфа $\vec{G}^*$ является вершинным k-расширением симметризации орграфа $\vec{G}$.

Теорема 4. Пусть $\vec{G}^*$ – точное вершинное k-расширение орграфа $\vec{G}$. Тогда симметризация орграфа $\vec{G}^*$ является точным вершинным k-расширением симметризации $\vec{G}$.

Теорема 5. Однородный граф G является точным реберным 1-расширением тогда и только тогда, когда он является реберно-симметрическим.

Теорема 6. Реберно-симметрический граф без изолированных вершин является или вершинно-симметрическим, или двудольным.

Теорема 7. Пусть однородный граф G является точным реберным 1-расширением, тогда он является или точным вершинным 1-расширением, или двудольным графом [4].

В разделе 2 описывается используемое стороннее программное обеспечение.

Программный пакет genreg. Данная программа позволяет достаточно быстро получать простые связные k-регулярные n-вершинные графы. Метод получения данных графов основан на упорядоченной генерации при быстрых тестах на каноничность.

Программный пакет nauty. Nauty является программой для вычисления групп автоморфизмов графов и орграфов.

Существует небольшой набор программ под названием gtools, включенных в пакет nauty. Данный набор содержит следующие важные для работы программы:

- geng – генерация всех графов заданного класса;
- directg – чтение неориентированных графов и ориентирование их ребер всеми возможными способами;
- gentourng – генерация всех турниров заданного класса.

Их важной особенностью является то, что они осуществляют генерацию неизоморфных графов.

В разделе 3 описывается исследование точных 1-расширений графов.

В ходе проделанной работы были разработаны алгоритмы поиска точных 1-расширений графов. Также была реализована программа на языке Java, которая позволяет определять, является ли граф точных 1-расширением. Листинг данной программы представлен в приложении А. По разработанным алгоритмам были найдены точные 1-расширения графов с числом вершин до 11.

Все точные вершинные 1-расширения были исследованы относительно следующих свойств:

- число вершин n;
- степень вершин k;
- общее количество различных ориентаций org;
- количество автоморфизмов aut;
- количество треугольников trg;
- кликовое число ω;
- хроматическое число χ;
- хроматический индекс $\chi`$.

В таблице 1 представлена выдержка результатов значений свойств некоторых точных вершинных 1-расширений графов.

Таблица 1 – Свойства ТВ-1Р графов

№ графа	*n*	*k*	*org*	*aut*	*trg*	ω	χ	$\chi`$
1	3	2	2	6	1	3	3	3
2	4	2	4	8	0	2	2	2
3	4	3	4	24	4	4	4	3
4	5	2	4	10	0	2	3	3
5	5	4	12	120	10	5	5	5
6	6	2	9	12	0	2	2	2
7	6	4	112	48	8	3	3	4
8	6	5	56	720	20	6	6	5
9	7	2	10	14	0	2	3	3
10	7	4	1172	14	10	3	4	5

Во время анализа точных реберных 1-расширений были изучены двудольные точные реберные 1-расширения и выдвинуты несколько предположений.

В таблице 2 представлена выдержка результатов анализа двудольных точных реберных 1-расширений графов.

Таблица 2 – Количество двудольных ТР-1Р графов

Кол-во вершин, *n*	Кол-во графов	Кол-во ТР-1Р графов	Кол-во двудольных графов	Кол-во двудольных ТР-1Р графов	Отношение двудольных ТР-1Р графов к общему количеству, %
3	2	2	1	1	50
4	6	3	3	2	66
5	21	4	5	2	50
6	112	6	17	4	66
7	853	5	44	3	60
8	11117	8	182	6	75
9	261080	9	730	5	55
10	11716571	13	4032	8	61

Предположение 1. Пусть дан неполный граф G. Если он является точным реберным 1-расширением, то существует хотя бы одна ориентация данного графа, также являющаяся точным реберным 1-расширением.

Предположение 2 (необходимое условие). Пусть $G_{n,m}$ – связный двудольный граф. Для того чтобы граф $G_{n,m}$ являлся точным реберным 1-расширением необходимо, чтобы доли n и m были однородными.

Предположение 3 (достаточное условие). Пусть $G_{n,m}$ – связный двудольный граф. Для того чтобы граф $G_{n,m}$ являлся точным реберным 1-расширением достаточно, чтобы доли n и m были однородными.

В виде кода связного двудольного графа будем представлять запись вида: $n_1 : n_2(m_1, m_2)$, где

- n_1 – число вершин в первой доле;
- n_2 – число вершин во второй доле;
- m_1 – степень вершин первой доли;

- m_2 – степень вершин второй доли.

Предположение 4 (построение ТР-1Р представителя). Пусть дан код графа $n_1\colon n_2(m_1, m_2)$ и мы знаем, что у этого кода есть представитель, являющийся точным реберным 1-расширением. Тогда если $\text{НОД}(n_1, m_2) = 1$ и $\text{НОД}(n_2, m_1) = 1$, то построить данного представителя можно с помощью следующего алгоритма:

1. выбираем некоторую неиспользованную вершину из первой доли. Если таких вершин нет, то на шаг 4;
2. соединяем выбранную вершину с помощью m_1 ребер с вершинами из второй доли, степень которых минимальна;
3. помечаем данную вершину использованной, переходим на шаг 1;
4. конец алгоритма, полученный граф удовлетворяет коду $n_1\colon n_2(m_1, m_2)$.

Все полученные точные 1-расширения графов с числом вершин до 11 представлены в приложении Б.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена проблеме точных вершинных и реберных 1-расширений графов.

Автором разработана программа на языке Java, которая позволяет определять точные 1-расширения графов, основанная на полном переборе с некоторыми отсечениями. С помощью нее были получены все возможные точные вершинные и реберные 1-расширения графов с числом вершин до 11. По полученным данным были проведены исследования на наличие связей между графами и их свойствами. Свойства графов рассматривались следующие:

- число вершин n;
- степень вершин k;
- общее количество различных ориентаций org;
- количество автоморфизмов aut;
- количество треугольников trg;
- кликовое число ω;
- хроматическое число χ;
- хроматический индекс $\chi^`$.

Также были выведены и проверены несколько предположений относительно точных реберных 1-расширений.

Все найденные точные 1-расширения графов представлены в приложении Б. При дальнейшем изучении полученных данных существует возможность нахождения еще большего числа зависимостей. При обнаружении последних, появится возможность написания быстрого алгоритма построения точных 1-расширений графов с большим числом вершин.

Таким образом, все поставленные задачи решены, цель работы достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1) Hayes, J.P. A graph model for fault-tolerant computing system / J.P. Hayes // IEEE Trans. Comput. – 1976. P. 875-884.

2) Harary, F., Hayes, J.P. Edge fault tolerance in graphs / F. Harary, J.P. Hayes // Networks. – 1993. – Vol. 23. – P. 135–142.

3) Harary, F., Hayes, J.P. Node fault tolerance in graphs / F. Harary, J.P. Hayes // Networks. – 1996. – Vol. 27. – P. 19–23.

4) Абросимов, М.Б. Графовые модели отказоустойчивости – Сарат. гос. ун-т – Саратов, 2012. 192 с.

5) Долгов, А.А. Точные расширения графов: дис. … канд. физ-мат. наук / А.А Долгов. Саратов, 2011. 95 с.

6) Абросимов, М.Б. Характеризация орграфов с тремя дополнительными дугами в минимальном вершинном 1-расширении / М.Б. Абросимов, О.В. Моденова // Прикладная дискретная математика. – 2013. № 3 (21). С. 68-75.

7) Богомолов, А.М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А.М. Богомолов, В.Н. Салий. М.: Изд-во Физматлит, 1997. 368 с.

8) Абросимов, М.Б. Точные расширения графов с числом вершин не более одиннадцати / Сарат. гос. ун-т. – Саратов, 2001. – Деп. в ВИНИТИ 14.08.2001, № 1870-В2001. – 15 с.

9) Meringer, M. Fast generation of regular graphs and construction of cages / M. Meringer // Journal of Graph Theory – 1999 – Vol. 30. – P. 137–146.

10) McKay, B.D. Nauty and traces user’s Guide / B. D. Mckay, A. Piperno. ANU, 2017 – 103.