МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
(СГУ)

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Проверка гипотезы Харари для турниров

АВТОРЕФЕРАТ
дипломной работы

студентки 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Шафеевой Анны Анатольевны

Научный руководитель
профессор, к. ф.-м. н. ___________ В. Н. Салий
18.01.2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ___________ М. Б. Абросимов
18.01.2019 г.

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Один из традиционных вопросов, рассматриваемых в различных разделах математики, – о зависимости между структурой объекта и его подструктурами. В основном интересуются тем, в какой мере структура объекта определяется структурами его частей. Особо важен вопрос о том, можно ли реконструировать объект по его частям. Часто для знания всех подструктур объекта достаточно знать те из них, которые являются максимальными. Если исследуемая структура – это граф, то его максимальными подструктурами являются максимальные подграфы. Вопрос о реконструируемости графа по его максимальным подграфам составляет содержание известной гипотезы Станислава Улама: «Каждый неориентированный граф с тремя или более вершинами с точностью до изоморфизма определяется набором своих максимальных подграфов» [1]. Эта гипотеза, сформулированная в 1945 году, несмотря на простоту формулировки, до сих пор не доказана и не опровергнута.

В 1964 году Фрэнк Харари выдвинул гипотезу о том, что всякий граф однозначно восстанавливается по набору своих попарно неизоморфных максимальных подграфов [2].

Несмотря на то, что более 70 статей были написаны на тему реконструирования[3], исключений из гипотезы Улама для неориентированных графов неизвестно, поэтому считается, что она для них выполняется. Однако для ориентированных графов все обстоит иначе и среди трехвершинных ориентированных графов уже можно легко найти исключения. Представляет интерес рассмотрение гипотезы для различных классов ориентированных графов.

Было обнаружено, что для турниров гипотеза выполняется не всегда, есть пары исключений среди трех-, четырех-, пяти- и шестивершинных турниров (по одной паре для трех-, четырех- и пятивершинных турниров и три пары для шестивершинных турниров) [4], [5]. Позже Стокмейером был проведен компьютерный поиск среди семи- и восьмивершинных турниров, и было обнаружено два новых исключения порядка 8 [6],[7], а еще через несколько лет ему удалось показать, что гипотеза Улама не выполняется для турниров, приведя алгоритм построения контрпримеров сколь угодно большого порядка [8]. Из невыполнения гипотезы Улама для турниров следует невыполнение гипотезы Харари для турниров.

Харари и Палмер занялись рассмотрением негамильтоновых турниров. Они доказали, что для негамильтоновых турниров порядка $p \geq 5$ гипотеза Улама выполняется [9]. В связи с этим представляет интерес, выполняется ли гипотеза Харари для негамильтоновых турниров.

В данной работе будет рассмотрен алгоритм нахождения контрпримеров для гипотезы Улама для турниров и представлена реализация программы построения контрпримеров по этому алгоритму. Также будет представлена реализация программы проверки гипотезы Харари для негамильтоновых турниров порядка $5 \leq p \leq 11$ и показано, что данная гипотеза выполняется.

Дипломная работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и 4 приложений. Общий объем работы – 99 страниц, из них 33 страниц – основное содержание, включая 26 рисунков и 5 таблиц, список использованных источников из 12 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1 Определения

В разделе приведены все необходимые определения, взятые из источников [9], [10] и [11].

2 Гипотеза Улама для турниров

Известная гипотеза Улама о реконструируемости графа утверждает, что любой граф G порядка $p \geq 3$ может быть однозначно восстановим (с точностью до изоморфизма) по его максимальным подграфам $G - v_i, 1 \leq i \leq p$ [1], т.е. по его колоде.

Для турниров эта гипотеза впервые была рассмотрена Харари и Палмером в работе «Проблема восстановления турнира по его подтурнирам» [8]. Однако Стокмейер в своей работе «Ложность гипотезы реконструируемости для турниров» [6] показал, что гипотеза Улама для турниров не верна, путем построения неизоморфных пар турниров порядка $2^n + 1$ и $2^n + 2$ $(n = 1, 2, \dots)$ с изоморфными максимальными подтурнирами.

Рассмотрим подробнее построение контрпримеров. Для их описания были использованы следующие функции: для любого ненулевого целого k определим $pow(k)$ – такое максимальное число i, что 2^i делит k, и $odd(k)$ – частное k и $2^{pow(k)}$. Например, $48 = 2^4 * 3$, тогда $pow(48) = 4$ и $odd(48) = 3$.

Все контрпримеры строятся, базируясь на семействе турниров, обозначаемых A_n. Для каждого положительного целого n турнир A_n с $p = 2^n$ вершинами $\{v_1, \dots, v_p\}$ определяется следующим образом: из v_i в v_j следует дуга тогда и только тогда, когда $odd(j - i) \equiv 1 (mod 4)$, для $i \neq j$.

Для демонстрации контрпримеров порядка $2^{\mathrm{n}} + 1$ к турниру A_n добавляется вершина двумя различными способами. Для каждого положительного целого n турнир B_n с $2^n + 1$ вершинами получается из A_n добавлением вершины v_0 и дуг из v_0 в $v_2, v_4, \ldots, v_p$ и из $v_1, v_3, \ldots, v_{p-1}$ в v_0. Турнир C_n получается из A_n добавлением вершины v_0 и дуг из v_0 в $v_1, v_3, \ldots, v_{p-1}$ и из $v_2, v_4, \ldots, v_p$ в v_0.

А для демонстрации контрпримеров порядка $2^n + 2$ добавляется вершина к турнирам B_n и C_n. Для каждого положительного целого n, турнир D_n с $2^n + 2$ вершинами получается из B_n добавлением вершины v_{p+1} и дуг из v_{p+1} в $v_1, v_3, \ldots, v_{p-1}$ и из $v_2, v_4, \ldots, v_p$ и v_0 в v_{p+1}. Турнир E_n получается из C_n добавлением вершины v_{p+1} и дуг из v_{p+1} в $v_2, v_4, \ldots, v_p$ и из $v_1, v_3, \ldots, v_{p-1}$ и v_0 в v_{p+1} [8].

2.1 Реализация программы построения контрпримеров

В приложении А представлен листинг программы, которая позволяет найти контрпримеры для гипотезы Улама для турниров. Данная программа написана на языке C# и скомпилирована в среде Visual Studio. На вход программе подается число n. Результат программы выводится на экран и представляет собой турниры B_n, C_n, D_n, E_n в виде максимального матричного кода и их колоды. Все максимальные матричные коды могут быть представлены как в двоичном, так и в десятичном виде. Также выводится результат работы программы относительно гипотезы Улама, т.е. являются ли построенные пары турниров порядка $2^n + 1$ и $2^n + 2$ контрпримерами.

3 Гипотеза Улама для негамильтоновых турниров

Харари и Палмер в своей работе «Проблема восстановления турниров по их подтурнирам» показали, что гипотеза Улама выполняется для негамильтоновых турниров порядка $p \geq 5$ [9].

Лемма 1. Если T – турнир с пятью и более вершинами, такой, что один из подтурниров T_i, не теряя общности, пусть это будет $T_1 = T - v_1$, не имеет источников, а все остальные подтурниры турнира T имеют источник, тогда $T = v_1 {+\!\!\rightarrow} T_1$.

Лемма 2. Если T – турнир с пятью и более вершинами, и каждый из подтурниров T_i имеет источник, то T можно восстановить по набору его подтурниров T_i.

Теорема. Если T – турнир с пятью и более вершинами и T не является гамильтоновым, то он может быть реконструирован по набору своих подтурниров T_i.

Доказательство данной теоремы подтверждает, что гипотеза Улама выполняется для негамильтоновых турниров с пятью и более вершинами [9].

4 Гипотеза Харари для негамильтоновых турниров

Харари, наряду с гипотезой Улама, выдвинул свою гипотезу, что граф восстановим по набору его попарно неизоморфных максимальных подграфов, т.е. по его приведенной колоде [2].

Так как гипотеза Улама выполняется для негамильтоновых турниров порядка $p \geq 5$, то представляет интерес, выполняется ли для них гипотеза Харари.

Программным путем было показано, что гипотеза Харари выполняется для негамильтоновых турниров с числом вершин $5 \leq p \leq 11$. Основываясь на полученных результатах и на доказательстве гипотезы Улама для негамильтоновых турниров можно предположить, что гипотеза Харари выполяняется для всех негамильтоновых турниров порядка $p \geq 5$. В таблицах 3, Б.1, В.1 представлены списки турниров порядка $p = 5, 6, 7$, состоящие из изображений турниров и их матричных кодов, их приведенных колод в виде максимальных матричных кодов, представленных в виде десятичных чисел. Максимальные матричные коды в колодах отсортированы по возрастанию. Турниры в таблицах отсортированы по возрастанию количества подтурниров в приведенной колоде, а при одинаковом количестве подтурниров – по содержимому приведенной колоды.

4.1 Реализация программы проверки гипотезы Харари для негамильтоновых турниров

В данной части работы применялся open-sourse пакет *nauty*. Программа *gentourng* из этого набора была использована для генерации всех негамильтоновых турниров с числом вершин от 5 до 11. Было получено 7 файлов, каждый из которых содержал список всех негамильтоновых турниров с одинаковым числом вершин. Данное программное обеспечение написано Бренданом Маккеем [12].

В приложении Г представлен листинг программы, которая позволяет проверить гипотезу Харари. Программа запускалась на ноутбуке с процессором AMD A10-5750M APU with Radeon(tm) HD Graphics (4CPUs), ~2.5GHz, ОЗУ 6Гб, в однопоточном режиме. Программный продукт написан на языке C# и скомпилирован в среде Visual Studio. На вход программе подается число n – количество вершин турнира и выбирается файл со списком негамильтоновых турниров, сгенерированных ранее. Результат программы выводится на экран и представляет собой результат проверки гипотезы Харари для негамильтоновых турниров порядка n и время выполнения программы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены гипотезы Улама и Харари, представлено построение контрпримеров для гипотезы Улама для турниров сколь угодно большого порядка, показано доказательство выполнения гипотезы Улама для негамильтоновых турниров порядка $p \geq 5$, а также продемонстрирована проверка гипотезы Харари для негамильтоновых турниров порядка $5 \leq p \leq 11$. Было замечено, что при построении контрпримеров для $n = 1$ полученные турниры порядка $2^n + 2$ являются изоморфными, во всех остальных случаях пары турниров порядка $2^n + 1$ и $2^n + 2$ являются неизоморфными, а их колоды совпадают, что является опровержением гипотезы Улама для турниров. Полученные результаты проверки гипотезы Харари для негамильтоновых турниров показали, что гипотеза выполняется для негамильтоновых турниров порядка $5 \leq p \leq 11$. На основе компьютерных вычислений высказывается предположение, что гипотеза Харари справедлива для негамильтоновых турниров порядка $p \geq 5$.

На языке программирования C#, используя возможности интегрированной среды разработки Visual Studio,была реализована программа построения контрпримеров, которая проверяет построенные по алгоритму пары турниров на изоморфизм и при отрицательном результате вычисляет их колоды и сравнивает. На основе полученных данных гипотеза Улама либо опровергается, если колоды турниров совпадают, либо, если колоды турниров различны, предположение о верности гипотезы остается в силе. Также была реализована программа проверки гипотезы Харари для негамильтоновых турниров, которая для всех турниров заданного порядка p вычисляет их приведенные колоды в виде сортированного списка максимальных матричных кодов. Далее полученная информация добавляется в базу данных и, используя SQL-запросы, приведенные колоды сравниваются. Результатом работы программы является подтверждение или опровержение гипотезы Харари для негамильтоновых турниров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Улам, С. Нерешенные математические задачи / С. Улам ; пер. З. Я. Шапиро. М. : Наука, 1964. 168 с.

2 Harary, F. On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs / F. Harary; M. Fiedler ed. // Theory of graphs and its applications. Prague, 1964. pp. 47-52.

3 Manvel, B. Bibliography on the reconstruction of graphs / B. Manvel, R. L. Hemminger. Unpublished, 1974.

4 Beineke, L. W. A survey of recent results on tournaments / L. W. Beineke, R. J. Wilson // Recent Advances in Graph Theory. Proceedings of the Symposium. Prague, 1975. pp. 31-48.

5 Beineke, L. W. On non-reconstructable tournaments / L. W. Beineke, E. T. Parker // J. Comb. Theory, 1970. Vol. 9. pp. 324-326.

6 Stockmeyer, P. K. My quest for non-reconstructable graphs // Congressus Numerantium, 1988. Vol. 63. pp. 188-200.

7 Stockmeyer, P. K. The reconstruction conjecture for tournaments // Proceedings of the Sixth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (F. Hoffman et al., eds.). Utilitas Mathematica, Winnipeg, 1975. pp. 561-566.

8 Stockmeyer, P. K. The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments / P. K. Stockmeyer // J. Graph Theory, 1977. Vol. 1. pp. 19-25.

9 Harary, F. On the problem of reconstructing a tournament from Subtournaments / F. Harary, E. Palmer // J. Monatshefte fur Mathematik, 1971. pp.14-23.

10 Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М. : Изд-во Физматлит, 1997. 368 с.

11 Абросимов, М. Б. Практические задания по графам: учеб. пособие / М. Б. Абросимов, А. А. Долгов. 2-е изд., Саратов : Изд-во Научная книга, 2009. 76 с.

12 McKay, B. D. Nauty and Traces User’s Guide / B. D. Mckay, A. Piperno. ANU, 2017. 103 p.