

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**«Автокорреляционные функции
сопряженных и «промодулированных» хаотических отображений»**

АВТОРЕФЕРАТ
БАКАЛАВРСКОЙ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 422 группы
направления 11.03.02 Инфокоммуникационные
технологии и системы связи
физического факультета
Сенькина Андрея Андреевича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н.,

В.М. Аникин

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Саратов 2019

Введение

Изучению спектрально–корреляционных свойств стохастических ("истинно случайных") и хаотических процессов придают принципиальное значение [1 – 10]. Закономерности убывания корреляционных функций (расцепление корреляций) тесно связаны со свойствами перемешивания динамической системы и скоростью установления в ней равновесного состояния.

Использование хаотических отображений в качестве датчиков псевдослучайных чисел в схемах кодирования информации предполагает исследование их автокорреляционных свойств. В работе рассматриваются три типа хаотических отображений – кусочно-линейные (с равномерным инвариантным распределением), сопряженные (полученные из кусочно-линейных нелинейными преобразованиями) и «промодулированные» детерминированным сигналом числовые последовательности, даваемые кусочно-линейными отображениями.

Цель выпускной квалификационной работы – аналитическое вычисление автокорреляционных функций орбит сопряженных и «промодулированных» отображений.

Новизна и практическая значимость. Выявление характера изменения автокорреляционных свойств хаотических сигналов при их нелинейных преобразованиях.

Задачи работы:

1. Уяснение роли эволюционного оператора Перрона-Фробениуса в аналитическом расчете автокорреляционных функций орбит хаотических отображений.
2. Расчет автокорреляционных функций для сопряженных отображений.
3. Расчет автокорреляционных функций для «промодулированных» отображений.

В 1 главе рассматривается ОПФ, его собственные функции и собственные числа для различных видов кусочно-линейных отображений.

Во 2 главе дается описание сопряженных хаотических отображений и нахождение собственных функций сопряженных отображений.

В 3 главе разделе рассмотрен алгоритм аналитического расчета автокорреляционных функций простейших модельных хаотических систем – одномерных хаотических отображений, обладающих равномерным инвариантным распределением на единичном отрезке

В 4 главе представлен расчет автокорреляционных функций промодулированных отображений при помощи многократного воздействия на них ОПФ.

Содержание работы

Закону преобразования случайных величин соответствует закон преобразования вероятностных плотностей [2,3]:

$$f_{n+1}(x) = \int f_n(t)\delta(x - g(t))dt, \quad (1)$$

где $\delta(t)$ – δ -функция Дирака.

Правило преобразования вероятностных плотностей согласно (1) носит названия оператора Перрона-Фробениуса (ОПФ):

$$Pf(x) = \int f(t)\delta(x - g(t))dt. \quad (2)$$

Собственные функции ОПФ описываются соотношениями:

$$P\psi_k(x) = \lambda_k\psi_k(x), k = 0,1,2,\dots \quad (3)$$

$$\int_0^1 \psi_n(x)dx = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

($\delta_{m,n}$ – символ Кронекера).

Нахождение собственных функций ОПФ

Двоичный сдвиг Бернулли определяется преобразованием (рисунок 1.1):

$$x_{n+1} = 2x_n \bmod 1 = \{2x_n\} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n < 1/2, \\ 2x_n - 1, & 1/2 \leq x_n \leq 1, \end{cases} n = 0,1,2,\dots \quad (5)$$

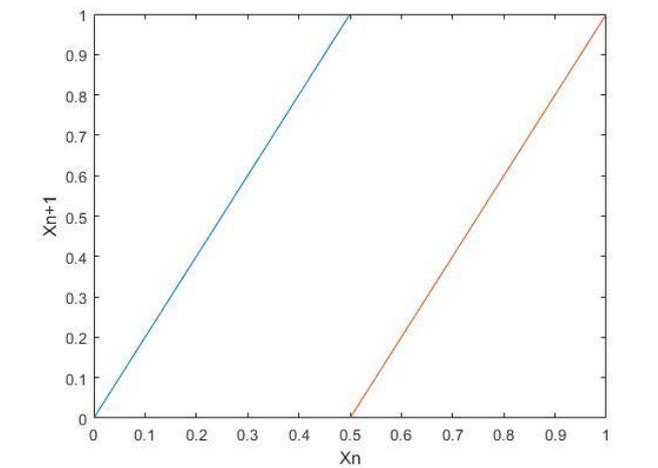


Рисунок 1 – Двоичный сдвиг Бернулли

Ему соответствует ОПФ

$$P_B f(x) = \frac{1}{2} (f(x/2) + f((1+x)/2)) \quad (6)$$

Собственными функциями ОПФ (6) являются полиномы Бернулли [2,3,5].

Первые шесть полиномов Бернулли имеют вид:

$B_0(x) = 1,$ $B_1(x) = x - \frac{1}{2},$ $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$ $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$ $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$ $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$ $B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.$	(7)
--	-----

Графики собственных функций (без инвариантной плотности, которая задается равномерным распределением), согласно (7), представлены на рисунках 2 и 3.

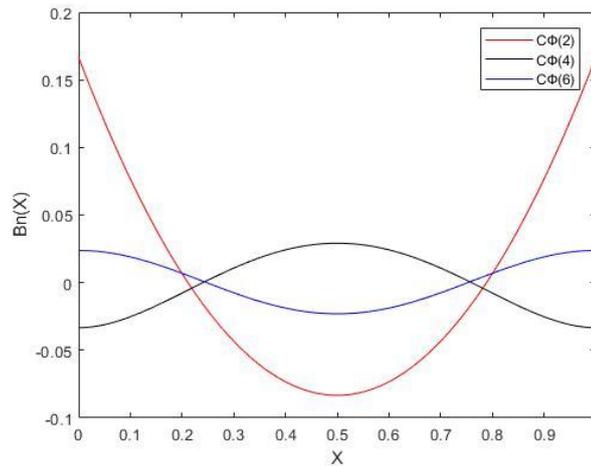


Рисунок 2 – Собственные функции ОПФ отображения «сдвиг Бернулли» (чётные)

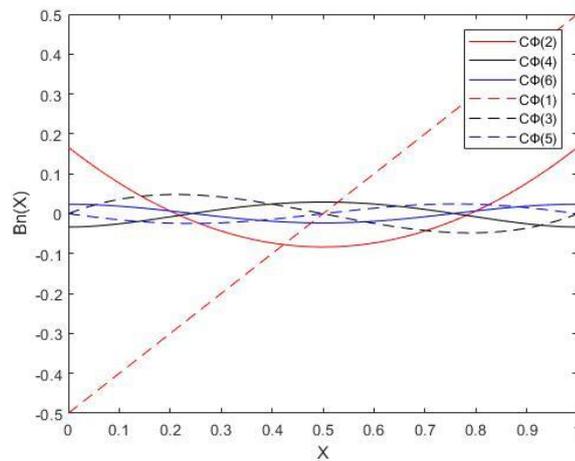


Рисунок 3 – Собственные функции ОПФ отображения «сдвиг Бернулли»

Собственными значениями ОПФ (7) являются числа [2,3,5] $1/2^n$. Из вида (7) следует, что инвариантным распределением двоичного сдвиг Бернулли является *равномерное* распределение.

Пирамидальное отображение (tent map) определяется как:

$$x_{n+1} = 1 - |2x_n - 1| = \begin{cases} 2x_n & 0 \leq x_n \leq 1/2, \\ 2 - 2x_n & 1/2 \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

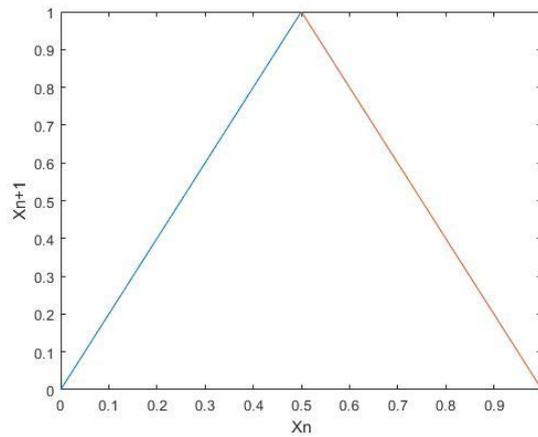


Рисунок 4 – Пирамидальное отображение

Пирамидальному отображению отвечает ОПФ

$$P_T f(x) = \frac{1}{2}(f(x/2) + f(1-x/2)) \quad (9)$$

Собственными функциями оператора (9) являются четные полиномы Бернулли половинного аргумента [2,3,5]:

$$\psi_m = B_{2m}(x/2), \quad (10)$$

а собственным значениями - величины $\lambda_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}$. Три собственных функции оператора (9) показаны на рисунке 5.

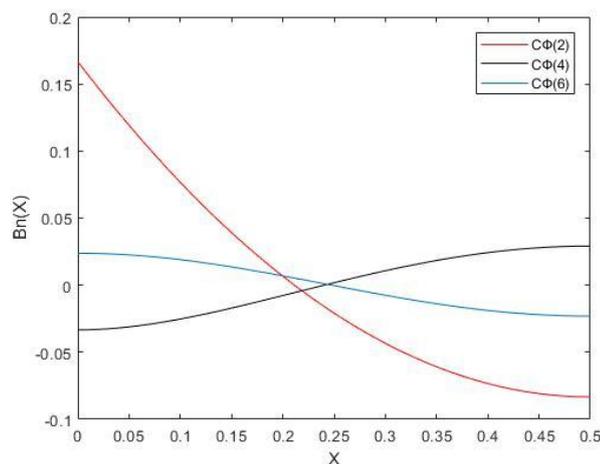


Рисунок 5 – Собственные функции ОПФ пирамидального отображения.

Первый пример построения сопряжения отображений посредством преобразование координат дали Дж. фон Нейман и Ст. Улам, введя обрати-

мую замену переменных в кусочно-линейное пирамидальное отображение (tent map), что привело к квадратичному (логистическому) отображению (Улама-фон Неймана) (Рисунок 6):

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n), \quad x_n \in (0,1). \quad (10)$$

Монотонное сопрягающее преобразования для (5) и (8) имеет вид:

$$x = h(\alpha) = \sin^2 \frac{\pi\alpha}{2}, \quad \alpha = h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad \alpha \in (0,1), x \in (0,1). \quad (11)$$

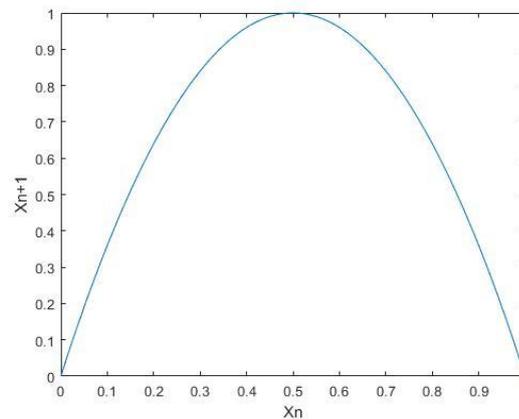


Рисунок 6– Логистическое отображение

Для сопряженного отображения собственные функции выражаются соотношениями [2]:

$$\psi_m(x) = f(x)B_{2m}\left(\frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{x}\right), \quad m = 0,1,2... \quad (12)$$

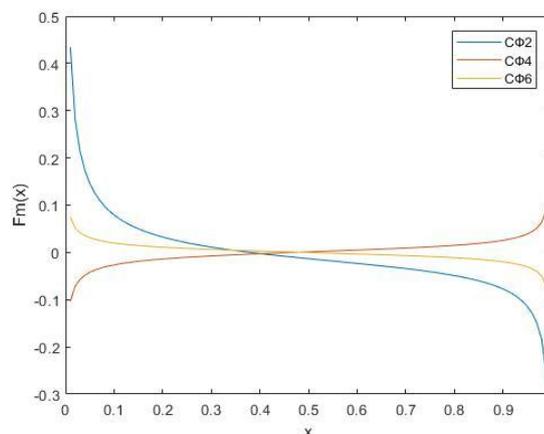


Рисунок 8. Собственные функции ОПФ логистического отображения

Расчет автокорреляционных функций орбит хаотических отображений

Основу расчета автокорреляционных функций составляет выявление результата неоднократного действия ассоциированного с данным отображением оператора Перрона–Фробениуса на независимую переменную. В этой связи прогресс в технике подобных вычислений связан со знанием собственных функций и собственных чисел названного оператора.

По определению, автокорреляционная функция траекторий произвольного одномерного хаотического отображения, определенного на единичном интервале, вычисляется как

$$R(n) = \int_0^1 \alpha g^n(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha - \left(\int_0^1 \alpha \rho(\alpha) d\alpha \right) \left(\int_0^1 g^n(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha \right), \quad (13)$$

где $\rho(\alpha)$ – инвариантная плотность отображения

Для *сдвигов Бернулли* автокорреляционная функция (14) выразится как:

$$R(n) = \frac{1}{12} \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 0. \quad (14)$$

График (17) показан на рисунке 3.1

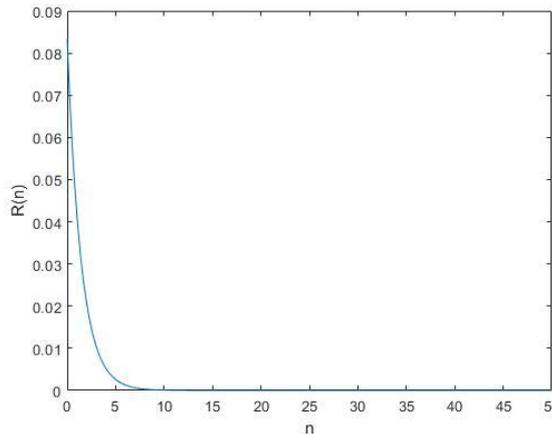


Рисунок 8 – Автокорреляционная функция траекторий сдвига Бернулли

Для *пирамидального отображения* корреляционная функция обращается в ноль:

$$R(n) = \frac{1}{12} \delta(n) = \begin{cases} 1/12, & n = 0, \\ 0, & n \geq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, пирамидальное отображение обладает дельта-коррелированными траекториями.

Расчет автокорреляционных функций для «Промодулированных» хаотических отображений

Рассмотрим часто применяемый в моделировании один из сдвигов Бернулли – диадическое отображение на отрезке [0;1].

Общее выражение для автокорреляционной функции запишем в виде

$$R(n) = \int_0^1 h(x)h(g^{(n)}(x))\rho(x)dx - \left(\int_0^1 h(x)\rho(x)dx \right) \left(\int_0^1 h(g^{(n)}(x))\rho(x)dx \right), \quad (16)$$

где $y_n = h(x_n)$ - наблюдаемый дискретный сигнал.

Подставляя в (16) конкретное выражение для итеративной функции с учетом равномерного характера инвариантного распределения, получаем представление для автокорреляционной функции, в которое явным образом включается соотношение (6), определяющее оператор Перрона-Фробениуса диадического сдвига Бернулли:

$$\begin{aligned} R(n) &= \int_0^1 h(g^{(n-1)}(x)) \frac{1}{2} \left\{ h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{1+x}{2}\right) \right\} dx - \left(\int_0^1 h(x)dx \right)^2 = \\ &= \int_0^1 h(g^{(n-1)}(x))Ph(x)dx - \left(\int_0^1 h(x)dx \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Понижая степень композиций $g^{(n-1)}(x), g^{(n-1)}(x), \dots, g^{(2)}(x), g(x)$, придем к соотношению, определяющему вид автокорреляционной функции хаотического сигнала на основе управляющего отображения сдвиг Бернулли:

$$R(n) = \int_0^1 h(x)P^{(n)}h(x)dx - \left(\int_0^1 h(x)dx \right)^2. \quad (18)$$

Рассмотрим представление дискретного сигнала в виде:

$$h_1(x) = \sin(2\pi x), \quad h_2(x) = \cos(2\pi x), \quad h_3(x) = e^{j\pi x} \quad (19)$$

Очевидно, что интегралы от всех функций (19) на единичном отрезке обращаются в ноль, а действие оператора Перрона-Фробениуса на функции (20) дает:

$$P \cos(2\pi x) = 0, \quad P(\sin(2\pi x)) = 0, \quad P e^{j\pi x} = 0. \quad (20)$$

Результат (20) означает, что, во-первых, функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ входят в нуль-пространство (ядро) оператора Перрона-Фробениуса и, во-вторых, нелинейные преобразования (20), дающие наблюдаемый сигнал, «снимают» эффект «автокоррелированности» орбит сдвигов Бернулли:

$$R(n) = \begin{cases} \int_0^1 h_{1,2}^2(x) dx = 1/2, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases} \quad (21)$$

Качественно этот вывод подтверждает сравнение траекторий исходного (не промодулированного) и промодулированного отображений (рисунок 9): траектория промодулированного отображения более запутанна, чем траектория исходного, полученного во множестве машинных чисел.

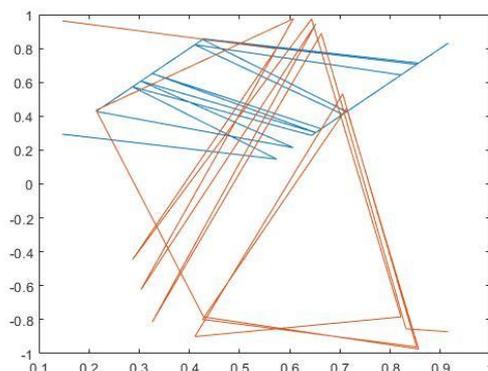


Рисунок 9 – Траектории сдвига Бернулли (вверху) и «промодулированные» по синусоидальному закону при количестве точек=20.

автокорреляционная функция орбит пирамидального отображения имеет вид

$$R(n) = \frac{1}{12} \delta(n) = \begin{cases} 1/12, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases} \quad (22)$$

Повторение выкладок, проделанных выше при рассмотрении сдвига Бернулли, приводит к выражению автокорреляционной функции сигнала $h(x)$, «управляющего» хаотическим процессом в форме пирамидального отображения к виду (21). Конкретизация которого для $h(x)$ в виде (22), дает:

$$P \cos(2\pi x) = \cos \pi x, \quad P^2 \cos(2\pi x) = P \cos(\pi x) = 0, \quad P \sin(2\pi x) = 0. \quad (26)$$

Соответственно выражение для автокорреляционной функции сигнала $h_1(x) = \sin(2\pi x)$ совпадает с (22) в силу того, что функция $\sin(2\pi x)$ входит в ядро оператора Перрона-Фробениуса пирамидального отображения.

В то же время для функционального анализа результат (26) означает, что функция $\cos(\pi x)$ входит в ядро оператора $P^2 f(x)$, являющегося двукратной композицией оператора Перрона-Фробениуса пирамидального отображения. Выражение же для автокорреляционной функции в случае сигнала вида $h_2(x) = \cos(2\pi x)$ опять же описывается соотношением (22), поскольку

$$R(1) = \int_0^1 \cos(2\pi x) \cos(\pi x) dx = 0.$$

Таким образом, нелинейное преобразование $h_2(x) = \cos(2\pi x)$ сохранило дельта-коррелированный характер автокорреляционной функции хаотического процесса.

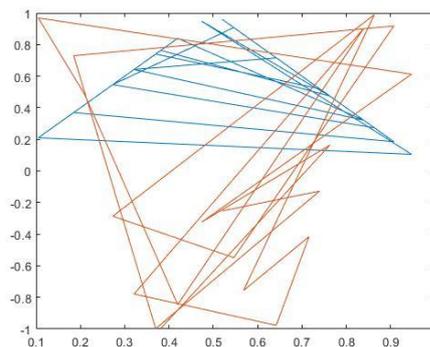


Рисунок 10 – Траектории пирамидального отображения и «промодулированные» по синусоидальному закону при количестве точек=20.

Заключение

В работе продемонстрирована роль оператора Перрона–Фробениуса в решении задачи статистической физики по определению характера динамики (расщепления) корреляций в дискретных динамических системах, демонстрирующих хаотическое поведение, а именно: явное включение оператора в выражение для автокорреляционных и корреляционных функций модельных процессов, построенных посредством функциональной зависимости от точек траекторий хаотических отображений, позволяет точно рассчитывать корреляционные функции, если известны нуль-пространство оператора и (или) его собственные функции и собственные числа.

Для рассмотренных кусочно-линейных отображений *регулярной* структуры (сдвиги Бернулли, «пилообразные» отображения) собственные функции представляются полиномами Бернулли.

Знание линейных и нелинейных собственных функций оператора Перрона–Фробениуса позволяет достичь аналитического результата при расчете автокорреляционных функций траекторий и соотнесенных с траекторией наблюдаемых, выявить особенности различных отображений в плане автокорреляционных свойств их орбит (в частности, экспоненциальный спад, осцилляции или свойство дискретного белого шума). Значениями собственных чисел названного определяется процесс расщепления корреляций (перемешивания) в хаотической системе.

Отображения, рассмотренные в работе и обладающие равномерным инвариантным распределением, условно названы «базовыми». Замена переменных в этих отображениях приводит к топологически эквивалентным, сопряженным отображениям, отличающимся от базовых своими вероятностными и корреляционными свойствами, что делает их перспективными для моделирования хаотических процессов. Естественно, информация о базовом отображении (например, знание решения спектральной задачи) позволяет давать точные аналитические формулировки и для характеристик сопряженных отображений.

Показано, что для сигналов в форме гармонических функций от хаотического аргумента, изменяющегося по хаотическому кусочно-линейному за-

кону (сдвиг Бернулли, tent map), корреляционные функции носят дельтаобразный характер. Более того, данные нелинейные преобразования способствуют быстрейшему расцеплению корреляций. Это позволяет представить отсчеты этих сигналов в качестве идеальных (с точки зрения некоррелированности отсчетов) выборок псевдослучайных величин.

Список использованных источников

1. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Л. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. М. : Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 416 с.
2. Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М. ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.
3. Аникин В. М., Аркадакский С.С., Ремизов А. С. Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. 96 с.
4. Lasota A., Mackey V.C. Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 p.
5. Аникин В. М. Автокорреляционные свойства хаотических отображений. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2018. 80 с.
6. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
7. *Grossmann S., Thomae S.* Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes // *Z. Naturforsch.* 1977. V. 32a. P. 1353–1363.
8. *Tsuchia T., Szabo A., Saito N.* Exact solutions of simple nonlinear difference equation systems that show chaotic behavior // *Z. Naturforsch.* 1983. V. 38a. P. 1035–1039.
9. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. – 296 с.
10. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Статистические модели эмиссионных флуктуаций и надежности автоэммиттерных систем // *Радиотехника.* 2003, № 2. С. 55–60.