

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа  
и автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ  
С НЕНАДЕЖНЫМИ СИСТЕМАМИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ  
И УПРАВЛЕНИЕМ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 481 группы  
направления 27.03.03 Системный анализ и управление  
факультета компьютерных наук и информационных технологий  
Видяшевой Юлии Сергеевны

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

Н.П. Фокина

Заведующий кафедрой

к. ф.-м. н., доцент

И.Е. Тананко

Саратов 2019

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность темы.** Сети массового обслуживания (СМО) с ненадежными элементами [1 – 4], и поэтому имеющие нестационарную структуру, широко используются в качестве математических моделей дискретных сетевых стохастических систем, в которых один или несколько элементов в процессе функционирования могут выходить из строя и восстанавливаться. К таким системам относятся гибкие производственные системы, информационно-вычислительные сети, сети передачи данных [5].

Исследование систем и сетей массового обслуживания с ненадежными элементами является перспективным направлением развития теории массового обслуживания. В работах, посвященных надежности систем и сетей массового обслуживания, интерес представляют построение моделей таких систем, разработка методов анализа систем и сетей массового обслуживания с изменяемыми параметрами [3], а также получение характеристик и изучение свойств этих моделей.

Примером модели таких сетей может являться ненадежная сеть, в которой приборы систем обслуживания могут выходить из строя и восстанавливаться [6, 7]. Неработоспособное состояние прибора системы обслуживания характеризуется тем, что интенсивность обслуживания прибора равна нулю до момента его восстановления.

**Цель бакалаврской работы** – разработка метода динамического управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с ненадежными системами и исследование ненадежных сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией.

Поставленная цель определила **следующие задачи:**

1. разработать метод управления маршрутизацией в открытых сетях массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания;
2. разработать метод анализа сетей массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания и управлением маршрутизацией;

3. разработать алгоритм анализа сетей массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания и управлением маршрутизацией;
4. разработать программу для анализа сетей массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания и управлением маршрутизацией;
5. провести исследование характеристик открытых ненадежных сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией.

**Методологические основы** исследования сетей массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания и управлением маршрутизацией представлены в работах С.Э. Статкевич, М.А. Матальцкого [4], Х. Дадуны [9], И.Е. Тананко [1, 2, 8], Н.П. Фокиной [2, 3, 6-8].

**Теоретическая и/или практическая значимость бакалаврской работы.**

Работа имеет теоретическую значимость. Предложен метод маршрутизации в открытых сетях массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания, а также метод анализа таких сетей с управлением маршрутизацией. Полученные результаты являются вкладом в развитие теории сетей массового обслуживания.

Практическая значимость заключается в возможности дальнейшего использования программного продукта (программы для анализа сетей массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания и управлением маршрутизацией) для исследования свойств реальных стохастических систем с сетевой структурой при их проектировании или оптимизации.

**Структура и объём работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, 6 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы – 49 страниц, из них 40 страниц – основное содержание, включая 12 рисунков и 2 таблицы, список использованных источников информации – 20 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Первый раздел «Однородные открытые сети массового обслуживания»** посвящен описанию открытых сетей массового обслуживания и теореме Джексона.

Рассматривается открытая экспоненциальная сеть обслуживания  $\Gamma$ , содержащая  $L$  систем  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , обслуживающих требования одного класса, поступающие из внешнего источника  $S_0$ . В сеть поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\lambda_0$ . Система  $S_i$  содержит  $\kappa_i$  параллельно работающих одинаковых приборов, длительность обслуживания требований прибором имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu_i$ . Выбор в  $S_i$  очередного требования на обслуживание производится из общей очереди неограниченной длины согласно дисциплине *FCFS*.

Переходы требований между системами сети определяются маршрутной матрицей  $\Theta = (\theta_{ij})$ ,  $i, j = 0, \dots, L$ , где  $\theta_{ij}$  – вероятности перехода требований из системы  $S_i$  в систему  $S_j$ .

Для сетей данного типа имеет место теорема Джексона [10]. В данном разделе приводится алгоритм, реализующий метод анализа однородных открытых экспоненциальных СеМО, основанный на данной теореме.

**Второй раздел «Замкнутая сеть массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания»** посвящен описанию сети указанного типа, в которой только один прибор в каждой системе может выходить из строя и восстанавливаться.

Рассматривается однородная замкнутая сеть массового обслуживания, состоящая из систем обслуживания  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , типа  $M/M/\kappa_i$  [10],  $\kappa_i > 1$ , с одним классом требований. Приборы каждой системы являются ненадежными, предполагается, что при отказе одного прибора остальные не могут отказать до его восстановления. Длительность наработки на отказ и

длительность восстановления приборов систем обслуживания – экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , соответственно. Предполагается, что маршрутная матрица сети обслуживания не изменяется в моменты отказа и восстановления приборов систем [7].

Пусть  $b = (b_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , – вектор, определяющий структуру систем обслуживания сети, где  $b_i = 0$ , если в системе  $S_i$  все приборы работоспособны,  $b_i = 1$ , если один прибор в системе  $S_i$  восстанавливается. Множество всех векторов  $b$  обозначим через  $B$ ,  $|B| = 2^L$ .

В силу независимости выходов из строя приборов в различных системах, стационарная вероятность того, что сеть обслуживания находится в состоянии  $b$  имеет мультипликативную форму

$$P(b) = \prod_{i=1}^L \frac{\delta(b_i)\kappa_i\alpha_i + (1 - \delta(b_i))\beta_i}{\kappa_i\alpha_i + \beta_i}, \quad b \in B,$$

где  $\delta(b_i) = 0$ , если  $b_i = 0$ , иначе  $\delta(b_i) = 1$ .

Пусть  $n(n_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$  – состояние сети, где  $n_i$  – число требований в системе  $S_i$ . Известно [11], что стационарное распределение вероятностей состояния сети  $\Gamma$  при фиксированной структуре  $b$  определяется выражением

$$P(n, b) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^L \frac{x_i^{n_i}}{\prod_{m=1}^{n_i} \alpha_i(m)},$$

$$x_i = \omega_i / \mu_i,$$

где  $\omega = (\omega_1 \dots \omega_L)$  – решение системы уравнений  $\omega\Theta = \omega$  с условием нормировки  $\sum_{i=1}^L \omega_i = 1$ ,  $\alpha_i(m) = \min\{m, \kappa_i - b_i\}$ ,  $1 \leq m \leq N$ ,  $G$  – нормализующая константа.

Тогда безусловная вероятность пребывания сети в состоянии  $n$  определяется выражением

$$P(n) = \sum_{b \in B} P(n, b) P(b).$$

Коэффициент использования приборов системы  $S_i$  за время функционирования сети равен

$$\psi_i = \sum_{b \in B} \psi_i(b) P(b),$$

где  $\psi_i(b)$  – коэффициент использования приборов системы  $S_i$  при структуре  $b$ ,

математическое ожидание числа требований в системе  $S_i$  равно

$$\bar{n}_i = \sum_{b \in B} \bar{n}_i(b) \cdot P(b),$$

где

$$\bar{n}_i(b) = \sum_{k=0}^N k \sum_{n: n_i=k} P(n, b).$$

**В третьем разделе «Открытая сеть массового обслуживания с ненадежными системами обслуживания и управлением маршрутизацией»** рассматривается открытая сеть, состоящая из экспоненциальных одноприборных систем, в которой все системы являются ненадежными. Длительность наработки на отказ и длительность восстановления приборов систем обслуживания – экспоненциально распределенные случайные величины.

Пусть  $b = (b_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , – вектор структуры сети, где  $b_i = 1$ , если в системе  $S_i$  прибор работоспособен,  $b_i = 0$ , если прибор в системе  $S_i$  восстанавливается. Множество всех векторов  $b$  обозначим через  $B$ ,  $|B| = 2^L$ . Будем обозначать через  $b^{(k)} = (b_i^{(k)})$  структуру с номером  $k=1, \dots, 2^L$ , причем нумерация структур произвольна, за исключением  $b^{(1)} = (1, 1, \dots, 1)$  – структура сети, когда все системы исправны. Предполагается, что маршрутная матрица  $\Theta$  сети обслуживания зависит от вектора  $b$ ,  $\Theta(b) = (\theta_{ij}(b))$ ,  $b \in B$ .

Пусть  $k$  – номер системы, вышедшей из строя. Множество  $X_k$  – множество номеров смежных с  $S_k$  входящих систем, а  $Z_k$  – множество номеров смежных с  $S_k$  выходящих систем.

В момент перехода системы  $S_k$  из исправного в неисправное состояние происходит мгновенное изменение маршрутной матрицы и элементы новой маршрутной матрицы  $\tilde{\Theta}=(\tilde{\theta}_{ik})$ ,  $i=1,\dots,L$ , определяются следующим образом

$$\tilde{\theta}_{ij} = \begin{cases} \theta_{ij} + \theta_{ik} \cdot w_j, & j \in Z_i \setminus \{k\}, \\ 0, & j \notin Z_i \setminus \{k\}, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\tilde{\theta}_{kj} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \quad (3.2)$$

где весовой множитель  $w_m$  определяется выражением

$$w_m = \frac{1}{\frac{v_m f_m}{\sum_{j \in Z_i \setminus \{k\}} \frac{1}{v_j f_j}}}, \quad m \in Z_i \setminus \{k\},$$

где

$$v_j = \frac{1}{\mu_j} - \text{математическое ожидание длительности обслуживания}$$

требования в системе  $S_j$ ,

$f_j$  – число вхождений системы  $j$  в множества  $Z_i \setminus \{k\}$ , для всех  $i \in X_k$ .

Выражения (3.1), (3.2) определяют принцип динамического перераспределения потоков требований в открытой СеМО с ненадежными системами.

Пусть  $B^+$  – множество связных структур, при которых сеть является связной, и множество  $B^-$  – множество несвязных структур, при которых сеть распадается на кластеры. Предполагается, что как только сеть переходит в структуру  $b \in B^-$ , то запускается процесс мгновенного восстановления всех

систем, вышедших из строя. Интенсивности переходов между смежными структурами  $b^{(k)}$  и  $b^{(l)}$  определяются следующим выражением, при предположении, что система  $S_i$  вышла из строя

$$a(b^{(k)}, b^{(l)}) = \begin{cases} 0, & \|b^{(k)} - b^{(l)}\| > 1, \\ \alpha_i, & b_i^{(l)} - b_i^{(k)} = -1, \\ \beta_i, & b_i^{(l)} - b_i^{(k)} = 1. \end{cases}$$

Пусть  $D$  – множество граничных структур, из которого возможен переход из множества  $B^+$  в множество  $B^-$ ,  $D \subset B^+$ . Интенсивность перехода из структуры  $b^{(k)} \in D$  в  $b^{(l)}$  равна

$$a(b^{(k)} \in D, b^{(l)}) = \gamma,$$

где  $\gamma > \max_{i=1, \dots, L} (\beta_i)$ .

Переходы между структурами сети можно описать цепью Маркова с инфинитезимальным оператором  $A = (a_{kl}), k, l=1, \dots, |B^+|$ , где  $a_{kl} = a(b^{(k)}, b^{(l)})$ .

Стационарное распределение  $\pi = (\pi(b)), b \in B^+$ , цепи Маркова является решением уравнения

$$\pi A = 0,$$

с условием нормировки  $\sum_{b \in B^+} \pi(b) = 1$ .

Стационарные характеристики систем обслуживания сети  $\Gamma$  определяются по формуле

$$\chi_k = \sum_{b \in B^+} \chi_k(b) \pi(b), \quad k = 1, \dots, L,$$

где  $\chi_k$  – интегральная характеристика системы  $S_k$ ,  $\chi_k(b)$  – стационарная характеристика системы  $S_k$  сети обслуживания  $\Gamma(b)$  со структурой  $b$ , может быть получена известным методом, основанным на теореме Джексона.

**Четвертый раздел «Алгоритм метода анализа открытых сетей массового обслуживания с ненадежными системами»** содержит подробное описание алгоритма анализа сетей массового обслуживания с ненадежными



системами обслуживания и управлением маршрутизацией. Алгоритм состоит из 18 блоков, структурная схема взаимосвязи блоков представлена в работе.

**Пятый раздел «Описание программы для анализа открытых сетей массового обслуживания с ненадежными системами и управлением маршрутизацией»** содержит подробное описание правил использования и интерфейса разработанной программы.

Программа реализована на языке программирования Python версии 3.5.2 в командной оболочке для интерактивных вычислений JupyterNotebook с использованием графического фреймворка PyQt [12-14].

**Шестой раздел «Сравнение методов управления маршрутизацией в открытых сетях массового обслуживания с ненадежными системами»** посвящен оценке эффективности предложенного метода управления маршрутизацией.

Дополнительно рассматривались два способа формирования маршрутных матриц. Первый способ заключался в перераспределении потока требований в сломанную систему между работоспособными системами пропорционально их маршрутным вероятностям. А во втором так же учитывалось математическое ожидание длительности обслуживания требования в работоспособных системах.

В ходе сравнительного эксперимента было выявлено, что предложенный метод управления маршрутизацией, изложенный в третьем разделе, обеспечивает наименьшее математическое ожидание времени реакции сети.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Рассмотренные в работе ненадежные сети массового обслуживания могут быть использованы в качестве моделей стохастических систем с сетевой структурой, таких как, например, гибкие производственные системы, сети связи, компьютерные сети.

В данной работе были рассмотрены открытая и замкнутая сети массового обслуживания с ненадежными системами. Для открытой

ненадежной сети обслуживания разработан метод динамического управления маршрутизацией. А также предложены методы анализа сетей данных видов.

Разработан алгоритм описанного метода анализа сетей массового обслуживания с ненадежными системами и динамическим управлением маршрутизацией; составлена блок-схема данного алгоритма, подробно описаны все входящие в нее блоки.

Для реализации разработанного алгоритма была написана программа на языке программирования Python. Данная программа дает возможность вычислить стационарные характеристики ненадежных систем этой сети по входным параметрам. В работе была описана структура этой программы, представлены рисунки графических окон интерфейса данной программы.

Проведено исследование характеристик открытых ненадежных сетей массового обслуживания с несколькими способами управления маршрутизацией и показано на примере конкретной сети, что предложенный метод маршрутизации является эффективным.

Разработанная программа позволяет проводить исследование открытой ненадежной сети рассмотренного вида при различных параметрах и может использоваться на практических занятиях при подготовке бакалавров по специализации кафедры.

**Отдельные части бакалаврской работы были опубликованы/представлены на конференции:**

1. Видяшева Ю.С., Фокина Н.П. Использование программного комплекса анализа ненадежных сетей массового обслуживания в процессе обучения бакалавров по направлению «Системный анализ и управление» // Информационные технологии в образовании: Материалы X Всероссийск. научно-практ. конф. Саратов: ООО «Издательский центр «Наука»», 2018, 70–72 с..

2. Фокина Н. П., Видяшева Ю. С. Метод анализа замкнутой сети массового обслуживания с ненадежными приборами в системах обслуживания// Компьютерные науки и информационные технологии:

Материалы Междунар. науч. конф. Саратов, СГУ, 2-3 июля 2018 г. Саратов: Издат. центр "Наука", 2018, 419-421 с.

#### **Список использованных источников**

1 Тананко, И.Е. О замкнутых сетях массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания // Известия Саратов. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып.1,ч. 1.С. 138-140.

2 Тананко, И.Е., Фокина, Н.П. Анализ замкнутых ненадежных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Известия Саратов. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып.2,ч. 1.С. 111-117.

3 Фокина, Н. П., Тананко, И. Е. О методе адаптивной маршрутизации в замкнутых сетях массового обслуживания // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы науч. конф. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010,129-131.

4 Статкевич, С.Э., Матальцкий, М.А. Исследование сети массового обслуживания с ненадежными системами в переходном режиме // Вестник Томского гос. ун-та. 2012. № 1(18). С. 112-125.

5 Вишневецкий, В.М. Теоретические основы построения компьютерных сетей. / В.М. Вишневецкий.- М. : Техносфера, 2003. 512 с.

6 Видяшева, Ю.С., Фокина, Н.П. Использование программного комплекса анализа ненадежных сетей массового обслуживания в процессе обучения бакалавров по направлению «Системный анализ и управление» // Информационные технологии в образовании: Материалы X Всероссийск. научно-практ. конф. Саратов: ООО «Издательский центр «Наука»», 2018. 70–72 с.

7 Фокина, Н.П., Видяшева, Ю.С. Метод анализа замкнутой сети массового обслуживания с ненадежными приборами в системах обслуживания// Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов, СГУ, 2-3 июля 2018 г. Саратов:

Издат. центр "Наука", 2018, 419-421 с.

8 Фокина, Н.П., Тананко, И.Е. Метод управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания с переменной топологией // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 82-88.

9 Sommer, J., Berkhout, J., Daduna, H., Heidergott, B. Analysis of Jackson networks with infinite supply and unreliable nodes // Queueing Systems. 2017. V. 87, Issue 1-2. P. 181-207 .

10 Митрофанов, Ю.И. Анализ сетей массового обслуживания : Учебное пособие для студентов университетов / Ю.И. Митрофанов.- Саратов : Научная книга, 2004. 175 с.

11 Gordon W.J., Newell G.F. Closed queuing systems with exponential servers // Oper. Res. 1967. Vol. 15, No.2. P.254-265.

12 Прохоренок, Н.А., Дронов, В.А. Python3 и PyQT 5. Разработка приложений. / Е. М. Капальгина. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2018. 832 с.

13 Дж. Чан , Уэсли. Python: создание приложений. Библиотека профессионала /: Вильямс, 2015. 816 с

14 VanderPlas, Jake. A whirlwind tour of Python/ J. VanderPlas. O'ReillyMedia, 2016. 110 с.