

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛОВ В МОДЕЛИРОВАНИИ  
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 452 группы

направления 38.03.05 — Бизнес-информатика

механико-математического факультета

Веретенникова Андрея Вячеславовича

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

М. Г. Плешаков

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

С. П. Сидоров

Саратов 2019

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Фрактальный анализ, как метод исследования математических множеств различной природы, базируется на идеях Б. Мандельброта, опубликование которым основополагающей работы в 1973 г. дало старт широкому внедрению методов фрактального анализа в физику, химию, биологию, экономику. Главное достижение теории фракталов - новые эффективные способы математического описания сложных явлений, поэтому актуальным является анализ и оценка этих новых возможностей и методов в эконометрике. Методы фрактального анализа временных рядов позволяют описывать свойства временных рядов, которые не выявляются другими методами анализа, такие как персистентность и «изломанность», и дают возможность судить о специфических свойствах экономических процессов, порождающих исследуемые временные ряды.

**Целью бакалаврской работы** является изучение и анализ финансовых временных рядов.

**Объект исследования** — финансовые временные ряды.

**Предмет исследования** — фрактальный анализ финансовых временных рядов.

Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие **задачи**:

- определить основные понятия, связанные с временными рядами;
- изучить необходимую информацию о методах исследования временных рядов;
- изучить необходимую информацию о фракталах;
- рассмотреть метод фрактального анализа;
- применить свойство фрактальности временных рядов для анализа;

**Практическая значимость** проводимого исследования состоит в том, что метод фрактального анализа финансовых временных рядов можно использовать для:

- вычисления фрактальной размерности временного ряда;
- выявления трендовости временного ряда;
- прогнозирования поведения динамической системы.

**Основная часть.** Основная часть данной работы состоит из 4 разделов, а именно:

1. Понятие временного ряда.
2. Классические методы исследования временных рядов.
3. Фрактальный анализ.
4. Природа финансовых рынков
5. Анализ данных в программе Fractan.

**В первом разделе** приводится понятие временного ряда, а также его основные характеристики, такие как:

- характер временного параметра;
- расстояние между уровнями;
- число показателей;
- способ выражения уровней временных рядов;
- непрерывность временного ряда.

**Во втором разделе** рассмотрены классические методы исследования временных рядов.

*Временное сглаживание.* При исследовании временных рядов принято выделять несколько составляющих:

$$x(t) = x_{trend}(t) + x_{cycle}(t) + \varepsilon(t),$$

где  $x_{trend}$  – плавно меняющаяся компонента, определяемая долговременной тенденцией (трендом) изменения ряда признаков,  $x_{cycle}$  – циклическая или сезонная компонента, которая отражает повторяемость процессов на определенных промежутках времени, а  $\varepsilon(t)$  – случайная компонента, содержащая влияние прочих факторов, механизм которого (влияния) скрыт от наблюдателя.

*Параметрическое оценивание и стационарность.* Часто используемым методом моделирования нестационарных временных рядов является параметрическое оценивание. В этом случае подбираются параметры той или иной функциональной зависимости для трендовой составляющей, после исключения которой, остается стационарный ряд. Оставшийся ряд может и не быть стационарным в смысле математического определения этого понятия, но на

практике его удобно считать таковым с доверительной вероятностью, достаточной для исследователя.

*Линейная регрессионная модель* позволяет связать две величины  $Y$  и  $X$  линейной зависимостью вида  $Y = aX + b$  по имеющимся  $N$  парам значений методом наименьших квадратов (МНК).

*Автокорреляция.* Модели, использующие лаговую автокорреляцию, называются автокорреляционными (АМ) или авторегрессионными. Для применения автокорреляционных моделей (АМ) желательно иметь временной ряд, автокорреляционная функция которого имеет небольшое число максимумов и достаточно быстро спадает с ростом шага автокорреляции.

*Скольльзящее среднее и авторегрессия.* Модель скользящего среднего состоит в том, что для определения свойств временного ряда с целью краткосрочного прогноза берется выборка последних данных за некоторый промежуток времени  $T$ .

*Взвешенная схема скользящего среднего.* Модификацией модели скользящего среднего является взвешенная схема скользящего среднего, когда оценкой текущего уровня является взвешенное среднее всех предшествующих уровней, причем веса при наблюдениях убывают по мере удаления от последнего уровня, т.е., информационная ценность наблюдений признается тем большей, чем ближе находятся они к концу интервала наблюдений.

*Другие методы.* Из других – «нетрадиционных» методов анализа временных рядов – следует отметить нейросетевой метод и метод размножения выборок.

**В третьем** разделе раскрывается понятие фрактала, описываются его свойства. Также описывается свойство фрактальности временного ряда. Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности. Это определение в свою очередь требует определений терминов, размерность Хаусдорфа-Безиковича ( $D$ ) и топологическая размерность ( $D_t$ ). Размерность Хаусдорфа-Безиковича  $D$  множества  $\varphi$  есть критическая размерность, при которой мера величины этого множества  $N(r)$  изменяет свое значение с нуля на бесконечность. Топологическая размерность  $D_t$  всегда равна целому числу. Она вычисляется по

формуле

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln 1/r}.$$

Одним из элементарных примеров является фрактальная размерность снежинки Коха, как показано на рисунке 1. Её топологическая размерность равна 1, но это ни в коем случае не спрямляемая кривая, поскольку длина кривой между любыми двумя точками снежинки Коха — бесконечность. Никакая сколько угодно малая часть кривой не является отрезком прямой. Фрактальную размерность кривой можно объяснить интуитивно, предполагая, что фрактальная линия — это объект слишком детальный (подробный), чтобы быть одномерным, но недостаточно сложный, чтобы быть двумерным. Поэтому её размерность лучше описывать не обычной топологической размерностью 1, но её фрактальной размерностью, равной в этом случае числу, лежащему в интервале между 1 и 2.

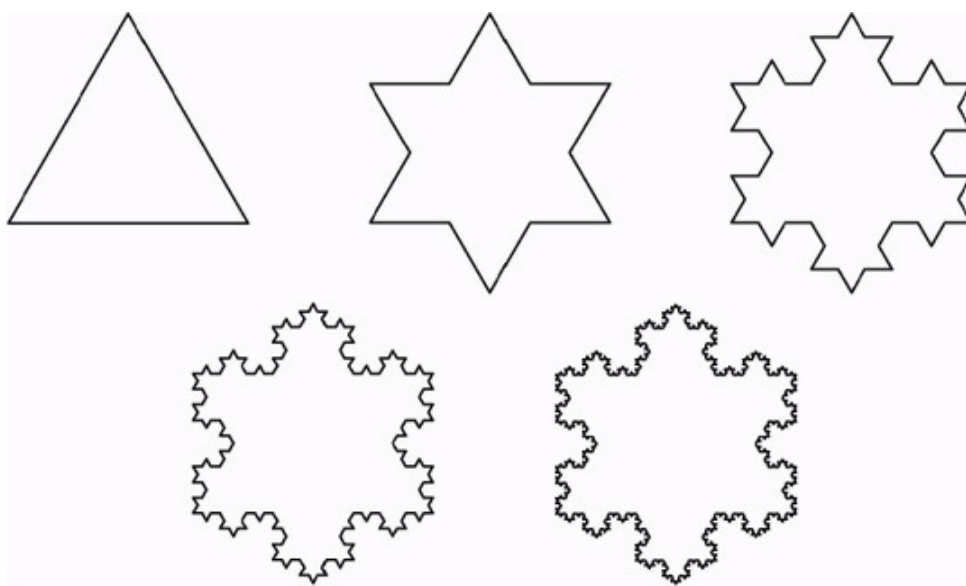


Рисунок 1 - Алгоритм построения снежинки Коха

Фрактальность временных рядов была, видимо, впервые описана египетским гидрологом Херстом. Он обнаружил, что для временных рядов различных естественных процессов (уровней осадков, стоков рек и т.д.) наблюдаемый нормированный размах  $R/S$  хорошо описывается эмпирическим со-

отношением

$$R/S = (\tau/2)^H,$$

где  $R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} \sum_{u=1}^t (\xi(u) - \bar{\xi}_\tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} \sum_{u=1}^t (\xi(u) - \bar{\xi}_\tau)$  - размах временного ряда за период  $\tau$ ,  $S = (\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} (\xi(t) - \bar{\xi}_\tau)^2)^{1/2}$  - стандартное отклонение за период  $\tau$ ,  $\xi(t)$  - значение ряда в момент времени  $t$ ,  $\bar{\xi}_\tau$  - среднее значение ряда за период  $\tau$ ,  $H$  - т.н. показатель Херста.

**В четвертом** разделе описывается история развития теории рынков капитала. Ее основоположником является французский математик Луи Башелье. Ученый выявил, что существует аналогия между рассеиванием тепла в веществе (или броуновским движением крупинок пылицы в пробе воды) и колебаниями стоимости облигаций. Сравнивая их, он показал, что если вынести изменения цены на облигации за месяц или год на график, то разброс образует кривую Гаусса. Свою теорию Башелье применил и на практике, рассчитав с помощью нее (ошибившись всего лишь на один процент) вероятность прибыли для покупателя 45- дневного опциона.

Нобелевский лауреат Гарри Марковиц использовал полученные Башелье результаты для создания теории портфеля. Суть теории состоит в следующем – если имеются два инвестиционных портфеля, то выбираем вариант с высшей ожидаемой средней прибылью и минимальной дисперсией (риском).

Ученик Марковица Уильям Шарп разработал на основе этой теории модель оценки финансовых активов САРМ (Capital Active Pricing Model). С помощью нее инвесторы могли узнать пороговое значение ожидаемой отдачи от вложения инвестиций в тот или иной проект и решать вкладывать ли в него свои деньги или нет.

В 70-х годах, когда был учрежден совершенно новый вид рынка – рынок опционов, Фишер Блэк и Майрон Шоулз сделали еще один большой шаг в создании ортодоксальной финансовой теории – разработали формулу, названную в честь них, для расчета стоимости опциона.

В 1960-х и 1970-х годах Юджин Фама придал теоретическую форму законам случайности и броуновского движения на финансовых рынках. Он

выдвинул гипотезу эффективного рынка и показал, что если рынок удовлетворяет этой гипотезе, то рынок подчинен вышеуказанным законам. Суть гипотезы состоит в том, что на идеальном рынке стоимость ценных бумаг полностью отражает всю информацию, которая могла предвосхитить будущие события.

Гипотеза фрактального рынка подчеркивает влияние ликвидности и инвестиционных горизонтов на поведение инвесторов. В противовес гипотезе эффективного рынка, она предполагает:

1. Рынок стабилен, когда он состоит из инвесторов, охватывающих большое количество инвестиционных горизонтов. Это гарантирует достаточную ликвидность для трейдеров.
2. Информационное множество больше связано с настроением рынка и техническими факторами в краткосрочной перспективе, чем в более долгосрочной перспективе. По мере увеличения инвестиционных горизонтов доминирует более долговременная фундаментальная информация. Таким образом, изменения цены могут отражать информацию, важную только для этого инвестиционного горизонта.
3. Если происходит событие, которое ставит под сомнение действительность фундаментальной информации, долгосрочные инвесторы либо прекращают участие на рынке, либо начинают торговать на основании краткосрочного информационного множества. Когда общий инвестиционный горизонт рынка сокращается до однородного уровня, рынок становится нестабильным. Нет долгосрочных инвесторов, чтобы стабилизировать рынок, предлагая ликвидность краткосрочным инвесторам. [?]
4. Цены отражают сочетание краткосрочной технической торговли и долгосрочной фундаментальной оценки. Таким образом, вероятно, что краткосрочные изменения цен будут более волатильными или "более шумными" чем долгосрочные. Основная тенденция на рынке отражает изменения в ожидаемом доходе на основании изменяющейся экономической среды. Краткосрочные тенденции, более вероятно, являются результатом поведения толпы. Нет причин полагать, что длина краткосрочных тенденций связана с долгосрочной экономической тенденцией.

**В пятом**, заключительном разделе был проведен фрактальный анализ

временного ряда на основе стоимости акций ОАО «Газпром» с периодом 1 час.

На рисунке 2 приведен график дневной стоимости акций ОАО «Газпром» за период с 20.05.10 по 20.05.19.



Рисунок 2 – График стоимости акций ОАО «Газпром»

Корреляционная размерность показывает минимальное количество размерностей пространства, в котором размещаются траектории. В нашем случае она равняется 3.149. Как видно из рисунка 3, корреляционная размерность начинает снижаться – это говорит о том, что данная динамическая система является не случайной, а ее поведение определяется определенным ограниченным набором параметров.



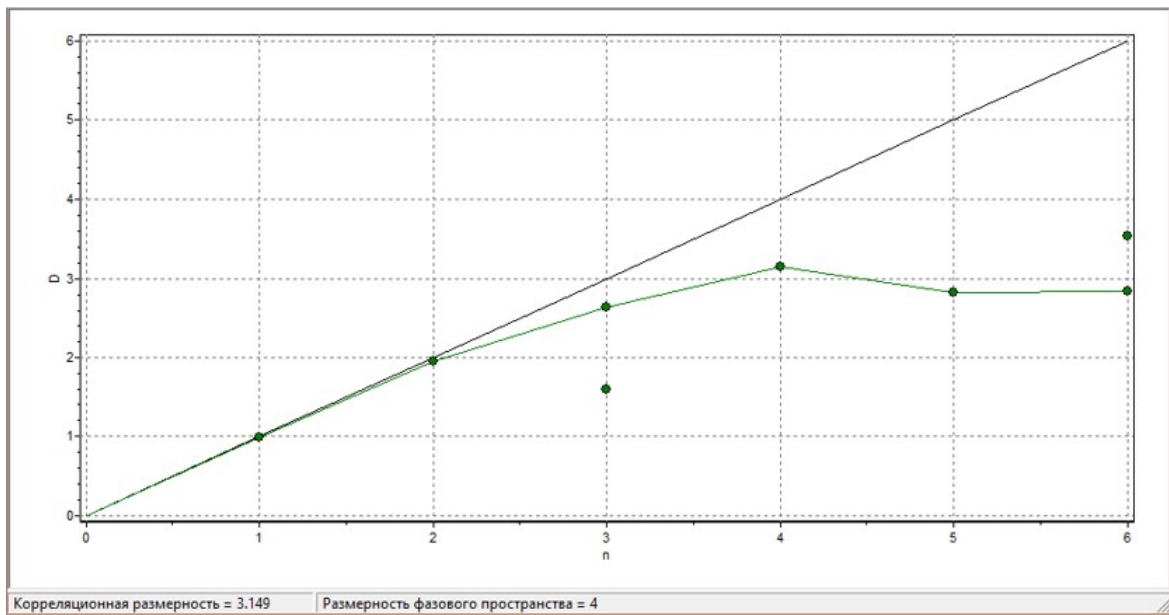


Рисунок 3 – Корреляционная размерность

Также на основе загруженных данных можно построить корреляционную энтропию, которая проиллюстрирована на рисунке 4. Корреляционная энтропия показывает степень разбегания близких фазовых траекторий и позволяет оценить количество информации, необходимой для прогноза поведения доходности акции в будущем. В нашем случае она равняется 5,3. То есть этот коэффициент показывает время, на которое можно спрогнозировать поведение динамической системы.

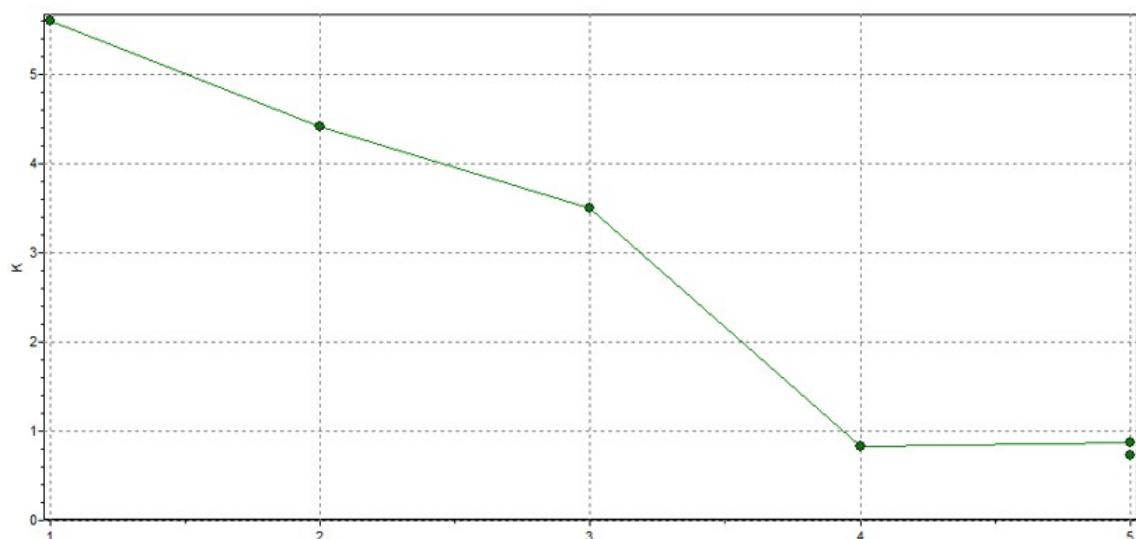


Рисунок 4 – Корреляционная энтропия

Далее мы рассмотрим автокорреляционную функцию. Она показывает корреляцию между доходностями одного ценового ряда, но с различным ла-

гом (s). Как видно из рисунка 5, сильная корреляционная зависимость наблюдалась при лаге 1-2, это говорит о том, что инертность текущей доходности сохраняется на 1-2 дня.

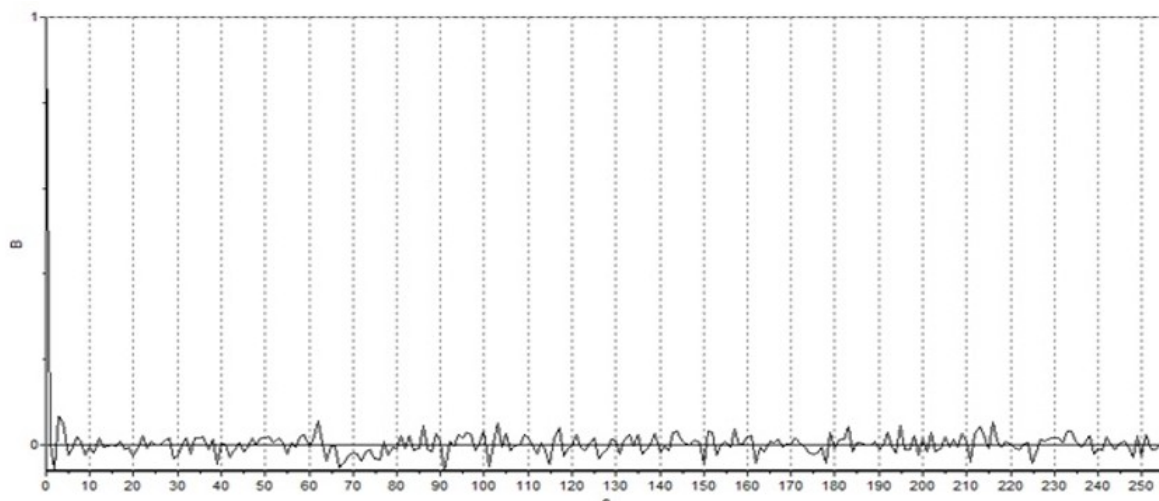


Рисунок 5 – Автокорреляционная функция

Следующим показателем, который мы рассмотрим, будет показатель Херста. Он показывает трендовость или персистентность ряда часовых доходностей и рассчитывается с помощью алгоритма R/S анализа.

Если показатель Херста находится на интервале  $(0,5;1]$ , то это говорит о том, что данный ряд доходностей трендовый, то есть будущее изменение доходности будет иметь тот же знак, что и предыдущее.

Если показатель Херста находится на интервале равен  $0,5$ , то это говорит о том, что доходности изменяются по нормальному закону распределения.

Если показатель Херста находится на интервале  $[0;0,5)$ , то ряд изменений доходности персистентен, то есть для будущего члена ряда более вероятно изменение знака, нежели сохранение его. На рисунке 6 показатель Херста( $H$ ) =  $0,96$ . Это значит, что данный ряд обладает трендовыми свойствами.

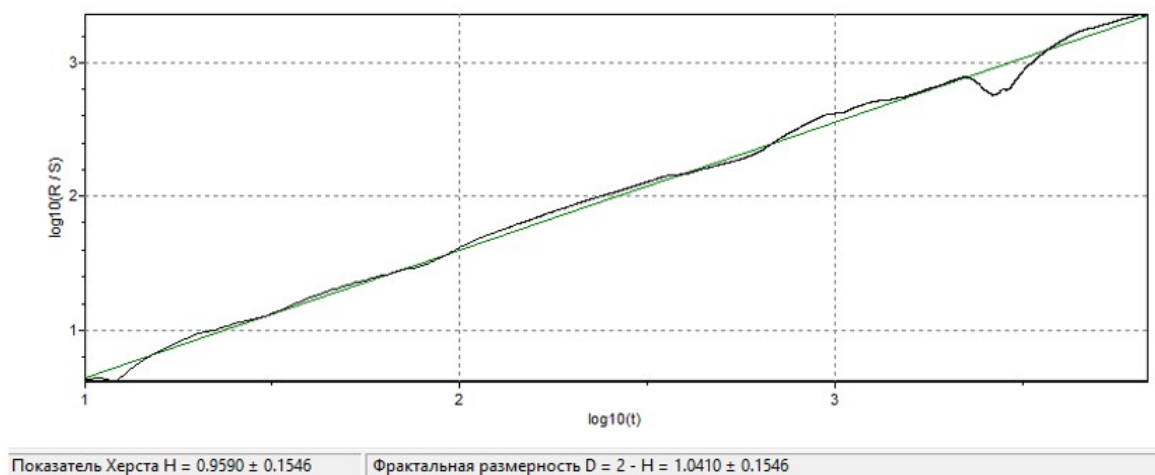


Рисунок 6 – Показатель Херста

Аналогичным образом были проанализированы временные ряды акций ПАО «Аэрофлот» и ПАО «Роснефть».

## Основные результаты

1. Определены основные понятия, связанные с временными рядами, их свойства и характеристики.
2. Изучены классические методы исследования временных рядов, такие как временное сглаживание, параметрическое оценивание и стационарность, линейная регрессионная модель, автокорреляция, скользящее среднее и авторегрессия, взвешенная схема скользящего среднего и другие.
3. Определено понятие фрактала и изучены его свойства.
4. Приведена теория рынков капитала, теория портфеля, модель оценки финансовых активов, гипотеза эффективного рынка и гипотеза фрактального рынка.
5. Проведен фрактальный анализ временных рядов на основе стоимости акций ОАО «Газпром», ПАО «Аэрофлот» и ПАО «Роснефть» с таймфреймом 1 день.