МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Задачи с параметрами на ЕГЭ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета

Чернецова Дмитрия Евгеньевича

Научный руководитель

к. п. н., доцент ________________________ Т. А. Капитонова

подпись, дата

Зав. кафедрой

к. п. н., доцент ________________________ И. К. Кондаурова

подпись, дата

Саратов 2019

Введение. Задачи с параметрами играют важную роль в формировании математической культуры учащихся, однако их решение вызывает у школьников значительные трудности. Причина этого состоит в том, что любое уравнение или неравенство с параметром заключает в себе целый класс элементарных уравнений и неравенств, для каждого из которых должно быть найдено решение.

Задачи с параметрами часто встречались на вступительных экзаменах по математике в высшие учебные заведения. На сегодняшний день таким экзаменом является ЕГЭ по математике профильного уровня, в материалах которого регулярно встречается такая задача, но основная общеобразовательная программа по математике не упоминает в явном виде о задачах с параметрами. Тем не менее было бы ошибкой считать, что задачи с параметром никоим образом не должны освещаться в школьном курсе математике.

Задачами с параметрами на ЕГЭ и разработкой технологии подготовки к ним занимались Высоцкий В. В., Малкова А. Г., Прокофьев А. А., Шевкин А. В., Зеленский А. С. и другие методисты-математики. Все вышеперечисленные исследователи утверждают, что задачам с параметром следует уделять больше внимания при подготовке учащихся к ЕГЭ, причём в основной школе в рамках уроков алгебры и геометрии, а в курсе 10-11 класса – в системе дополнительного математического образования (на факультативных занятиях).

Цель бакалаврской работы: описать методы решения задач с параметрами и разработать программу подготовки учащихся к решению задач с параметрами.

Задачи бакалаврской работы:

1. На основе теоретико-методологического анализа методико-математической литературы рассмотреть классификацию задач с параметрами;
2. Выявить место задач с параметрами в экзаменационной модели ЕГЭ по математике и описать технологию овладения методами решения данных задач;
3. Разработать и апробировать факультативный курс для учащихся одиннадцатых классов общеобразовательных учреждений по теме «Задачи с параметрами».

Методы бакалаврской работы: анализ методико-математической литературы; изучение нормативных документов; разработка и апробация методических материалов.

Структура бакалаврской работы: титульный лист, введение, три главы («Задачи с параметрами в материалах ЕГЭ: теоретические аспекты», «Задачи с параметрами в материалах ЕГЭ: практические аспекты», «Разработка факультативного курса «Задачи с параметрами»»»), заключение, списка использованных источников, содержащий 26 наименований, и двух приложений.

Основное содержание работы.

В первой главе «Задачи с параметрами в материалах ЕГЭ: теоретические аспекты» рассматриваются основные виды задач с параметрами в материалах ЕГЭ, описываются основные методы решения задач с параметрами.

Приведём примеры решения задач с параметрами, решённых в ходе написания бакалаврской работы.

Пример 1. При каких значениях a и b система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ ax + by = 1 \end{cases} \quad (1)$$

имеет единственное решение?

Решение. Так как $|x| \leq 1$ и $|y| \leq 1$, то возможна следующая замена

$$x = \sin t\ ,\ y = \cos t, \text{ где } t \in [0; 2\pi) \quad (2).$$

Значит, достаточно выяснить при каких значениях a и b уравнение

$$a \sin t + b \cos t = 1, \text{ где } t \in [0; 2\pi) \ (3).$$

Так как $a^2 + b^2 \neq 0$, то уравнение (3) преобразуем к виду

$$\sin(t + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ где } \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \ (4).$$

Таким образом, условие единственности решения достигается только при $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$.

Ответ: при $a^2 + b^2 = 1$ система уравнений (1) имеет единственное решение.

Пример 2. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$25^x - 2(a + 1) \cdot 5^x + 9a - 5 = 0. \quad (5)$$

Решение. Обозначим $t = 5^x$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$t^2 - 2(a+1)t + 9a - 5 = 0. \quad (6)$$

Проанализировав уравнения (5) и (6), приходим к следующим выводам:

1. Если уравнение (6) не имеет решений, то и уравнение (5) также не имеет решений;
2. Если уравнение (6) имеет два положительных корня, то уравнение (5) также имеет два корня;
3. Если уравнение (6) имеет два неположительных корня, то уравнение (5) не имеет решений;
4. Если уравнение (6) имеет два корня, один из которых положительный, а второй отрицательный или равный нулю, то уравнение (5) имеет единственный корень;
5. Если уравнение (6) имеет один положительный корень, то у уравнения (5) существует только один корень;
6. Если уравнение (6) имеет один неположительный корень, то у уравнения (5) корней нет.

Далее перейдём к рассмотрению шести перечисленных случаев.

Случай 1. Так как старший коэффициент в уравнении (6) не равен нулю, то это уравнение является квадратным при любых значениях параметра a. Для того, чтобы уравнение (6) не имело решений, необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$4(a+1)^2 - 4(9a-5) < 0 \Leftrightarrow a \in (1; 6). \quad (7)$$

Следовательно, при выполнении условия (7) уравнение (5) не имеет корней.

Случай 2. Уравнение (6) имеет два корня тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$4(a+1)^2 - 4(9a-5) > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty). \quad (8)$$

При выполнении условия (8) получаем, что уравнение (6) имеет корни

$$t = a + 1 \pm \sqrt{(a-1)(a-6)}. \quad (9)$$

Потребуем, чтобы оба корня были положительными. Тогда потребуем выполнение системы

$$\begin{cases} a+1>0 \\ 9a-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{5}{9};+\infty\right). \quad (10)$$

Значит, при выполнении условий (8) и (10) одновременно, то есть $a \in \left(\frac{5}{9};1\right) \cup (6;+\infty)$ заключаем, что у уравнения (5) существуют два корня вида

$$x = \log_5\left(a+1 \pm \sqrt{(a-1)(a-6)}\right). \quad (11)$$

Случай 3. Учитывая (8), потребуем теперь, чтобы оба корня вида (11) были неположительными. Далее имеем, что

$$\begin{cases} a+1<0 \\ 9a-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset. \quad (12)$$

Таким образом, заключаем, что случай 3 невозможен.

Случай 4. Учитывая (8), потребуем, чтобы один из корней был положительным, а второй – неположительным. должно выполняться неравенство

$$9a-5 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{5}{9}. \quad (13)$$

Значит, при одновременном выполнении условий (8) и (13) уравнение (5) имеет один корень вида

$$x = \log_5\left(a+1+\sqrt{(a-1)(a-6)}\right). \quad (14)$$

Случай 5-6. Очевидно, что при $a=1$ и $a=6$ уравнение (6) будет иметь только один корень вида $t=a+1$.

Значит, если $a=1$, то решением уравнения является число $x=\log_5 2$, а если $a=6$, то существует один корень $x=\log_5 7$.

По результатам первой главы мы можем выделить четыре основных типа задач с параметрами:

1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих данному множеству;

2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра;

3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное количество решений;

4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Во второй главе «Задачи с параметрами в материалах ЕГЭ: практические аспекты» выявляется место задач с параметрами в материалах ЕГЭ, приводятся реальные задачи, которые предлагались участникам экзамена, а также описана технология подготовки учащихся к решению задач с параметрами, которая состоит из пяти элементов:

1) технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами;

2) Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами;

3) Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами;

4) Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами;

5) Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.

В третьей главе «Разработка факультативного курса «Задачи с параметрами»»» приводятся учебно-тематическое планирование разработанного курса и планы-конспекты некоторых занятий, а также описывается проведённая опытно-экспериментальная работа.

План-конспект факультативного занятия по теме «Линейные уравнения с параметром».

Учитель: Чернецов Дмитрий Евгеньевич, учитель математики МОУ «СОШ №95 с УИОП» Октябрьского района МО «Город Саратов»

Цель занятия: сформировать первичные представления о задачах с параметрами и методах их решения.

Задачи занятия:

1. Образовательные: учить решать линейные уравнения с параметрами, повторить и закрепить методы решения линейных уравнений.

2. Развивающие: развивать умения анализировать, делать выводы; развивать коммуникативные навыки на этапе рефлексии в конце занятия; содействовать умению осуществлять рефлексивную деятельность.

3. Воспитательные: способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения, развитию культуры речи.

ХОД ЗАНЯТИЯ

Часть 1. Организационный момент.

Часть 2. Актуализация знаний.

На доске записаны три уравнения:

$5x + 20 = 45; \quad 6x + 23 = 6(x + 4) - 1; \quad 3x + 5 + 2x = 5(x + 2)$

Один учащийся у доски решает эти уравнения, а остальные в своих рабочих тетрадях.

После этого учащимся предлагается решить уравнение $ax + 5 = 0$, тем самым на уроке создаётся проблемная ситуация.

Часть 3. Изучение нового материала.

Учитель: В уравнении $ax + 5 = 0$, в отличии от предыдущих, конкретные значения коэффициента неизвестны. При различных значениях a – они разные. Следовательно, решения этих уравнений при различных a будут разные. Вот эта переменная величина a и называется параметром.

Учащиеся записывают в своих тетрадях:

Если в уравнении коэффициенты при неизвестных величинах или свободные члены зависят от каких-либо переменных, то эти переменные *называют параметрами. Решить уравнение с параметром – это значит найти множество решений уравнения при всех допустимых значениях параметра.*

Самыми простыми уравнениями с параметрами являются линейные уравнения с одним неизвестным. О них мы и будем разговаривать на сегодняшнем занятии.

Линейные уравнения с параметром – это уравнения вида $ax + b = 0$, где а и b – действительные числа. Число а называют коэффициентом, b – свободным членом.

Рассмотрим пример решения линейного уравнения с параметром. Учитель решает на доске уравнение $(2a - 4)x = 3a + 1$. Учащиеся записывают решение в тетрадь.

Таким образом, чтобы решить линейное уравнение с параметром, нужно рассмотреть, как минимум, два случая: а) коэффициент при переменной равен нулю; б) коэффициент при переменной не равен нулю.

Часть 4. Первичное закрепление изученного материала.

Учащимся предлагается решить следующие уравнения с параметром:

1. $(5a - 15)x = 7a + 2$
2. $a^2x - 5a = 9x - 15$ (нужно объяснить учащимся, что также, как и при решении обычных уравнений, сначала нужно «перенести неизвестные в одну сторону, а известные в другую» и привести подобные слагаемые.
3. $a \cdot x = b$ (после решения этого уравнения необходимо обратить внимание учащихся на то, что они решили линейное уравнение в общем виде, а значит смогут использовать полученные результаты в ходе дальнейшей работы).

В заключении пользуясь результатами примера 3 решаем задачу: при каких a уравнение $(a^6 + 12a - 40)x = a^2 + a - 2$ имеет бесконечное число решений?

Часть 5. Подведение итогов. Рефлексия.

Часть 6. Получение домашнего задания.

Учащиеся переписывают три уравнения с проектора в тетрадь.

Домашнее задание. Для любых значений параметра решить уравнения:

1. $(4a + 7)x = 8a$

2. $(a^2 - 4)x = (a - 2)$

3. $(a^3 - 1)x = (a^2 + a + 1)$

План-конспект факультативного занятия по теме «Решение уравнений вида $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$».

Учитель: Чернецов Дмитрий Евгеньевич, учитель математики МОУ «СОШ №95 с УИОП» Октябрьского района МО «Город Саратов»

Цель занятия: выявить и научить применять алгоритм решения уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$.

Задачи занятия:

1. Образовательные: учить решать квадратные уравнения с параметрами, повторить и закрепить методы решения квадратных уравнений.

2. Развивающие: развивать умения анализировать, делать выводы; развивать коммуникативные навыки на этапе рефлексии в конце занятия; содействовать умению осуществлять рефлексивную деятельность.

3. Воспитательные: способствовать развитию умения отстаивать свою точку зрения, развитию культуры речи.

ХОД ЗАНЯТИЯ

Часть 1. Организационный момент.

Часть 2. Актуализация знаний.

Учащимся предлагается решить три квадратных уравнения: а) $x^2 + 5x - {}$ $-6 = 0$; б) $9x^2 + 24x + 16 = 0$; в) $7x^2 - x + 27 = 0$.

Далее в следующей последовательности учащимся задаются вопросы:

1. К какому типу относятся эти уравнения? (квадратные уравнения)

2. Что такое квадратное уравнение? (Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где старший коэффициент отличен от нулю)

3. Сколько действительных корней может иметь квадратное уравнение? (Два, один или действительных корней может не быть)

4. Сколько корней имели наши уравнения? Почему так произошло? (а – два корня, так как $D > 0$; б – один корень, так как $D = 0$; в – действительных корней нет, так как $D < 0$)

Далее учащимся предлагается задание – определить при каких значениях параметра уравнение $(a^2 - 121)x^2 + 7x + 3 = 0$ являются квадратным, а при каких линейным. Заметим, что приведено уравнение именно с таким старшим коэффициентом, чтобы учащиеся вспомнили перед изучением нового материала алгоритм решения неполного квадратного уравнения.

Часть 4. Изучение нового материала.

Исследуем в общем случае уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть $a = 0$, тогда уравнение имеет вид $bx + c = 0$. Это уравнение является линейным относительно x. Значит, пользуясь результатами подпункта 1.2 настоящей бакалаврской работы получим, что:

1. Если $b \neq 0$, то $x = -\frac{c}{b}$;
2. Если $b = 0,\ c = 0$, то уравнение имеет бесконечно много решений;
3. Если $b = 0, c \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Случай 2. Пусть $a \neq 0$. Тогда уравнение является квадратным. Найдём дискриминант квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$ и рассмотрим три случая:

1. Если $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет два корня $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

2. Если $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$;

3. Если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение не имеет решений.

Таким образом, при решении уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ требуется рассматривать шесть случаев, а при решении квадратных уравнений вида $ax^2 + {} + bx + c = 0$ – три случая.

Для наглядности учащиеся в свои рабочие тетради переносят таблицу 1.

Часть 5. Первичное закрепление изученного материала.

Учащимся предлагается решить следующие задачи:

1. Исследовать уравнение $x^2 + 2(a + 1)x + 9a - 5 = 0$ на количество решений;

2. Найти все значения параметра, при которых уравнение $(a^2 - -121)x^2 + 7ax + 3 = 0$ имеет хотя бы один корень;

3. Решить уравнение $(a + 8)^2x^2 - 4(2a + 16)^2 = 0$ при всех значениях параметра.

Часть 6. Подведение итогов занятия. Рефлексия.

Домашнее задание. Закрепить алгоритм решения квадратных уравнений. При всех значениях параметра a решить уравнение $ax^2 + ax + 9a - 5 = -x$.

Разработанные в ходе педагогической практики 2 методические материалы апробировались на базе МОУ «СОШ №95 с УИОП» Октябрьского района МО «Город Саратов».

На вводное занятие по теме «Линейные уравнения с параметром» приглашались все учащиеся 11 «А» класса МОУ «СОШ №95 с УИОП», однако пришли на само занятие только те учащиеся, которые выбрали сдавать на ЕГЭ профильную математику (13 человек из класса). Учащиеся с интересом участвовали в дискуссиях, предусмотренных ходом занятия, многие из них давали близкие по смыслу определения понятий «параметр», «уравнение с параметром». Примечательно: все учащиеся самостоятельно пришли к тому, что при решении линейных уравнений с параметрами необходимо рассматривать два случая.

Во время вводного занятия было решено линейное уравнение в общем виде. Учащиеся самостоятельно представили результат исследования в графической форме.

Во время проведения занятия на тему «Решение уравнений вида $ax^2 + +bx + c = 0$» был виден интерес у каждого учащегося, присутствующего на занятии. Занятие прошло продуктивно: были решены все задания. Сложный для восприятия материал одиннадцатиклассниками был хорошо понят. К недостаткам можно отнести малое количество компьютеров в классе: при его увеличении возможно проведение более интересных форм интерактивной работы, нацеленной на индивидуальный результат.

Заключение.

Основные результаты, полученные в ходе написания бакалаврской работы.

1. На основе теоретико-методологического анализа методико-математической литературы была описана классификация задач с параметрами. Нами было выделено четыре основных типа задач с параметрами.

2. При изучении нормативных документов, регламентирующих проведение ЕГЭ по математике, была дана характеристика задачи с параметром в экзаменационной модели, а также приведены критерии оценивания задания.

3. Описана технология подготовки учащихся к решению задач с параметрами, состоящая из пяти элементов.

4. В ходе написания бакалаврской работы были проанализированы и решены задачи, которые предлагались участникам ЕГЭ в 2016-2019 гг. На основе проведённого анализа было отобрано содержание факультативного курса «Задачи с параметрами», который апробирован на базе 11 «А» класса МОУ «СОШ №95 с УИОП» Октябрьского района города Саратова.